18. $L_1 = Lin(u_1, u_2)$, $L_2 = Lin(v_1, v_2)$, $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$.

19. Fie $n \geq 1$ un număr natural și P_n mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult n. Se cere:

a) să se demonstreze că în raport cu operațiile de adunare a polinoamelor și înmulțire a unui polinom cu un scalar real, P_n este un spațiu liniar real de dimensiune $n + 1$;

b) să se demonstreze că pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat, mulțimea $B = \{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\}$, este o bază a spațiului vectorial P_n;

c) dacă $f(x) \in P_n$ este un polinom arbitrar, să se deducă egalitatea $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ (ultima se numește formula lui Taylor pentru polinoame).

§ 3. Transformarea coordonatelor la o schimbare a bazei

Într-un spațiu liniar există mai multe baze, iar coordonatele oricărui vector depind de baza aleasă. Cum se schimbă coordonatele vectorului la trecerea de la o bază la alta?

Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ două baze ale spațiului n-dimensional L. Presupunem că vectorii e'_i sunt exprimați prin vectorii primei baze prin formulele:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n, \end{cases} \tag{1}$$

Definim matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ale căreia coloane sunt coordonatele vectorilor $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ în baza B.

Matricea A se numește *matricea de trecere* de la baza B la baza B'. Această matrice este nedegenerată, adică $\det A \neq 0$. În caz contrar, vectorii bazei B' ar fi liniar dependenți.

Este adevărată și afirmația inversă: oricare matrice pătrată și nedegenerată de ordinul n este o matrice de trecere de la o bază la alta într-un spațiu.

Matricea de trecere de la o bază la altă este suficientă pentru a determina coordonatele oricărui vector în baza nouă, cunoscând coordonatele lui în baza veche.

Notăm cu x_i coordonatele vectorului x în baza B și cu x'_i coordonatele lui în baza B'. Obținem:

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \\ x &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n = (x'_1,\, x'_2,\, \ldots,\, x'_n). \end{aligned}$$

Folosind (1), obținem:

$$\begin{aligned} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_n e_n \quad &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \ldots x'_n e'_n = \\ &= x'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \\ &+ x'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \\ + \ldots \quad &+ x'_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) = \\ &= (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n)e_2 + \\ + \ldots \quad &+ (a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n)e_n. \end{aligned}$$

Deoarece un vector se descompune după vectorii bazei în mod unic, obținem:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n, \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n, \end{cases} \tag{2}$$

adică coordonatele x_i ale vectorului x în prima bază se exprimă prin coordonatele aceluiași vector x în baza a doua cu ajutorul transpusei matricei A.

Formulele obținute exprimă coordonatele „vechi" ale vectorului x prin cele „noi". Evident, pentru aceasta sunt suficienți doar coeficienții matricei de trecere A. Formulele (2) pot fi scrise sub formă matriceală:

$$X = A \cdot X', \tag{3}$$

unde:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Pentru a exprima coordonatele vectorului x în baza B' prin cele din baza B, este suficient a rezolva ecuația matriceală (3) în raport cu X':

$$X' = A^{-1} X. \tag{4}$$

Acest rezultat se poate formula și altfel. Rezolvăm ecuațiile (2) relativ la $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Obținem:

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x'_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n, \end{aligned}$$

unde b_{ik} sunt elementele matricei inverse matricei A'. Prin urmare, *coordonatele vectorului se transformă cu ajutorul matricei $B = ||b_{ik}||$, care este inversa lui A', unde A' este transpusa matricei A, care definește transformarea bazei.*

EXEMPLUL 1. În spațiul $\mathbb{R}^2$ se trece de la baza canonică $B = \{e_1, e_2\}$ cu $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ la baza $B' = \{e'_1, e'_2\}$ cu $e'_1 = (2,1)$, $e'_2 = (3,2)$:

a) să se exprime vectorii bazei B' prin vectorii bazei vechi B;

b) să se scrie matricea respectivă de trecere de la baza B la B';

c) să se exprime coordonatele unui vector x în baza B prin cele din baza B';

d) și invers, să se exprime coordonatele în baza B' a vectorului x prin cele în baza B.

Rezolvare. a) Coordonatele noi ale vectorilor e'_1, e'_2 se scriu în mod evident:

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2, \\ e'_2 = 3e_1 + 2e_2. \end{cases}$$

b) Matricea de trecere de la baza B la baza B' este $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Coordonatele vectorului e'_1 formează prima coloană a matricei, iar coordonatele lui e'_2 formează coloana a doua.

c) Conform (2), se exprimă coordonatele vechi x_1, x_2 prin cele noi:

$$\begin{cases} x_1 = 2x'_1 + 3x'_2, \\ x_2 = x'_1 + 2x'_2. \end{cases}$$

d) Pentru a exprima coordonatele „noi" ale vectorului x prin cele „vechi", se poate aplica una din două metode: rezolvând sistemul de la p. c) în raport cu necunoscutele x'_1, x'_2 (folosind formulele lui Cramer sau metoda lui Gauss), sau aplicând formula (4). Vom folosi metoda a doua. Fie

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Conform (4), $X' = A^{-1}X$. Matricea inversă a lui A este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2, \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Exemplul 2. În planul de coordonate Oxy considerăm spațiul liniar $\mathbb{R}^2$ cu baza canonică $e_1 = \bar{i} = (1, 0)$ și $e_2 = \bar{j} = (0, 1)$. Vom roti sistemul de coordonate cu un unghi pozitiv φ și fie e'_1, e'_2 (fig. 3) baza nouă a spațiului. Aflăm coordonatele acestor vectori: $e'_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, adică:

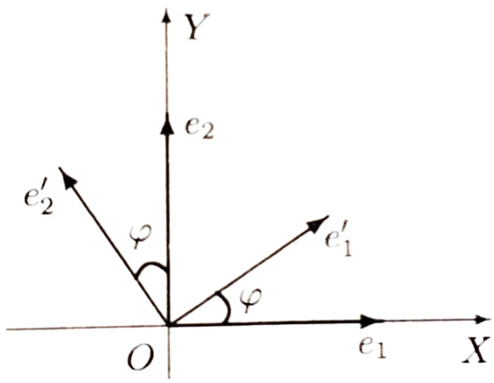

Figura 3. Rotirea cu un unghi pozitiv φ

$$e'_1 = \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2.$$

În mod similar $e'_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, adică:

$$e'_2 = -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2.$$

Matricea de trecere de la baza B la baza B' este:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Conform (2), exprimăm coordonatele „vechi" (x_1, x_2) ale vectorului arbitrar x prin cele „noi" (x'_1, x'_2):

$$x_1 = \cos\varphi \cdot x'_1 - \sin\varphi \cdot x'_2,$$
$$x_2 = \sin\varphi \cdot x'_1 + \cos\varphi \cdot x'_2.$$

Pentru a obține formulele de trecere inversă, de la coordonatele noi (x'_1, x'_2) la cele vechi, folosim egalitatea matriceală:

$$X' = A^{-1}X, \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Se află matricea inversă $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, prin urmare:

$$X' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot x_2 \\ -\sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot x_2, \\ x'_2 &= -\sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2. \end{aligned}$$

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. În spațiul $\mathbb{R}^3$ se trece de la baza

$$e_1 = (1,0,0), \ e_2 = (0,1,1), \ e_3 = (0,0,1) \ \text{ la baza}$$
$$e'_1 = e_2 + e_3, \ e'_2 = e_1 + e_3, \ e'_3 = e_1 + e_2.$$

Se cere:

a) să se afle matricea de trecere;

b) să se exprime coordonatele vechi ale oricărui vector prin coordonatele noi;

c) și invers, să se exprime coordonatele noi ale oricărui vector prin cele vechi.

2. Matricea de trecere de la baza $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (0,0,1)$ la baza e'_1, e'_2, e'_3 în spațiul liniar $\mathbb{R}^3$ are forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se exprime coordonatele bazei noi e'_1, e'_2, e'_3 prin vectorii e_1, e_2, e_3.

b) Să se exprime coordonatele vechi ale oricărui vector x prin coordonatele noi.

c) Să se exprime coordonatele noi ale unui vector x prin cele vechi.