CAPITOLUL 2

ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE LINEARE, DE ORDINUL n

2.1. NOȚIUNI PRELIMINARE. EXEMPLE

Forma generală a unei ecuații diferențiale lineare de ordinul *n* este

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x), \tag{2.1.1}$$

unde

$$a_j \in \mathrm{C}^0(\mathrm{I}),\ j = \overline{0,n}, \qquad F \in C^0(\mathrm{I}), \quad \mathrm{I} \subseteq \Re. \tag{2.1.2}$$

Dacă $a_0(x) \neq 0,\ x \in I$, împărțim cu a_0 și obținem

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{2.1.3}$$

în care am făcut următoarele notații:

$$p_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_0(x)},\ j = \overline{1,n}, \qquad f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}. \tag{2.1.4}$$

Să presupunem că există puncte *x* în care $a_0(x) = 0$. În aceste puncte ecuația își “pierde” ordinul; ele sunt puncte de singularitate.

Asemenea ecuații depășesc cadrul acestei cărți. De aceea, vom lucra, în cele ce urmează, cu forma (2.1.3) a ecuației lineare.

Reamintim că un operator $L : X \to Y$, unde X, Y sunt spații vectoriale, se numește ***linear*** dacă

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L x_1 + \beta L x_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \Re/\mathbb{C}, \forall x_1, x_2 \in X . \tag{2.1.5}$$

<u>Demonstrăm</u> că L definit prin (2.1.1) este operator linear.

Într-adevăr, fie $y, z \in C^n(I)$, $\alpha, \beta \in \Re/\mathbb{C}$. Avem

$$\begin{aligned} L(\alpha y + \beta z) &= (\alpha y + \beta z)^{(n)} + p_1(x)(\alpha y + \beta z)^{(n-1)} + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)(\alpha y + \beta z)' + p_n(x)(\alpha y + \beta z) = \\ &= \alpha y^{(n)} + \beta z^{(n)} + p_1(x)\left(\alpha y^{(n-1)} + \beta z^{(n-1)}\right) + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)(\alpha y' + \beta z') + p_n(x)(\alpha y + \beta z) = \\ &= \alpha\left(\underbrace{y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y}_{Ly}\right) + \\ &+ \beta\left(\underbrace{z^n + p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z}_{Lz}\right), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

adică

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha L y + \beta L z , \tag{2.1.7}$$

care este tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Şi în acest caz, ***recunoaştem un operator linear după faptul că funcția necunoscută şi derivatele sale până la ordinul*** n ***inclusiv, apar la puterea întâi.***

Deci o ecuație diferențială ordinară de ordinul $n \geq 2$ este ***lineară*** dacă este de gradul întâi în raport cu funcția necunoscută y şi cu derivatele acesteia până la ordinul n inclusiv.

Exemple.

- ♣ Ecuația $y''' + yy' = \sin x$ este ***nelineară***, datorită termenului yy', care este monom de gradul 2 în y şi y'.

♣ Ecuația $y^{(4)} + x^2 y' + x^4 e^x y = 0$ este ***lineară***, deoarece este de gradul 1 în raport cu y, y' şi $y^{(4)}$.

Ecuațiile (2.1.1), (2.1.3) sunt ***lineare*** deoarece operatorul diferențial L, $L : \mathrm{C}^n(\mathrm{I}) \to \mathrm{C}^0(\mathrm{I})$ este linear.

PROPRIETĂȚI GENERALE ALE EDO LINEARE DE ORDINUL n

1. ***Orice schimbare nesingulară de variabilă transformă o EDO lineară tot într-o ecuație lineară de acelaşi ordin.***

* Într-adevăr, fie schimbarea

$$x = f(t), \quad f \in \mathrm{C}^n([\alpha,\beta]), \quad [\alpha,\beta] \subseteq \Re, \tag{2.1.8}$$

cu $f'(t) \neq 0, t \in [\alpha,\beta]$. Conform teoremei funcțiilor implicite (vezi Cursul de Analiză Matematică, partea I), există transformarea inversă $t = \varphi(x)$.

Calculăm derivatele succesive ale lui y în raport cu noua variabilă t. Avem

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f'(t)}\frac{dy}{dt}, \\ &\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f'(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}\frac{dy}{dt}\right] = \frac{1}{f'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{f''(t)}{f'^3(t)}\frac{dy}{dt}; \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

derivatele în x sunt deci expresii lineare în raport cu derivatele în t.

Calculându-le în continuare, vom găsi tot expresii lineare, care, introduse în (2.1.1), vor conduce în final la o EDO lineară de acelaşi ordin.

2. ***Orice schimbare lineară de funcție într-o EDO lineară îi conservă linearitatea şi ordinul.***

Pentru uşurința calculelor, să considerăm ecuația lineară de ordinul II

$$Ly \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{2.1.10}$$

Fie schimbarea

$$y = q(x)z(x) + r(x), \quad q, r \in \mathrm{C}^n([a,b]). \tag{2.1.11}$$

Derivând succesiv, obținem

$$\begin{array}{ll} y = q(x)z(x) + r(x) & \Big| \times p_2(x) \\ y' = qz' + q'z + r' & \Big| \times p_1(x) \\ y'' = qz'' + 2q'z' + q''z + r'' & \Big| \quad \times 1 \\ \hline Ly = qz'' + (qp_1 + 2q')z' + zLq + Lr. & \end{array} \tag{2.1.12}$$

Din ultima expresie rezultă o ecuație diferențială în noua funcție necunoscută z

$$qz'' + (qp_1 + 2q')z' + zLq = -Lr + f, \tag{2.1.13}$$

ecuație care este lineară, de ordinul II.

Acest rezultat se demonstrează în mod analog şi pentru o ecuație lineară de un ordin n arbitrar.

2.2. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI OMOGENE DE ORDINUL n

Ecuațiile (2.1.1) şi (2.1.3) sunt ***neomogene***, deoarece au termen liber.

Le putem asocia ecuații omogene corespunzătoare astfel:

Ecuației (2.1.1) îi corespunde ***ecuația omogenă***

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{2.2.1}$$

iar ecuației (2.1.3) îi asociem ***ecuația omogenă***

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{2.2.2}$$

După cum am menționat, ne vom ocupa de (2.2.2).

Nucleul operatorului L este $\operatorname{Ker} L = \{y \in \mathrm{C}^n(\mathrm{I}) \mid Ly = 0\} \subset \mathrm{C}^n(\mathrm{I})$.

Cu alte cuvinte, $\operatorname{Ker} L$ ***este mulțimea soluțiilor ecuației de ordinul*** n (2.2.2), ***lineară şi omogenă***.

Teorema 2.1. $\operatorname{Ker} L$ *este un subspațiu linear al lui* $C^n(I)$.

Demonstrație. Fie $y, z \in \operatorname{Ker} L$. Aceasta înseamnă că $Ly = 0, Lz = 0$ pe I.

Însă L este linear, deci

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha \underbrace{Ly}_{=0} + \beta \underbrace{Lz}_{=0} = 0, \tag{2.2.3}$$

de unde rezultă că $(\alpha y + \beta z) \in \operatorname{Ker} L$.◘

Conform cunoştințelor despre spații vectoriale, putem face următoarele afirmații:

- Deoarece $\operatorname{Ker} L$ este spațiu vectorial, orice element din $\operatorname{Ker} L$ se exprimă ca o combinație lineară de elementele unei baze din $\operatorname{Ker} L$.
- Pentru a rezolva ecuația omogenă (2.2.2) este deci suficient să determinăm o bază în $\operatorname{Ker} L$.

Putem demonstra că dimensiunea lui $\operatorname{Ker} L$ este n, adică

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} L = n}. \tag{2.2.4}$$

Acest fapt are şi o confirmare intuitivă evidentă. Dacă derivata de ordinul întâi introduce, prin integrare, o constantă arbitrară, derivata de ordinul *n* introduce, după cum se ştie, *n* constante arbitrare (adică *n* grade de libertate).

O bază în $\operatorname{Ker} L$ este deci formată din n funcții linear independente din $\operatorname{Ker} L$, adică din n soluții linear independente ale ecuației omogene (2.2.2).

Definiția 2.1. Numim ***sistem fundamental de soluții pentru ecuația*** (2.2.2) ***o bază în*** $\operatorname{Ker} L$.

Reamintim definiția linear independenței unui sistem de funcții.

Fie $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}} \subset C^0(I)$.

Definiția 2.2. $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ se numeşte ***sistem linear dependent*** dacă există constantele reale $c_1, c_2, ..., c_n$, nu toate nule (mai precis, $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \neq 0$), astfel încât

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{I} \tag{2.2.5}$$

În caz contrar, sistemul se numeşte ***linear independent***. Adică

Definiția 2.3. $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ se numeşte ***sistem linear independent*** dacă egalitatea

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \tag{2.2.6}$$

valabilă pentru orice $x \in \mathrm{I}$, implică

$$c_j = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.2.7}$$

Exemple

1. Să se arate că funcțiile $y_1 = 1, y_2 = \cos^2 x, y_3 = \sin^2 x$ formează un ***sistem linear dependent*** pe $\Re$.

Într-adevăr, combinația lineară evident satisfăcută este

$$y_2 + y_3 - y_1 = 0, \forall x \in \Re. \tag{2.2.8}$$

2. Să se arate că sistemul de funcții $\{1, x, x^2, x^3\}$ formează un ***sistem linear independent*** pe $\Re$.

Într-adevăr, dacă

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3 = 0, \quad \forall x \in \Re, \tag{2.2.9}$$

rezultă că membrul stâng al relației (2.2.9) este polinomul indentic nul, deci coeficienții săi sunt nuli:

$$c_j = 0, \quad j = \overline{1,4}. \tag{2.2.10}$$

CUM VERIFICĂM DACĂ UN SISTEM DE FUNCȚII $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ ESTE LINEAR INDEPENDENT SAU NU?

Pentru simplificarea expunerii, luăm $n=3$; cazul n arbitrar se tratează absolut similar. Considerăm deci sistemul $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathrm{C}^3(\mathrm{I})$.

Dacă este valabilă relația

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = 0, \tag{2.2.11}$$

atunci şi derivatele ei sunt nule:

$$\begin{aligned} c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + c_3 y_3'(x) = 0, \\ c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + c_3 y_3''(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

pentru orice $x \in \mathrm{I}$.

Cele trei relații din (2.2.11), (2.2.12) formează un sistem algebric linear şi omogen, având drept necunoscute pe c_1, c_2, c_3. Determinantul asociat este

$$W[y_1, y_2, y_3] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathrm{I}, \tag{2.2.13}$$

şi-l numim ***Wronskian***.

Din cele spuse mai sus rezultă că

- Dacă $W \equiv 0$, atunci sistemul algebric linear de mai sus admite soluții nenule, deci $\{y_1, y_2, y_3\}$ formează un ***sistem linear dependent***;
- Dacă $W \neq 0$ în I, atunci sistemul admite doar soluția identic nulă, deci $\{y_1, y_2, y_3\}$ formează un ***sistem linear independent***.

Fie $\{y_1, y_2, y_3\}$ soluții ale ecuației lineare

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0. \tag{2.2.14}$$

Putem demonstra:

Teorema 2.2. *Dacă* $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \operatorname{Ker} L$ *formează un sistem linear independent, atunci* $W[y_1, y_2, y_3] \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$.

<u>Demonstrația</u> se face prin reducere la absurd. ◘

Fie acum, mai general, sistemul de funcții $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$, cel puțin de clasă $\mathrm{C}^n(\mathrm{I})$.

Definiția 2.4. Determinantul

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{2.2.15}$$

se numeşte ***Wronskianul*** funcțiilor $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Teorema 2.2, ca și afirmațiile de mai sus asupra Wronskianului unui sistem de trei funcții, se pot demonstra cu uşurință şi pentru *n* oarecare.

În concluzie, pentru un sistem $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset \operatorname{Ker} L$, cu L dat de (2.2.2), **este valabilă următoarea**

ALTERNATIVĂ:

- ♣ sau $W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0$ pe I și rezultă că $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ formează un ***sistem linear dependent***;
- ♣ sau $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$ și rezultă că sistemul $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ este un ***sistem linear independent***.

Exemple

1. Fie ecuația

$$Ly \equiv y'' - y = 0 . \tag{2.2.16}$$

şi să considerăm sistemul de soluții ale ei, $y_1 = \mathrm{e}^x, y_2 = \mathrm{e}^{-x}$.

VERIFICARE. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} Ly_1 &= Le^x = e^x - e^x = 0, \quad \forall x \in \Re, \\ Ly_2 &= Le^{-x} = -\left(-e^{-x}\right) - e^{-x} = 0, \quad \forall x \in \Re. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Wronskianul lor va fi, prin definiție,

$$W\left[e^x, e^{-x}\right] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \tag{2.2.18}$$

deci, conform celor arătate anterior, sistemul $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$ este ***un sistem fundamental*** pentru ecuația (2.2.16), sau o ***bază*** în $\operatorname{Ker} L$.

2. Fie ecuația

$$Ly \equiv y'' + y = 0. \tag{2.2.19}$$

Funcțiile $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ formează un sistem de soluții ale acestei ecuații.

VERIFICARE. Avem

$$\begin{aligned} Ly_1 &= (\cos x)' + \sin x = 0, \\ Ly_2 &= (-\sin x)' + \cos x = 0, \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

de unde rezultă că $\{y_1, y_2\} \subset \operatorname{Ker} L$.

Calculăm acum Wronskianul

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \tag{2.2.21}$$

ceea ce înseamnă că $\{\sin x, \cos x\}$ formează o ***bază*** în $\operatorname{Ker} L$ sau, altfel spus, un ***sistem fundamental***.

Fie $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}} \subset \operatorname{Ker} L$, cu L dat de (2.2.2), o bază în $\operatorname{Ker} L$.

Atunci orice soluție y a ecuației (2.2.2), lineară şi omogenă, se exprimă sub forma combinației lineare

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad x \in \mathrm{I}, c_j \in \Re, j = \overline{1,n}. \tag{2.2.22}$$

Putem conchide deci că

Soluția generală a ecuației omogene

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad x \in \mathrm{I} \tag{2.2.23}$$

se exprimă sub forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \tag{2.2.24}$$

unde c_j sunt constante arbitrare, iar $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ formează un system fundamental de soluții ale ei.

Observație. Fie $y_1 = \operatorname{ch} x, y_2 = \operatorname{sh} x$ și ecuația diferențială ordinară

$$Ly \equiv y'' - y = 0,$$

de la exemplul precedent.

Avem

$$\begin{aligned} Ly_1 &= (\operatorname{ch} x)'' - \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} x = 0, \\ Ly_2 &= (\operatorname{sh} x)'' - \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x = 0, \end{aligned}$$

deci $\{y_1, y_2\} \subset \operatorname{Ker} L$.

Wronskianul sistemului $\{y_1, y_2\}$este

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \neq 0,$$

deci $\{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (2.2.16).

Dar am arătat că și $\{e^x, e^{-x}\}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru aceeași ecuație.

În general,

Orice ecuație diferențială ordinară lineară admite o infinitate de sisteme fundamentale de soluții.

OARE RECIPROCA ESTE ADEVĂRATĂ?

Răspunsul la această întrebare este dat de

Teorema 2.3. *Unui sistem fundamental dat* $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ *îi corespunde* **o singură** *ecuație diferențială lineară omogenă de forma* (2.2.2) *(având coeficientul lui* $y^{(n)}$ *egal cu* 1*).*

<u>Demonstrația:</u> se face pentru $n=3$, pentru uşurința expunerii. Fie $y\in \operatorname{Ker} L$. Cum $\{y_1, y_2, y_3\}\subset \operatorname{Ker} L$ este sistem fundamental de soluții, el este o bază în $\operatorname{Ker} L$, deci putem găsim 3 constante reale c_1, c_2, c_3 astfel încât

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_3y_3(x), \qquad x\in \mathrm{I}. \tag{2.2.25}$$

Dar aceasta înseamnă că funcțiile $\{y_1, y_2, y_3, y\}$ formează un *sistem linear dependent*, ceea ce echivalează cu a spune că $W[y_1, y_2, y_3, y]\equiv 0$ în I.

Adică

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix}=0, \qquad x\in \mathrm{I}. \tag{2.2.26}$$

Dezvoltând membrul stâng după ultima coloană, ajungem la o ecuație diferențială ordinară lineară, în y. Ea este de ordinul 3, deoarece coeficientul lui y''' este tocmai determinantul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=W[y_1, y_2, y_3]. \tag{2.2.27}$$

care coincide cu Wronskianul sistemului $\{y_1, y_2, y_3\}$ şi este nenul, deoarece sistemul este fundamental.

Dezvoltând determinantul (2.2.26) mai departe, coeficientul lui y'' va fi

$$-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} =\equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[y_1, y_2, y_3]. \tag{2.2.28}$$

Ecuația care admite sistemul $\{y_1, y_2, y_3\}$ drept sistem fundamental va fi de forma

$$W(x)y''' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y'' + ... = 0. \tag{2.2.29}$$

Împărțind cu coeficientul lui y''', obținem ecuația căutată

$$y''' - \frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y'' + ... = 0. \tag{2.2.30}$$

Pentru *n* arbitrar, ecuația (2.2.31) se scrie

$$y^{(n)} - \frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y^{(n-1)} + ... = 0. \tag{2.2.31}$$

Din (2.2.28), comparând cu forma generală (2.2.2) a ecuației, rezultă

$$p_1(x) = -\frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x), \tag{2.2.32}$$

sau, integrând o dată,

$$\ln|W[y_1, y_2, ..., y_n]| = -\int p_1(x)\mathrm{d}x + \ln|C|. \tag{2.2.33}$$

Trecând la exponențială, obținem ***formula lui Liouville***, şi anume

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = C \cdot \mathrm{e}^{-\int p_1(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.2.34}$$

UNICITATEA.

Deoarece $\dim \mathrm{Ker}\, L = n$, înseamnă că $n+1$ soluții ale unei ecuații lineare şi omogene, de ordinul *n*, sunt linear dependente.

Presupunem că sistemului fundamental $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ îi corespund două asemenea ecuații lineare şi omogene, diferite

$$\begin{aligned} L_1 y &\equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \\ L_2 y &\equiv y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = 0. \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Scăzând membru cu membru cele două ecuații, obținem

$$\begin{aligned} &(p_1 - q_1)y^{(n-1)} + (p_2 - q_2)y^{(n-2)} + \ldots + (p_{n-1} - q_{n-1})y' + \\ &+ (p_n - q_n)y = 0. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Deoarece oricare $y_j, j = \overline{1,n}$ satisface ambele ecuației (2.2.35), rezultă că ea satisface şi (2.2.36). Dacă $p_1 \neq q_1$, ordinul ecuației este, evident, $(n-1)$. Cum $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ este sistem fundamental, înseamnă că ecuația (2.2.36), de ordinul $(n-1)$, admite n soluții linear independente, ceea ce reprezintă o ***contradicție***.

Deci $p_1(x) \equiv q_1(x), \forall x \in \mathrm{I}$.

Analog se demonstrează că $p_k(x) \equiv q_k(x), \forall x \in \mathrm{I}$, pentru orice $k = \overline{2,n}$. ◘

Exemple

1. Fie sistemul fundamental $\{e^x, e^{-x}\}$. Să se determine EDO corespunzătoare.

a) Ordinul ecuației este 2. Am calculat anterior $W[e^x, e^{-x}] = -2$, arătând astfel că $\{e^x, e^{-x}\}$ este un sistem linear independent.

b) Conform considerațiilor precedente, dacă y e o soluție oarecare a ecuației, sistemul $\{e^x, e^{-x}, y\}$ este linear dependent şi deci Wronskianul lui se anulează

$$W[e^x, e^{-x}, y] \equiv 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.37}$$

deci

$$y''\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.38}$$

În final, ecuația căutată este $Ly \equiv y'' - y = 0$, după simplificarea cu -2.

2. Să se determine EDO de sistem fundamental $\{\cos x, \sin x\}$.

a) Numărul funcțiilor sistemului fundamental este 2, deci ordinul ecuației căutate este 2.

Verificăm linear independența:

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \tag{2.2.39}$$

b) Ecuația căutată este dată de Wronskianul

$$W[\sin x, \cos x, y] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.40}$$

Calculând acest determinant după ultima coloană, deducem

$$y''\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.41}$$

Deci ecuația este, după împărțirea cu $W[\sin x, \cos x] = -1$:

$$Ly \equiv y'' + y = 0. \tag{2.2.42}$$

2.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n, LINEARE ŞI NEOMOGENE

Reluăm ecuația diferențială lineară şi neomogenă

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{2.3.1}$$

unde $p_j, f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{I})$.

Putem demonstra câteva fapte matematice de mare importanță pentru rezolvarea ei.

I. *Dacă* Y *este o soluție particulară a ecuației neomogene* (2.3.1), *iar* z *este soluția generală a EDO omogene asociate* $Ly = 0$, *rezultă că* ***soluția generală*** *a EDO neomogene este*

$$y = Y + z. \qquad (2.3.2)$$

<u>Demonstrație</u>. Să facem schimbarea de funcție $y = Y + z$, z fiind noua funcție necunoscută. Introducem în (2.3.1) şi, ținând cont că L este linear, rezultă

$$\left.\begin{cases} Ly = L(Y+z) = LY + Lz = f + Lz \\ Ly = f \end{cases}\right| \Rightarrow f = f + Lz \Rightarrow Lz = 0. \qquad (2.3.3)$$

deci

$$z \in \operatorname{Ker} L. \qquad (2.3.4)$$

II. *Presupunem că termenul liber f al ecuației* (2.3.1) *este o sumă de forma*

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k, \qquad (2.3.5)$$

şi fie Y_j *soluțiile particulare corespunzătoare fiecărui* f_j, *adică*

$$LY_j = f_j,\ j = \overline{1,k}. \qquad (2.3.6)$$

Atunci

$$Y = \sum_{j=1}^{k} Y_j \qquad (2.3.7)$$

este soluție particulară pentru ecuația neomogenă $LY = f$.

<u>Demonstrația</u> se face prin calcul direct. Avem, ținând seama şi de (2.3.6),

$$LY = L\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j\right) \underset{L\ \text{linear}}{=} \sum_{j=1}^{k} LY_j = \sum_{j=1}^{k} f_j = f \tag{2.3.8}$$

III. *Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluții pentru ecuația* (2.2.23), *atunci putem determina o soluție particulară pentru ecuația neomogenă* (2.3.1) *folosind* ***metoda variației constantelor***.

Demonstrație. Considerăm cazul $n = 3$, generalizarea fiind imediată.

Fie

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = f(x), \tag{2.3.9}$$

și $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \operatorname{Ker} L$ un sistem fundamental de soluții.

Atunci $Ly_j = 0, j = \overline{1,3}$. Soluția generală a ecuației omogene asociate este, conform rezultatului de la **I**, $y = Y + z$, unde z este soluția generală a ecuației omogene asociate lui (2.3.9):

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0. \tag{2.3.10}$$

Deoarece $\{y_1, y_2, y_3\}$ este un sistem fundamental, el reprezintă o bază în $\operatorname{Ker} L$, astfel încât z se exprimă ca o combinație lineară de funcțiile sistemului

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x). \tag{2.3.11}$$

Ca și în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare lineare de ordinul I, căutăm pe Y sub forma

$$Y(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + c_3(x) y_3. \tag{2.3.12}$$

Rezultă, reconstituind ecuația

$$\begin{array}{l|c|l}
Y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3 & p_3(x) & \\
Y'=c_1y_1'+c_2y_2'+c_3y_3'+\underbrace{c_1'y_1+c_2'y_2+c_3'y_3}_{=0} & p_2(x) & \\
Y''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_3y_3''+\underbrace{c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_3'y_3'}_{=0} & p_1(x) & + \\
Y'''=c_1y_1'''+c_2y_2'''+c_3y_3'''+c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3y_3'' & 1 & \\
\hline
LY=\underbrace{c_1Ly_1}_{=0}+\underbrace{c_2Ly_2}_{=0}+\underbrace{c_3Ly_3}_{=0}+c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3'y_3''=f\,. & &
\end{array} \tag{2.3.13}$$

Deci c_1', c_2', c_3' satisfac sistemul algebric linear

$$\begin{aligned}
&c_1'y_1+c_2'y_2+c_3'y_3=0,\\
&c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_3'y_3'=0,\\
&c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3'y_3''=f\,.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Determinantul asociat acestui sistem este chiar Wronskianul sistemului fundamental, deci este nenul pe I:

$$W[y_1,y_2,y_3]\equiv\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x)\end{vmatrix}\neq 0,\qquad x\in \mathrm{I}\,. \tag{2.3.15}$$

Prin urmare, sistemul (2.3.14) admite soluție unică. Fie

$$c_j'=\varphi_j(x),\ j=\overline{1,3}, \tag{2.3.16}$$

această soluție. Integrând, obținem

$$c_j=\int\varphi_j(x)\mathrm{d}x,\ j=\overline{1,3}. \tag{2.3.17}$$

IV. Concluzie: *Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluții pentru ecuația neomogenă* (2.3.1), *atunci soluția sa generală se determină prin cuadraturi (integrări, primitive).*

Demonstrație. Dacă $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ este sistem fundamental de soluții, rezultă că soluția generală a ecuației omogene asociate lui (2.3.1), adică $Ly=0$, este

$$y_{\text{omog}} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \quad x \in \mathrm{I}. \tag{2.3.18}$$

Atunci

I. Conform punctului **III**, o soluție particulară Y a lui (2.3.1) este

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(x) \mathrm{d}x \right) \cdot y_j, \tag{2.3.19}$$

unde $c'_j = \varphi_j$ sunt soluții ale sistemului algebric

$$\begin{aligned} &c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n = 0, \\ &c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = f. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

II. Conform **I**, $y = Y + z$, deci soluția generală a ecuației (2.3.1) este

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(x) dx \right) \cdot y_j, \tag{2.3.21}$$

unde $\varphi_j = c'_j$, $j = \overline{1,n}$ satisfac sistemul (2.3.20).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$Ly \equiv y'' - y = \mathrm{e}^{2x}. \tag{2.3.22}$$

ETAPA 1. Ecuația omogenă asociată este

$$Ly \equiv y'' - y = 0, \tag{2.3.23}$$

și admite sistemul fundamental de soluții $\{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\}$ (s-au determinat în exemplele precedente).

Soluția generală a EDO omogene este

$$y_{\text{omog}} = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{-x}. \tag{2.3.24}$$

ETAPA 2. Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene, de forma

$$Y = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x}. \tag{2.3.25}$$

Introducând în ecuație, rezultă

$$\begin{array}{l|c|l} Y = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} & -1 & \\ Y' = c_1(x)\mathrm{e}^{x} - c_2(x)\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{c_1'(x)\mathrm{e}^{x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}}_{=0} & 0 & + \\ Y'' = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} + c_1'(x)\mathrm{e}^{x} - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} & 1 & \\ \hline Ly = \quad / \quad + \quad / \quad + c_1'(x)\mathrm{e}^{x} - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x}. & & \end{array} \tag{2.3.26}$$

Trebuie deci să rezolvăm sistemul

$$\begin{aligned} c_1'\mathrm{e}^{x} + c_2'\mathrm{e}^{-x} &= 0, \\ c_1'\mathrm{e}^{x} - c_2'\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^{2x}. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Determinantul asociat coincide cu Wronskianul:

$$\Delta = W\left[\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\right] = -2. \tag{2.3.28}$$

Rezultă soluția unică

$$\begin{aligned} c_1' &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, \\ c_2' &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x} & 0 \\ \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Integrând, obținem

$$c_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, c_2 = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x}, \tag{2.3.30}$$

astfel încât, conform lui (2.3.25), soluția particulară *Y* are expresia

$$Y = \frac{1}{2}e^{x} \cdot e^{x} - \frac{1}{6}e^{3x} \cdot e^{-x}, \tag{2.3.31}$$

de unde rezultă

$$Y = \frac{1}{3}e^{2x}. \tag{2.3.32}$$

Soluția generală a ecuației neomogene (2.3.22) este deci

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}}. \tag{2.3.33}$$

Observație. În cazul coeficienților p_j constanți, soluția particulară Y se caută, mai ușor, sub forma funcțiilor elementare din membrul drept (termenul liber f).

Exemplu. Dacă reluăm ecuația (2.3.22), îl putem căuta pe Y sub forma $Y = ke^{2x}$. Introducând această expresie în ecuație, obținem

$$\begin{array}{r|c|l} Y = ke^{2x} & -1 & \\ Y' = 2ke^{2x} & 0 & + \\ Y'' = 4ke^{2x} & 1 & \\ \hline \end{array} \tag{2.3.34}$$
$$LY = (4k - k)e^{2x} = 3ke^{2x}.$$

Trebuie deci să avem

$$3ke^{2x} = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}; \tag{2.3.35}$$

rezultă $\boxed{Y = \frac{1}{3}e^{2x}}$, soluție particulară obținută mai simplu decât folosind metoda variației constantelor.

2.4. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE DE ORDINUL n, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Forma generală a acestor ecuații este

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.4.1}$$

unde $a_k \in \Re, k = \overline{0,n}$.

Am văzut că soluția generală a unei ecuații diferențiale ordinare lineare şi neomogene se exprimă ca o sumă dintre o soluție particulară a sa şi soluția generală a ecuației omogene asociate. Cunoaşterea unui sistem fundamental de soluții a ecuației omogene asociate conduce imediat la soluția generală a ecuației neomogene.

2.4.1. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI OMOGENE

Fie deci

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.4.2}$$

ecuația omogenă asociată lui (2.4.1). Operatorul *L*, definit prin membrul stâng al acestei ecuații, este linear, în sensul aceleiaşi definiții dată la ecuațiile diferențiale de ordinul I. Şi în acest caz recunoaştem un operator linear după faptul că funcția necunoscută şi derivatele sale până la ordinul *n* inclusiv apar la puterea a I-a. Nucleul operatorului este

$$\ker L = \left\{ y \in C^n(\Re) \middle| \, Ly = 0 \right\}, \tag{2.4.3}$$

deci

Mulțimea soluțiilor ecuației (2.4.2) ***coincide cu*** ker *L*.

După cum am arătat în paragraful 2.2, dimensiunea lui ker *L* este *n*. Rezultă deci că

Pentru rezolvarea unei ecuații lineare de ordinul *n* ***trebuie să găsim o bază în*** ker *L*.

Reamintim că o bază a unui spațiu vectorial n-dimensional este o mulțime formată din n elemente linear independente ale spațiului. Fie $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ o bază în ker L. Atunci soluția generală a ecuației (2.4.2) se scrie ca o combinație lineară cu coeficienți arbitrari de elementele bazei, deci

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x). \tag{2.4.4}$$

MOD DE REZOLVARE

În cazul coeficienților constanți, se caută soluții de forma exponențială $y = \mathrm{e}^{rx}$, ***după ideea lui Leonhard Euler***. Derivăm succesiv şi introducem în ecuație:

$$\begin{array}{ll}
a_n \;\times & y = \mathrm{e}^{rx} \\
a_{n-1} \times & y' = r\mathrm{e}^{rx} \\
a_{n-2} \times & y'' = r^2\mathrm{e}^{rx} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_1 \;\times & y^{(n-1)} = r^{n-1}\mathrm{e}^{rx} \\
a_0 \;\times & y^{(n)} = r^n\mathrm{e}^{rx} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{Ly = \mathrm{e}^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots a_{n-1} r + a_n\right) = 0,}
\end{array} \tag{2.4.5}$$

deci, pentru ca e^{rx} să fie soluție trebuie ca

$$\boxed{a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots a_{n-1} r + a_n = 0}. \tag{2.4.6}$$

Ecuația (2.4.6) se numeşte ***ecuație caracteristică***. Ea admite întotdeauna n rădăcini în corpul complex. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aceste rădăcini.

A. ***Rădăcini reale şi distincte***. În acest caz, baza din ker L pe care o căutăm este formată din funcțiile $\mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{r_n x}$, prin următoarea corespondență

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} & & e^{r_n x} \end{array}, \tag{2.4.7}$$

prin urmare soluția generală a ecuației este

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}. \tag{2.4.8}$$

B. *Rădăcini complex conjugate*. Fie $r_1 = a + \mathrm{i}b$. Atunci ecuația caracteristică, având coeficienți reali, mai admite şi pe $r_2 = a - \mathrm{i}b$ ca rădăcină. Pentru simplitatea expunerii, să presupunem că celelalte rădăcini sunt reale. Pentru a rămâne în cadrul real, vom înlocui $e^{(a+\mathrm{i}b)x}, e^{(a-\mathrm{i}b)x}$ cu combinații lineare reale ale acestora, folosind formulele lui Euler (vezi cursul de Analiză Matematică, Calcul Diferențial):

$$\begin{aligned} e^{ax}\cos bx &= e^{ax}\frac{e^{\mathrm{i}bx} + e^{-\mathrm{i}bx}}{2}, \\ e^{ax}\sin bx &= e^{ax}\frac{e^{\mathrm{i}bx} - e^{-\mathrm{i}bx}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Atunci schema (2.4.7) devine

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx & e^{r_3 x} & & e^{r_n x} \end{array}, \tag{2.4.10}$$

şi soluția generală a ecuației este

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + c_3 e^{r_3 x} \ldots + c_n e^{r_n x}. \tag{2.4.11}$$

C. *Rădăcini multiple.* Spre deosebire de cazurile precedente, acesta necesită şi alte precizări. Nu putem folosi direct schema (2.4.7), deoarece am obține, evident, un sistem linear dependent.

Să considerăm mai întâi ecuația de ordinul II

$$Ly \equiv ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.4.12}$$

Presupunem că ecuația sa caracteristică

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{2.4.13}$$

admite rădăcinile reale r_1, r_2, foarte apropiate ca valoare, dar, totuşi, distincte. Atunci putem folosi schema (2.4.7), care, în acest caz, devine

$$\begin{array}{cc} r_1 & r_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{e}^{r_1 x} & \mathrm{e}^{r_2 x} \end{array}. \tag{2.4.14}$$

Dacă $r_2 \to r_1$, atunci schema nu funcționează. Pentru a înlătura acest inconvenient, putem înlocui pe $\mathrm{e}^{r_2 x}$ cu combinația lineară

$$\frac{\mathrm{e}^{r_2 x} - \mathrm{e}^{r_1 x}}{r_2 - r_1}, \tag{2.4.15}$$

care, evident, este şi ea soluție a ecuației (2.4.12). Trecând la limită pentru $r_2 \to r_1$, obținem

$$\lim_{r_2 \to r_1} \frac{\mathrm{e}^{r_2 x} - \mathrm{e}^{r_1 x}}{r_2 - r_1} = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}\left(\mathrm{e}^{r_2 x} - \mathrm{e}^{r_1 x}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}\left(r_2 - r_1\right)} = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{x\mathrm{e}^{r_2 x}}{1} = x\mathrm{e}^{r_1 x}. \tag{2.4.16}$$

Înseamnă că, dacă $r_2 = r_1$, putem considera pentru ecuația (2.4.12) schema

$$\begin{array}{cc} r_1 & r_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{e}^{r_1 x} & x\mathrm{e}^{r_1 x} \end{array}. \tag{2.4.17}$$

Într-adevăr, cele două funcții din schemă sunt soluții ale ecuației şi sunt şi linear independente, deoarece Wronskianul lor

$$W\left[\mathrm{e}^{r_1 x}, x\mathrm{e}^{r_1 x}\right] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1 x} & x\mathrm{e}^{r_1 x} \\ r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} & x r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_1 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2 r_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ r_1 & x r_1 + 1 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2 r_1 x} \tag{2.4.18}$$

este nenul. Soluția generală a ecuației (2.4.12) este

$$y(x)=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2x\mathrm{e}^{r_1x}, \tag{2.4.19}$$

sau

$$y(x)=\mathrm{e}^{r_1x}(c_1+c_2x). \tag{2.4.20}$$

Ne situăm acum în cazul general. Presupunem, pentru simplitate, că r_1 este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuației caracteristice (2.4.6), iar celelalte rădăcini $r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots, r_n$ sunt reale şi distincte. La fel ca mai înainte, se demonstrează că în acest caz schema (2.4.7) devine

$$\begin{matrix} r_1 & r_1 & & r_1 & r_{m+1} & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ \mathrm{e}^{r_1x} & x\mathrm{e}^{r_1x} & & x^{m-1}\mathrm{e}^{r_1x} & \mathrm{e}^{r_{m+1}x} & & \mathrm{e}^{r_nx} \end{matrix}, \tag{2.4.21}$$

şi deci soluția generală a ecuației este

$$y(x)=\mathrm{e}^{r_1x}\left(c_1+c_2x+\ldots c_mx^{m-1}\right)+c_3\mathrm{e}^{r_3x}\ldots+c_n\mathrm{e}^{r_nx}. \tag{2.4.22}$$

CONCLUZIE: Pentru ecuațiile diferențiale ordinare cu coeficienți constanți putem determina efectiv întotdeauna un sistem fundamental de soluții, exprimat prin funcții elementare.

Exemple. Să se determine soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale ordinare:

a) $Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = 0$.

Este o ecuație diferențială lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y=\mathrm{e}^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2-3r+2=0,$$

care admite rădăcinile reale şi distincte $r_1=1, r_2=2$. Suntem în cazul **A**.

Soluția generală este, conform formulei (2.4.8),

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.}$$

b) $Ly \equiv y'' + y = 0$.

Este o ecuație lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y = e^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2 + 1 = 0,$$

care admite rădăcinile pur imaginare, complex conjugate $r_1 = +i,\ r_2 = -i$.

Soluția generală este, conform formulei (2.4.11)

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.}$$

c) $Ly \equiv y'' + 2y' + y = 0$.

Este o ecuație diferențială ordinară lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y = e^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

care admite rădăcina dublă $r = -1$. Soluția generală este, conform formulei (2.4.22)

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.}$$

APLICAȚIE: OSCILATORUL ARMONIC

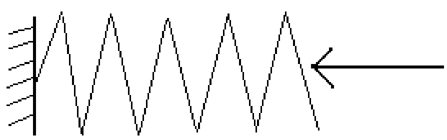

Figura 2.4.1. Oscilatorul armonic.

Începem prin a construi modelul matematic asociat acestui fenomen fizic.

Această construcție presupune, după cum am mai arătat,

- ♣ stabilirea ***mărimii*** (sau ***mărimilor***) ***fizice*** care determină cunoaşterea completă a fenomenului fizic; ele vor juca rolul ***funcțiilor necunoscute***;
- ♣ stabilirea ***legii*** (sau ***legilor***) ***fizice*** care guvernează fenomenul şi exprimarea lor în termeni matematici.

MODELUL MATEMATIC AL OSCILATORULUI ARMONIC

1. ***Funcția necunoscută*** este în acest caz ***deplasarea*** $y = y(t)$, având, evident, o singură componentă.

2. ***Legea fizică*** este ***legea lui Newton***: produsul masă-accelerație este egal cu rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului, adică, în termeni matematici,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{2.4.23}$$

unde $\mathbf{a}, \mathbf{F}$ au fiecare câte o singură componentă).

F este forța elastică, expresia sa matematică fiind

$$\mathbf{F} = -ky, \quad k > 0, \tag{2.4.24}$$

iar **a** este accelerația, adică, după cum se ştie,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4.25}$$

Pentru derivata a doua a deplasării în raport cu timpul vom folosi binecunoscuta notație din mecanică

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{y}. \tag{2.4.26}$$

Deci

$$m\ddot{y} = -ky. \tag{2.4.27}$$

Notăm $\dfrac{k}{m} = \omega^2 > 0$. În concluzie, modelul matematic este reprezentat de

$$\boxed{Ly \equiv \ddot{y} + \omega^2 y = 0}\,. \tag{2.4.28}$$

Aceasta este o ecuație lineară, cu coeficienți constanți, omogenă. Pentru a determina un sistem fundamental de soluții, căutăm pe y de forma exponențială $y = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Derivăm şi introducem în ecuație:

$$\left.\begin{array}{c|l} \omega^2 & y = \mathrm{e}^{\alpha t} \\ 0 & \dot{y} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \\ 1 & \underline{\ddot{y} = \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha t}} \end{array}\right| + \Bigg| \Rightarrow Ly = \left(\alpha^2 + \omega^2\right)\mathrm{e}^{\alpha t} = 0\,. \tag{2.4.29}$$

Rezultă ecuația caracteristică

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0\,, \tag{2.4.30}$$

cu rădăcinile $\alpha_{1,2} = \pm i\omega$. Avem următorul sistem fundamental:

$$\begin{array}{cc} \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{array}\quad . \tag{2.4.31}$$

Pentru a evita cadrul complex, folosim ***formulele lui Euler*** (vezi cursul de Analiză Matematică, partea I). Avem:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} &= \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} &= \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

deci

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} = \cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}} = \sin\alpha\,. \tag{2.4.33}$$

În loc de exponențialele cu exponenți complecşi, putem lua combinațiile

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}&=\cos\omega t\\ \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}&=\sin\omega t,\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

care sunt şi ele soluţii şi formează un sistem fundamental.

Într-adevăr

$$W[\cos\omega t,\sin\omega t]=\begin{vmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\end{vmatrix}=\omega\neq 0. \tag{2.4.35}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (2.4.28) este

$$y(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t. \tag{2.4.36}$$

În loc de constantele arbitrare c_1, c_2, vom considera alte două constante A şi δ, de asemenea arbitrare.

Luând $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, rezultă

$$y(t)=A\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega t\right). \tag{2.4.37}$$

Constantele din paranteză sunt, evident, subunitare, iar suma pătratelor lor este 1, astfel încât putem lua

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\delta,\quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\sin\delta, \tag{2.4.38}$$

unde

$$\delta=\operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}. \tag{2.4.39}$$

În final, soluţia generală a ecuaţiei oscilatorului armonic se exprimă astfel

$$\boxed{y(t)=A\cos(\omega t-\delta)}. \tag{2.4.40}$$

INTERPRETARE FIZICĂ

Reprezentând grafic funcția (2.4.40), obținem figura 2.4.2,

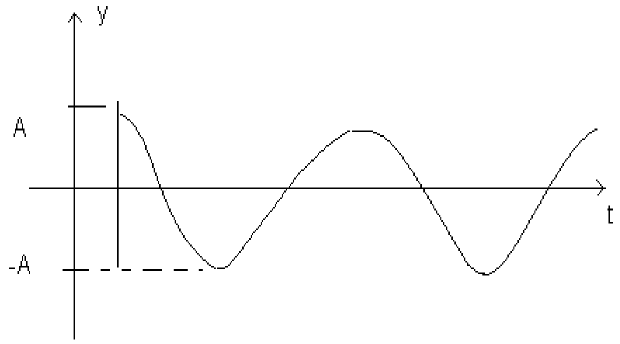

Figura 2.4.2.Reprezentarea geometrică a mişcării oscilatorului armonic

unde

- A reprezintă ***amplitudinea mişcării***
- ω reprezintă ***frecvența mişcării***
- δ reprezintă ***faza mişcării.***

Anulând argumentul cosinusului, obținem momentul $\varphi = \dfrac{\delta}{\omega}$, care corespunde amplitudinii *A*. Vom relua această problemă în cadrul aplicațiilor.

2.4.2. POLINOM DIFERENȚIAL

Fie din nou ecuația (2.4.1).

Observăm că ea se mai poate scrie şi în felul următor:

$$Ly \equiv a_0 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} y + ... + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + a_n y = f(x). \tag{2.4.41}$$

Să notăm cu D operatorul derivată, adică

$$D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}. \tag{2.4.42}$$

Atunci

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} = D^k, \tag{2.4.43}$$

şi operatorul L se mai poate scrie şi sub forma

$$Ly \equiv a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + ... + a_{n-1} Dy + a_n Ey = f(x), \tag{2.4.44}$$

unde am notat cu E operatorul identitate, adică

$$Ey = y. \tag{2.4.45}$$

Forma (2.4.44) mai poate fi modificată astfel

$$Ly \equiv \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n E\right) y = f(x), \tag{2.4.46}$$

Operatorul din paranteza de mai sus este, formal, un polinom de gradul n în D.

El se numeşte ***polinom diferențial***.

Vom folosi următoarea notație pentru polinomul diferențial:

$$\boxed{P_n(D) \equiv a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n E}. \tag{2.4.47}$$

Rezultă că ecuația (2.4.1) se poate scrie şi în alt mod:

$$\boxed{Ly \equiv P_n(D) y = f(x)}. \tag{2.4.48}$$

Observație. Înlocuind în (2.4.47) pe D cu r şi derivările succesive cu puteri, obținem ***polinomul caracteristic*** asociat ecuației diferențiale.

FORMULE DE CALCUL UTILE

I. Să aplicăm polinomul diferențial unei exponențiale

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.49}$$

Ținând seama de faptul că

$$D\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad D^k\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) = \alpha^k \mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{2.4.50}$$

obținem

$$\begin{aligned} P_n(D)\left(e^{\alpha x}\right) &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n E\right) e^{\alpha x} = \\ &= a_0 D^n e^{\alpha x} + a_1 D^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_{n-1} D e^{\alpha x} + a_n E e^{\alpha x} = \\ &= a_0 \alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = \\ &= \left(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n\right) e^{\alpha x}, \end{aligned} \quad . \tag{2.4.51}$$

deci

$$\boxed{P_n(D)\left(e^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha) e^{\alpha x}}. \tag{2.4.52}$$

Această formulă remarcabilă este de mare utilitate practică. De altfel, am întâlnit-o şi în paragrafele precedente, însă nu legată de polinomul diferențial, ci de ecuația caracteristică.

II. Putem demonstra o altă formulă de calcul foarte utilă, valabilă pentru orice polinom diferențial.

Lema 2.1. *Dacă* $u, v \in \mathrm{C}^n(I)$, *atunci*

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(D)(uv) = uP_n(D)v + \frac{1}{1!}u' P_n'(D)v + \frac{1}{2!}u'' P_n''(D)v + \\ + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}u^{(n-1)} P_n^{(n-1)}(D)v + \frac{1}{n!}u^{(n)} P_n^{(n)}(D)v. \end{aligned}} \tag{2.4.53}$$

* Demonstrația se face folosind formula lui Leibniz

$$\begin{aligned} D^k(uv) = uD^k v + u' D^{k-1} v + C_n^2 u'' D^{k-2} v + \\ + \ldots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} D v + v D^n u. \end{aligned} \tag{2.4.54}$$

O vom da pentru $n = 2$. Pentru n arbitrar, rezultă imediat prin inducție completă. Fie operatorul

$$P(D) \equiv aD^2 + bD + cE. \tag{2.4.55}$$

Avem

$$\begin{array}{l|l} D^2(uv) = uD^2v + C_2^1 DuDv + vD^2u & \times a \\ D(uv) = uDv + vDu & \times b \\ E(uv) = uv & \times c \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(D)(uv) = u\left(aD^2v + bDv + cv\right) + \\ + Du\left(aC_2^1 Dv + bEv\right) + \\ + avD^2u. \end{aligned} \tag{2.4.56}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} &u\left(aD^2v + bDv + cEv\right) = uP(D)v, \\ &Du\left(aC_2^1 Dv + bEv\right) = Du(2aDv + bEv) = DuP'(D)v, \\ &D^2u(av) = \frac{1}{2}D^2u(2av) = \frac{1}{2!}D^2uP''(D)v. \end{aligned} \tag{2.4.57}$$

Formula (2.4.53) este astfel demonstrată. ◘

2.4.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI NEOMOGENE

Conform celor spuse în paragraful anterior, deoarece în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare cu coeficienți constanți se determină întotdeauna un sistem fundamental de soluții sub formă de funcții elementare, rămâne să determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.4.58}$$

Desigur, putem aplica metoda variației constantelor, însă, în cazul coeficienților constanți, dacă termenul liber se exprimă prin funcții elementare, putem găsi metode mai simple decât aceasta.

Distingem mai multe cazuri:

A. ***Termenul liber este polinom de gradul*** *m* **în** *x*, adică