Sisteme normale de ecuații diferențiale

1. Să se reducă la forma normală sistemul

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 3ty_1. \end{cases}$$

Rezolvare. Notând $y_3 = y_1'$, obținem $y_3' = y_1''$ şi deci sistemul dat se reduce la următorul sistem normal

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = 3ty_1, \\ y_3' = 2y_1 + y_2 . \Delta \end{cases}$$

La forma normală pot fi reduse şi unele sisteme care nu sunt de formă canonică.

2. Să se reducă la forma normală sistemul

$$\begin{cases} 2y_1' + y_2' - y_1 = \sin t, \\ y_1' + 3y_2 = \cos t. \end{cases}$$

Rezolvare. Din ecuația a doua obținem $y_1' = -3y_2 + \cos t$. Introducând această expresie în prima ecuație a sistemului dat, obținem $-6y_2 + 2\cos t + y_2' - y_1 = \sin t$, de unde $y_2' = y_1 + 6y_2 + \sin t - 2\cos t$. Deci sistemul dat se reduce la sistemul normal

$$\begin{cases} y_1' = -3y_2 + \cos t, \\ y_2' = y_1 + 6y_2 + \sin t - 2\cos t . \Delta \end{cases}$$

Definiție. Se numeşte *soluție* pe intervalul *I* a sistemului normal (1.3) orice mulțime de *n* funcții $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ derivabile pe intervalul *I*, astfel încât $(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \in G$, $\forall t \in I$, şi care verifică ecuațiile acestui sistem, adică

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)), \ \ \forall t \in I, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Să se reducă la o singură ecuație şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Derivând în raport cu *t* ambele părți ale primei ecuații a sistemului dat şi introducând în egalitatea obținută părțile drepte din ecuațiile acestui sistem, obținem succesiv:

$$y_1'' = 2y_1' + y_2', \quad y_1'' = 2(2y_1 + y_2) + 2y_1 + 3y_2, \quad y_1'' = 6y_1 + 5y_2.$$

Rezolvăm prima ecuație a sistemului dat în raport cu y_2: $y_2 = y_1' - 2y_1$ şi introducem expresia obținută în ecuația precedentă. În rezultat obținem $y_1'' = 6y_1 + 5(y_1' - 2y_1)$, de unde

$$y_1'' - 5y_1' + 4y_1 = 0.$$

Deci sistemul dat s-a redus la o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică a ei $k^2 - 5k + 4 = 0$ are rădăcinile $k_1 = 1$ şi $k_2 = 4$. Deci soluția generală a ecuației obținute este

$$y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

Pentru a determina a doua funcție necunoscută a sistemului dat introducem în prima ecuație a lui expresia obținută pentru $y_1(t)$. Avem succesiv:

$$(C_1e^t + C_2e^{4t})' = 2(C_1e^t + C_2e^{4t}) + y_2, \quad y_2 = -C_1e^t + 2C_2e^{4t}.$$

Deci soluția generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}, \\ y_2(t) = -C_1e^t + 2C_2e^{4t}. \end{cases} \quad \Delta$$

4. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + e^{2t}, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 - 4e^{2t}, \end{cases} \quad y_1(0) = 1,.y_2(0) = 2.$$

Rezolvare. Derivând în raport cu t ambele părți ale primei ecuații: $y_1'' = 2y_1' + y_2' + 2e^{2t}$ şi introducând în egalitatea obținută părțile drepte ale ecuațiilor sistemului dat, obținem: $y_1'' = 6y_1 + 5y_2$. Rezolvăm prima ecuație a sistemului în raport cu y_2: $y_2 = y_1' - 2y_1 - e^{2t}$ şi introducem expresia obținută în ecuația precedentă. În rezultat, după transformările de rigoare, obținem

$$y_1'' - 5y_1' + 4y_1 = -5e^{2t}.$$

Această ecuație are soluția generală

$$y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t} + 5e^{2t}/2.$$

Pentru a găsi a doua funcție necunoscută introducem prima funcție în prima ecuație a sistemului dat şi în rezultat obținem:

$$y_2(t) = -C_1e^t + 2C_2e^{4t} - e^{2t}.$$

Deci soluția generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t} + 5e^{2t}/2, \\ y_2(t) = -C_1e^t + 2C_2e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$$

Găsim soluția problemei Cauchy introducând în soluția generală $t = 0$, $y_1 = 1$ şi $y_2 = 2$. În rezultat obținem sistemul liniar algebric

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 5/2 = 1, \\ -C_1 + 2C_2 - 1 = 2, \end{cases}$$

soluția căruia este $C_1 = -2, C_2 = 1/2$. Introducând aceste valori ale constantelor în soluția generală, obținem soluția problemei Cauchy date:

$$\begin{cases} y_1(t) = -2e^t + e^{4t}/2 + 5e^{2t}/2, \\ y_2(t) = 2e^t + e^{4t} - e^{2t}. \end{cases} \quad \Delta$$