CAPITOLUL 6
SPAȚII EUCLIDIENE

§ 1. Spații liniare euclidiene

1.1. Definiții, exemple

În capitol precedent spațiul liniar a fost definit ca o mulțime de elemente (vectori) în care s-au definit operațiile de înmulțire cu un scalar și de adunare a vectorilor. Însă aceste operații nu sunt suficiente pentru a defini multe alte noțiuni din geometria euclidiană. De exemplu, numai cu ajutorul operațiilor de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari nu putem defini lungimea unui vector, unghiul dintre doi vectori, produsul scalar a doi vector etc. Pentru a introduce *metrica*, adică modul de a măsura *lungimi* și *unghiuri*, se va folosi produsul scalar. În mulțimea vectorilor liberi, produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul modulelor acestor vectori prin cosinusul unghiului dintre ei. Unele proprietăți ale acestui produs se vor lua ca definiție a produsului scalar într-un spațiu liniar arbitrar. Cu alte cuvinte, alegem ca noțiune fundamentală produsul scalar pe care-l definim axiomatic.

Cu ajutorul operațiilor de adunare și de înmulțire cu numere a vectorilor și cu ajutorul produsului scalar poate fi descrisă întreaga geometrie euclidiană.

DEFINIȚIA 1. Considerăm că într-un spațiu liniar real L este definit un *produs scalar*, dacă fiecărei perechi de vectori $x, y \in L$ îi corespunde un număr real, pe care-l notăm cu (x, y) și care verifică condițiile:

1° $(x, y) = (y, x)$, adică produsul scalar este simetric (comutativ);

2° $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (distributivitatea produsului scalar față de adunare);

4° produsul scalar al unui vector cu el însuși este un număr nenegativ: $(x, x) \geq 0$, și $(x, x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

Un spațiu liniar real finit dimensional, în care este definit un produs scalar se numește *spațiu euclidian*.

EXEMPLUL 1. În spațiul V_3, un produs scalar a fost definit în capitolul 1 p. 7 ca produsul dintre lungimile vectorilor și cosinusul unghiului dintre ei. Se poate arăta că axiomele 1°—4° sunt într-adevăr satisfăcute. Să se verifice.

EXEMPLUL 2. Considerăm în spațiul aritmetic $\mathbb{R}^n$ produsul scalar a doi vectori:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{și} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

prin formula
$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Este usor de verificat că axiomele 1°–3° sunt satisfăcute. Axioma 4° este de asemenea verificată, deoarece $(x, x) = \sum x_i^2 \geq 0$ și $(x, x) = \sum x_i^2 = 0$ numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Exemplul 3. Considerăm un exemplu mai general de produs scalar în $\mathbb{R}^n$.

Fie $A = ||a_{ik}||$ o matrice pătrată de ordinul n. Definim produsul scalar al vectorilor x și y prin formula:

$$\begin{aligned}(x, y) &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + \\ &+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n.\end{aligned} \tag{1}$$

Analizăm condițiile ce trebuie să verifice matricea $||a_{ik}||$ pentru ca expresia, definită prin formula (1), să satisfacă axiomele produsului scalar.

Prin verificare directă ne convingem că axiomele 2° și 3° sunt satisfăcute pentru orice matrice $||a_{ik}||$. Pentru ca axioma 1° să fie verificată, adică pentru ca expresia (x, y) să fie simetrică față de x și y, este necesar și suficient ca
$$a_{ik} = a_{ki}, \tag{2}$$
adică matricea $||a_{ik}||$ să fie simetrică.

Axioma 4° presupune ca expresia
$$(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \tag{3}$$
să fie nenegativă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și să se anuleze, numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Polinomul omogen ("forma pătratică") definit prin formula (3) se numește *pozitiv definit*, dacă ia doar valori nenegative și se anulează în cazul când toți x_i sunt nuli. Astfel, axioma 4° presupune ca forma pătratică (3) să fie pozitiv definită.

Prin urmare, o matrice $||a_{ik}||$ determină un produs scalar definit prin formula (1) dacă și numai dacă această matrice este simetrică (condiția (2)) și forma pătratică corespunzătoare este pozitiv definită.

Dacă matricea $||a_{ik}||$ este matricea unitate, adică dacă $a_{ii} = 1$ și $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, atunci produsul scalar (x, y) ia forma:
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

și obținem deci spațiul euclidian definit în exemplul 2.

Exercițiu. Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nu poate fi folosită pentru construirea unui produs scalar (forma pătratică corespunzătoare nu este pozitiv definită), iar matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definește un produs scalar.

În cele ce urmează vor fi arătate condițiile simple care dau posibilitatea să se verifice dacă o formă pătratică dată este pozitiv definită.

EXEMPLUL 4. În spațiul $C[a,b]$ al funcțiilor continue definite pe intervalul $[a,b]$ produsul scalar îl definim ca integrala produsului acestor funcții:

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Ușor se arată că produsul scalar astfel definit satisface axiomele 1°—4°.

EXEMPLUL 5. În spațiul P_n al polinoamelor de grad cel mult n definim produsul scalar a două polinoame ca în exemplul precedent:

$$(P,Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt.$$

Axiomele 1°—4° se verifică ușor.

1.2. Lungimea unui vector, unghiul dintre doi vectori

Cu ajutorul noțiunii de produs scalar, putem defini lungimea unui vector și unghiul format de doi vectori.

DEFINIȚIA 2. Numim *lungime a unui vector* x într-un spațiu euclidian numărul

$$\sqrt{(x,x)}. \tag{4}$$

Notăm lungimea vectorului x cu $|x|$. Uneori se mai numește *norma*[1] lui x sau *modulul* lui x.

Este natural ca unghiul dintre vectori, lungimea vectorului și produsul scalar să fie legați prin relația „obișnuită": produsul scalar al vectorilor să fie egal cu produsul dintre lungimile lor și cosinusul unghiului dintre ei. În această frază sensul tuturor expresiilor, cu excepția expresiei "unghiul dintre vectori", sunt deja cunoscute.

Vom descrie posibilitatea definirii noțiunii de unghi dintre vectori.

[1] Se mai notează $||x||$.

Considerăm vectorul $x - ty$, unde t este un număr real arbitrar. Conform axiomei 4° a produsului scalar:

$$(x - ty, \quad x - ty) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Apoi, folosind axiomele 1°–3°, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ are loc:

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

Trinomul de gradul al doilea în raport cu t din stânga ia numai valori nenegative. Astfel, discriminantul trinomului

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Din $(x, y)^2 \leq (x, x)\ (y, y)$, întrucât $(x, x) = |x|^2$ și $(y, y) = |y|^2$, obținem

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2|y|^2} \leq 1$$

sau echivalent:

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x||y|} \leq +1.$$

DEFINIȚIA 3. Numim unghi dintre vectorii nenuli x și y numărul

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|},$$

adică punem:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \tag{5}$$

Vectorii x și y se numesc *ortogonali*[2] dacă unghiul dintre ei este egal cu $\frac{\pi}{2}$, adică dacă

$$(x, y) = 0.$$

Un produs scalar va fi nul, dacă măcar unul dintre vectori este nul sau dacă ei sunt ortogonali. De exemplu, vectorii $a = (2, -1, 3, 4)$ și $b = (1, 7, -1, 2)$ din $\mathbb{R}^4$ sunt ortogonali, deoarece $(a,\, b) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 0$.

Cu ajutorul noțiunilor introduse mai sus o serie de teoreme din geometria elementară pot fi generalizate și în cazul spațiilor euclidiene[3]).

---

[2]Sau reciproc perpendiculari.

[3]S-ar putea desigur defini spațiul euclidian și altfel decât în § 1.1, introducând axiomatic noțiunea de lungime a vectorului și de unghi dintre vectori (și nu produsul scalar). Însă sistemul de axiome corespunzător ar fi mai complicat.

Vom analiza un caz. Dacă x și y sunt vectori ortogonali, atunci este firesc să considerăm $x + y$ drept „diagonală a dreptunghiului cu laturile x și y". Demonstrăm că

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2,$$

adică *pătratul lungimii diagonalei dreptunghiului este egal cu suma pătratelor a două dintre laturile sale neparalele* (teorema lui Pitagora).

Demonstrație. Conform definiției pătratului lungimii unui vector notăm:

$$|x + y|^2 = (x + y,\ x + y).$$

În baza distributivității produsului scalar obținem:

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

Cum vectorii x și y sunt ortogonali:

$$(x, y) = (y, x) = 0.$$

Prin urmare,

$$|x + y|^2 = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Această teoremă se poate generaliza: *dacă vectorii x, y, z, ... sunt ortogonali doi câte doi, atunci:*

$$|x + y + z + \dots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots\ .$$

Remarcă. Modulul vectorului, prin urmare și unghiul dintre doi vectori, depind de modul de definire a produsului scalar.

EXEMPLUL 6. În spațiul liniar al polinoamelor de grad strict mai mic ca 2 vom defini produsul scalar în două moduri și vom calcula modulul unuia și aceluiași vector în fiecare caz.

Cazul 1. În acest spațiu considerăm baza formată de vectorii $e_1 = 1$ și $e_2 = t$. Pentru oricare doi vectori $x = x(t) = x_1 + x_2t = x_1e_1 + x_2e_2 = (x_1,\ x_2)$ și $y = y(t) = y_1 + y_2t = y_1e_1 + y_2e_2 = (y_1,\ y_2)$ definim

$$(x,\ y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

(ca în exemplul 2). Pentru un vector concret, $x = 1 + 2t$ se obține $(x, x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$, adică $|x| = \sqrt{5}$.

Cazul 2. În același spațiu definim:

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$$

(ca în exemplul 5). Pentru vectorul $x = 1 + 2t$ se obține:

$$(x, x) = \int_0^1 (1 + 2t)^2 dt = \int_0^1 (1 + 4t + 4t^2) dt = \left(t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{3}.$$

În acest caz, $|x| = \dfrac{13\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{5}$.

1.3. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski

În § 1.2, pentru a putea defini unghiul dintre doi vectori prin formula (5), a fost demonstrată pe parcurs (printre altele) și inegalitatea:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)\ (y, y). \tag{6}$$

Această inegalitate se numește *inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski*[4]. Uneori se mai numește *inegalitatea Cauchy*, sau *inegalitatea Schwarz* sau *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*[5].

Exercițiu. Să se arate că egalitatea în inegalitatea Cauchy-Buniakovski (6) are loc atunci și numai atunci când vectorii x și y sunt liniar dependenți.

Am demonstrat inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (6) pentru spațiul euclidian definit axiomatic. Elucidăm această inegalitate în exemplele de spații euclidiene considerate mai sus (§ 1.1).

EXEMPLUL 7. În V_3 (a se vedea exemplul 1), inegalitatea (6) nu înseamnă nimic nou. În acest exemplul nu este necesar să se demonstreze această inegalitate. Într-adevăr, în virtutea definiției produsului scalar adoptată în calculul vectorial, mărimea $\dfrac{(x, y)}{|x||y|}$ este cosinusul unui unghi dintre vectori dinainte definiți, de aceea ea nu este mai mare decât 1, în valoare absolută.

[4] Augustin-Louis Cauchy, matematician, inginer și fizician francez, 1789–1857; Victor Buniakovski, matematician rus, 1804–1889.

[5] Inegalitatea pentru sume a fost publicată de Augustin Louis Cauchy în 1821, iar inegalitatea corespunzătoare pentru integrale a fost formulată de Viktor Iakovlevici Buniakovski în 1859 și a fost redescoperită de Hermann Schwarz în anul 1888. Hermann Schwarz, matematician german, 1843–1921.

EXEMPLUL 8. În exemplul 2, produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ este definit prin formula:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Astfel obținem:

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad (y, y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Prin urmare, inegalitatea (6) Cauchy-Buniakovski are forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

EXEMPLUL 9. În exemplul 3, produsul scalar are forma:

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$$

cu condițiile:

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{7}$$

și

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \geq 0 \tag{8}$$

pentru orice x_i. De aceea, inegalitatea (6) Cauchy-Buniakovski înseamnă:

Dacă numerele a_{ik} satisfac condițiile (7) și (8) atunci

$$\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k\right)\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k\right).$$

EXEMPLUL 10. În spațiul liniar $C[a, b]$ cu produsul scalar definit prin $g(t) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ inegalitatea (6) Cauchy-Buniakovski ia forma:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt.$$

Această inegalitate joacă un rol important în diferite domenii aplicative.

Vom prezenta o inegalitate care este o consecință a inegalității Cauchy-Buniakovski.

Pentru oricare doi vectori x și y dintr-un spațiu euclidian L are loc inegalitatea:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{9}$$

numită *inegalitatea triunghiului* (sau inegalitatea lui Minkowski[6]).

DEMONSTRAŢIE. Din

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y),$$

întrucât, conform inegalității Cauchy-Buniakovski,

$$2(x,y) \leq 2|x||y|,$$

rezultă:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) \leq (x,x) + 2|x||y| + (y,y) = (|x|+|y|)^2,$$

adică $|x+y| \leq |x| + |y|$, ce trebuia demonstrat. (A se vedea de asemenea §2, pag. 192).

Exercițiu. Să se scrie inegalitatea triunghiului pentru fiecare dintre spațiile euclidiene considerate în exemple 1–5.

În geometrie, distanța între două puncte x și y se definește[7] ca lungimea vectorului $x - y$. În caz general al spațiului euclidian $n-$dimensional, **distanța** *dintre x și y* **se definește** *prin formula:*

$$d = |x - y|.$$

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. În mulțimea V_3 a vectorilor liberi se definește produsul a doi vectori ca produsul modulelor lor. Va fi acesta un produs scalar?

2. În mulțimea V_3 produsul a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se definește ca produsul dintre modulul vectorului $\bar{a}$ și proiecția vectorului $\bar{b}$, înmulțită cu 2, pe

---

[6] Hermann Minkowski, matematician german (1864–1909) născut în Aleksotas, Imperiul Rus, astăzi Kaunas, Lituania; a folosit metode geometrice pentru a rezolva probleme dificile în teoria numerelor, fizica matematică și teoria relativității.

[7] Vom însemna cu aceeași literă vectorul și punctul care indică extremitatea lui. Vectorii îi ducem din originea sistemului de coordonate, (a se vedea Notă la pag. 7 în capitolul §1).

direcția vectorului $\bar{a}$. Va fi acesta un produs scalar?

3. Să se determine dacă produsul scalar în $\mathbb{R}^2$ poate fi definit prin formula:
a) $(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2$;
b) $(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$;
c) $(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;
d) $(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$;
unde $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:
a) $v_1 = (1, -1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 2, -1, 4, 1)$ în $\mathbb{R}^5$;
b) $v_1 = (1, -1, -1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (2, -2, -3, 3, 2, 1)$ în $\mathbb{R}^6$.

5. Să se afle modulul vectorului:
a) $a = (3, -1, -3, 9)$;
b) $b = (-2, 1, -3, 2, 5)$.

6. Să se normeze vectorii $v_1 = (3, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1, 2)$, $v_3 = (-2, 3, -5, -1)$, $v_4 = (6, 0, -3, -6)$ în $\mathbb{R}^4$.

7. În spațiul $\mathbb{R}^4$ sunt dați vectorii x și y. Să se afle unghiul dintre ei:
a) $x = (4, 1, -2, 2)$ și $y = (1, -3, 3, 9)$;
b) $x = (3, -2, 2, -1)$ și $y = (-2, 4, -2, 0)$;
c) $x = (-1, 3, 0, -2)$ și $y = (2, -1, -1, 1)$;
d) $x = (-2, -2, 2, 0)$ și $y = (1, -1, -3, -1)$.

8. În spațiul $\mathbb{R}^5$ sunt dați vectorii $u = (1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ 3)$ și $v = (1, 0, 0, 0, 0)$. Să se afle unghiul dintre ei.

9. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ vectorii dați x și y sunt reciproc perpendiculari:
a) $x = (m,\ 3,\ -1,\ 2)$ și $y = (1,\ m,\ 2,\ 5)$;
b) $x = (m,\ 2,\ m + 2,\ -2)$ și $y = (m + 2,\ m,\ -1,\ 4)$?

10. Să se determine pentru care $a, b, c \in \mathbb{R}$ unghiul dintre vectorii $m = (a + 3,\ b, -2,\ 3)$ și $n = (5, -1, -2,\ c - 2)$ este nul? Există oare a, b, c astfel încât unghiul dintre vectorii m și n este π?