ER 4.4.

Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Exemplul 1. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

Ecuaţia caracteristică respectivă este: $k^2 - 5k + 6 = 0$ cu rădăcinile $k_1 = 2$ *si* $k_2 = 3$.

Soluţia generală este: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Exemplul 2. $y'' + 3y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$.

Ecuaţia caracteristică este:

$$k^2 + 3k = 0 \Leftrightarrow k(k+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -3 \end{array}\right.$$

Soluţia generală este: $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-3x} \Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

Găsim soluţia particulară din condiţiile iniţiale:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$
$$y'(x) = -3C_2 e^{-3x}$$

Atunci $y'(0) = -3C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$.

Astfel, $C_1 = \frac{1}{3}$, de unde obţinem soluţia particulară $y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3x}$

Exemplul 3. $y'' - 16y = 0$

Ecuaţia caracteristică este: $k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = -4 \end{array}\right.$

Soluţia generală este: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$.

Exemplul 4. $y'' + 16y' + 64y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$

Ecuaţia caracteristică este: $k^2 + 16k + 64 = 0.$

Disciminantul $\Delta = 0.$ Ecuaţia are două rădăcini egale cu $k_1 = k_2 = -8.$

Soluţia generală este: $y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{-8x}$ sau $y = e^{-8x}(C_1 + C_2 x)$.

Găsim soluţia particulară. Avem $y(0)=e^0(C_1+0)\Rightarrow C_1=1.$

$y'(x)=-8e^{-8x}(C_1+C_2x)+e^{-8x}\cdot C_2$
$y'(0)=-8C_1+C_2=1.$

Cum $C_1=1\Rightarrow C_2=9.$

Astfel, soluţia particulară este $y=e^{-8x}(1+9x).$

<u>Exemplul 5.</u> $y''+4y'+29y=0.$

Ecuaţia caracteristică respectivă este: $k^2+4k+29=0.$

Discriminantul $\Delta=-100<0.$ Ecuaţia are două rădăcini complexe nereale de forma $\alpha\pm\beta i.$

Avem $\Delta=100i^2.$

Atunci $k=\dfrac{-4\pm10i}{2}=-2\pm5i$ *cu* $\alpha=-2$ şi $\beta=5.$

Soluţia generală este: $y=C_1e^{-2x}\cos5x+C_2e^{-2x}\sin5x$ sau $y=e^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x).$

<u>Exemplul 6.</u> $y''+16y=0,\ y(\pi)=1\ y'(\pi)=-1.$

Ecuaţia caracteristică respectivă este: $k^2+16=0\Leftrightarrow k^2=-16\Leftrightarrow k^2=16i^2\Leftrightarrow k=\pm4i.$

Soluţiile sunt complexe de forma $\alpha\pm\beta i.$ Avem $\alpha=0,\ \beta=4.$

Soluţia generală este: $y=C_1e^{0x}\cos4x+C_2e^{0x}\sin4x$ sau $y=C_1\cos4x+C_2\sin4x.$

Găsim soluţia particulară din condiţiile iniţiale: $y(\pi)=C_1\cos4\pi+C_2\sin4\pi=C_1\Rightarrow C_1=1.$

$y'(x)=-4C_1\sin4x+4C_2\cos4x$ şi $y'(\pi)=4C_2\Rightarrow4C_2=-1\Rightarrow C_2=-\dfrac{1}{4}.$

Soluţia particulară este: $y=\cos4x-\dfrac{1}{4}\sin4x.$

<u>Exemplul 7.</u> $y'''-4y''=0$

Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Ecuaţia caracteristică respectivă este: $k^3 - 4k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2(k-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = 0 \\ k = 4 \end{array}\right.$

Avem: $k_1 = k_2 = 0 \;\; si \;\; k_3 = 4$.

Soluţia generală este: $y = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{4x}$ sau $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$.