



# TEMA 6.2 CODURI HAMMING

Un cod Hamming  $(n, n_0)$  este format din cuvinte de cod cu lungimea de  $n$  simboluri, dintre care

$n_0$  simboluri sunt informaționale și

$k = n - n_0$  simboluri sunt de control.

Codul Hamming corector de o eroare are  $d_{\min} = 3$ .

Pentru a corecta presupusa eroare, utilizând  $k$  simboluri de control, este necesar a descrie  $n+1$  evenimente distincte:  $n+1 = n_0 + k + 1 \leq 2^k$

$n_0$	1	2-4	5-11	12-26	27-57
$k$	2	3	4	5	6
$n$	3	5-7	9-15	17-31	33-63

*Detectarea erorilor în codurile Hamming se bazează pe același principiu ca și în codurile cu paritate. Deosebirea constă în următoarele:*


- pozițiile de control sunt date de puteri ale lui 2;*
- fiecare simbol de control răspunde pentru paritatea anumitor simboluri informaționale.*

**Poziția 1** verifică un bit și sare 1 bit (1, 3, 5, 7, 9 etc.).

**Poziția 2** verifică 2 biți și sare 2 biți (2, 3, 6, 7, 10, 11 etc.).

**Poziția 4** verifică 4 biți și sare 4 biți (4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15 etc.).

**Poziția 8** verifică 8 biți și sare 8 biți (8-15, 24-31 etc.).



După transmiterea cuvintelor de cod, se calculează încă o dată paritatea seturilor de biți, formându-se *sindromul erorii*.

Dacă cuvintele au fost transmise fără erori, sindromul este nul.

În cazul apariției unei erori, sindromul va indica poziția ei în cuvântul transmis, iar simbolul eronat va fi corectat prin inversare.

În final, din cuvântul de cod vor fi extrase doar simbolurile informaționale.



Vom examina codul Hamming (12,8).

Un cuvânt de cod are  $n=12$  simboluri, dintre care  $n_0=8$  simboluri informaționale și  $k=n-n_0=4$  simboluri de control.

Vom nota prin  $d_i$  simbolurile informaționale și prin  $c_i$  simbolurile de control.

Se va genera un cuvânt de cod  $V$ :

$$V = \{d_{12}, d_{11}, d_{10}, d_9, c_8, d_7, d_6, d_5, c_4, d_3, c_2, c_1\}$$

Calculul simbolurilor de control:

$$c_1 = d_3 \oplus d_5 \oplus d_7 \oplus d_9 \oplus d_{11}$$

$$c_2 = d_3 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_{10} \oplus d_{11}$$

$$c_4 = d_5 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_{12}$$

$$c_8 = d_9 \oplus d_{10} \oplus d_{11} \oplus d_{12}$$

La recepționarea cuvântului de cod  $V' = \{d'_{12}, d'_{11}, d'_{10}, d'_9, c'_8, d'_7, d'_6, d'_5, c'_4, d'_3, c'_2, c'_1\}$

se va calcula sindromul erorii conform următoarelor relații:

$$s_1 = c'_1 \oplus d'_3 \oplus d'_5 \oplus d'_7 \oplus d'_9 \oplus d'_{11}$$

$$s_2 = c'_2 \oplus d'_3 \oplus d'_6 \oplus d'_7 \oplus d'_{10} \oplus d'_{11}$$

$$s_4 = c'_4 \oplus d'_5 \oplus d'_6 \oplus d'_7 \oplus d'_{12}$$

$$s_8 = c'_8 \oplus d'_9 \oplus d'_{10} \oplus d'_{11} \oplus d'_{12}$$

Sindromul erorii  $s_8s_4s_2s_1$  va fi nul, dacă cuvântul a fost transmis fără erori. În cazul apariției unei erori, sindromul va indica poziția simbolului eronat.

## EXEMPLU

Fie că este necesar a forma un cuvânt de cod pentru simbolurile informaționale  $\{1,1,0,0,1,1,1,0\}$

Poz	$d_{12}$	$d_{11}$	$d_{10}$	$d_9$	$c_8$	$d_7$	$d_6$	$d_5$	$c_4$	$d_3$	$c_2$	$c_1$
V	1	1	0	0		1	1	1		0		

$$c_1 = d_3 \oplus d_5 \oplus d_7 \oplus d_9 \oplus d_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$c_2 = d_3 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_{10} \oplus d_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$c_4 = d_5 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_{12} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$c_8 = d_9 \oplus d_{10} \oplus d_{11} \oplus d_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

Poz	$d_{12}$	$d_{11}$	$d_{10}$	$d_9$	$c_8$	$d_7$	$d_6$	$d_5$	$c_4$	$d_3$	$c_2$	$c_1$
V	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1

Poz	$d_{12}'$	$d_{11}'$	$d_{10}'$	$d_9'$	$c_8'$	$d_7'$	$d_6'$	$d_5'$	$c_4'$	$d_3'$	$c_2'$	$c_1'$
$V'$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1

Pentru a determina dacă cuvântul de cod a fost transmis corect, se va calcula sindromul erorii

$$s_1 = c_1' \oplus d_3' \oplus d_5' \oplus d_7' \oplus d_9' \oplus d_{11}' = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_2 = c_2' \oplus d_3' \oplus d_6' \oplus d_7' \oplus d_{10}' \oplus d_{11}' = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$s_4 = c_4' \oplus d_5' \oplus d_6' \oplus d_7' \oplus d_{12}' = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_8 = c_8' \oplus d_9' \oplus d_{10}' \oplus d_{11}' \oplus d_{12}' = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

Sindromul erorii  $s_8s_4s_2s_1 = (1,0,1,0)$  indică că eroarea a avut loc în poziția 10 (bitul  $d_{10}$ ).

Acest bit poate fi corectat prin inversare.



Formați cuvântul de cod pentru simbolurile informaționale {1,0,0,1,1,0,1,1}

Poz	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
V												

C1 =

C2 =

C4 =

C8 =



Determinați dacă cuvântul de cod a fost transmis corect:

Poz	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
V'	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0

Să presupunem, că la transmitere a fost recepționat un cuvânt de cod cu 2 erori:

Poz	$d_{12}'$	$d_{11}'$	$d_{10}'$	$d_9'$	$c_8'$	$d_7'$	$d_6'$	$d_5'$	$c_4'$	$d_3'$	$c_2'$	$c_1'$
$V'$	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

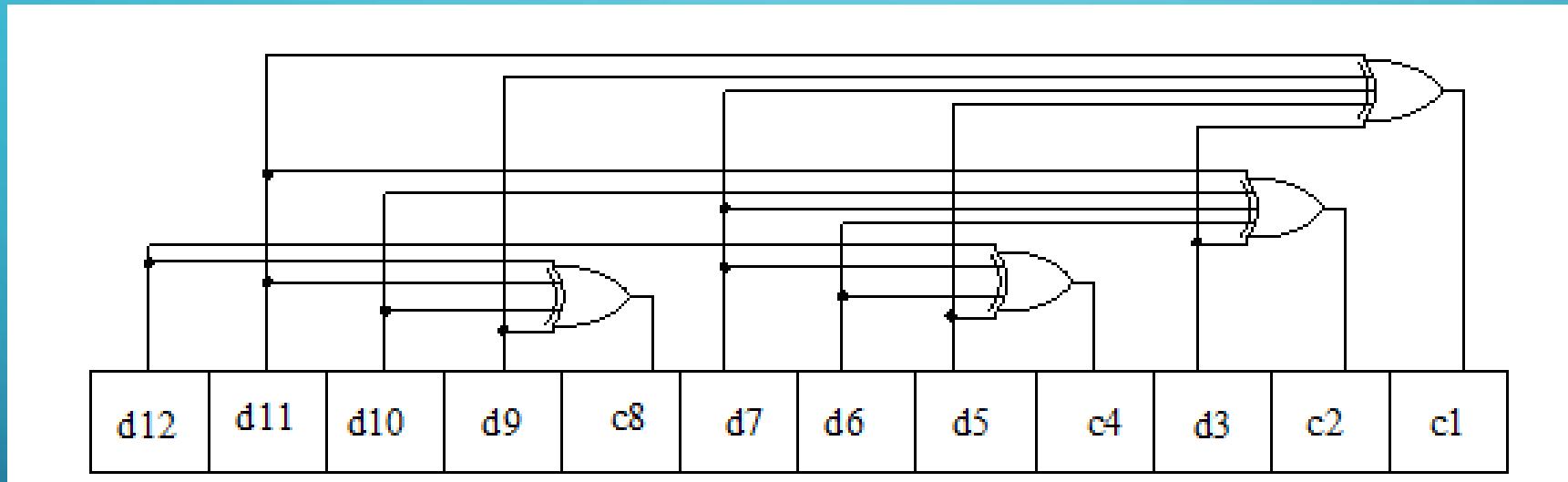
$$s_2 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$s_8 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

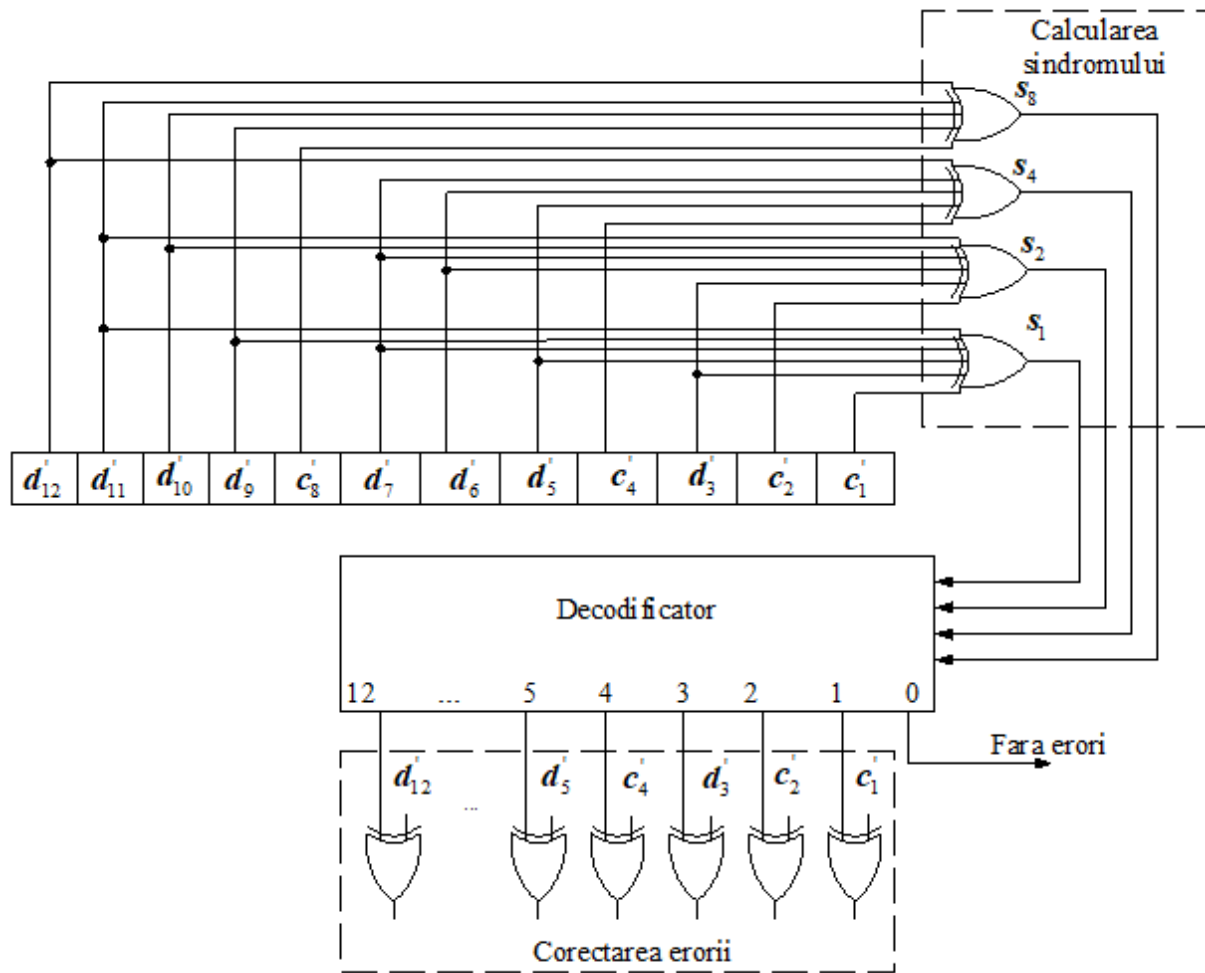
Sindromul indică eroare în poziția 4, pe când erorile au avut loc în pozițiile 2 și 6.

# CODORUL HAMMING DETECTOR ȘI CORECTOR DE O EROARE



Codorul este format dintr-un registru, care conține  $n$  circuite basculante bistabile, în care se stochează simbolurile informaționale în pozițiile corespunzătoare din cuvântul de cod și o serie de sumatoare modulo 2, care calculează simbolurile de control.

# DECODORUL HAMMING DETECTOR ȘI CORECTOR DE O EROARE



Decodorul Hamming este format dintr-un registru cu  $n$  bistabile, în care va fi memorat cuvântul recepționat,  $k$  sumatoare modulo 2, care calculează componentele sindromului și un decodificator binar cu  $k$  intrări și  $n+1$  ieșiri.

La intrările decodificatorului vor fi aplicați cei  $k$  biți ai sindromului. În dependență de semnalul activ de la ieșirea decodificatorului se va stabili dacă cuvântul de cod a fost transmis fără erori sau, în cazul unei erori, se va determina poziția acesteia. Corectarea prin inversare a simbolului eronat se va efectua prin intermediul a  $n$  sumatoare modulo 2.

# CODUL HAMMING DETECTOR DE DOUĂ ERORI ȘI CORECTOR DE O EROARE

Se adăugă un simbol suplimentar, numit semnal de *control al parității*  $c_0$ , prin care se decide dacă în cuvântul recepționat sunt două erori sau o eroare.

$$V = \{d_{12}, d_{11}, d_{10}, d_9, c_8, d_7, d_6, d_5, c_4, d_3, c_2, c_1, c_0\}$$

Simbolul suplimentar de control al parității  $c_0$  determină paritatea tuturor simbolurilor din cuvântul de cod și este calculat conform relației:

$$c_0 = d_{12} \oplus d_{11} \oplus d_{10} \oplus d_9 \oplus c_8 \oplus d_7 \oplus d_6 \oplus d_5 \oplus c_4 \oplus d_3 \oplus c_2 \oplus c_1$$

Biții  $s_8, s_4, s_2$  și  $s_1$  vor fi calculați conform relațiilor respective, iar bitul  $s_0$  conform următoarei relații:

$$s_0 = d'_{12} \oplus d'_{11} \oplus d'_{10} \oplus d'_9 \oplus c'_8 \oplus d'_7 \oplus d'_6 \oplus d'_5 \oplus c'_4 \oplus d'_3 \oplus c'_2 \oplus c'_1 \oplus c'_0$$

Criteriile de detectare a erorilor:

$S=(s_8, s_4, s_2, s_1)$	$S_0$	Erori
0	0	Erori nu sunt
$\neq 0$	1	1 eroare
$\neq 0$	0	2 erori
0	1	Eroare in $c'_0$

### **Avantaje:**

1. Costul de implementare este relativ mic. Pentru o magistrală de date de 64 biți, algoritmul dat necesită 8 biți de control, la fel cași în cazul utilizării codului cu paritate.
2. Timpul de reținere este proporțional cu  $\log_2 N$  și poate necesita încă un ciclu de citire latentă în dependență de structura circuitului de control.

**Neajunsuri:** Nu este posibil de detectat erori de rang impar, care pot fi confundate cu erori de rangul 1.

## Exemplu

Poz	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
V'	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0



## Exemplu

Poz	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
V'	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0