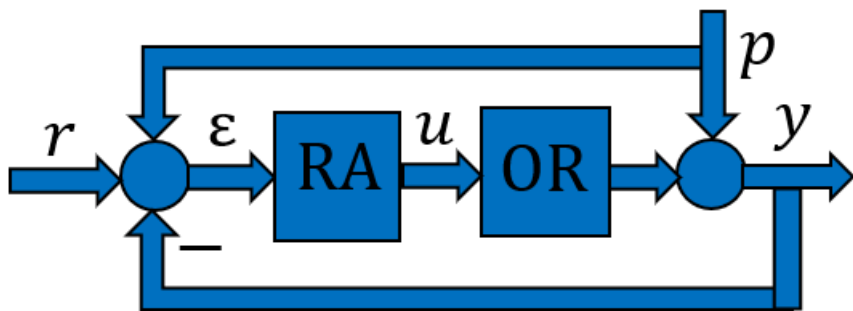


UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

INGINERIA SISTEMELOR AUTOMATE



Chișinău 2023

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
FACULTATEA DE CALCULATOARE INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ

DEPARTAMENTUL DE INGINERIA SOFTWARE ȘI
AUTOMATICĂ

INGINERIA SISTEMELOR AUTOMATE

Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2023

CZU 681.5(075.8)

I-99

În suportul de curs la Ingineria sistemelor automate sunt expuse principiile și metode de proiectare a sistemelor automate continue și discrete la acțiunea semnalelor de intrare referință și perturbație în baza transferului intrare-ieșire.

Se prezintă modele intrare-ieșire de algoritmi și structuri convenționale de reglare, structuri de sisteme de reglare pentru procese lente, modelarea sistemelor numerice și algoritmi de reglare numerică în forma intrare-ieșire, proiectarea algoritmilor numerici în domeniului timpului, algoritmi de acordare a reguletoarelor în sisteme multivariabile și implementarea algoritmilor numerici.

Suportul de curs conține introducere, 9 capitole, bibliografie și 3 anexe. Sunt analizate exemple de proiectare a algoritmilor continui și numerici.

Materialul didactic este destinat studenților care studiază la Programul de studii 0714.6 Automatică și Informatică, dar poate fi utilizat și de studenții altor specialități pentru aprofundarea cunoștințelor în domeniul Ingineriei sistemelor automate.

Autor: conf. univ., dr. B. Izvoreanu

Recenzent:

**DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII
Izvoreanu, B.**

Ingineria sistemelor automate. Material didactic.
Univ. Tehn. a Moldovei, Fac. Calculatoare, Informatică și
Microelectronică. Departamentul de Ingineria Software și
Automatică. Chișinău: Tehnica-UTM, 2022, 298 p.

Bibliogr. p. 293-294 (20 tit.) -50 ex.

ISBN 978-606-515-689-0

681.5(075.8)

I 99

Redactor: _____

Bun de tipar

Hârtie ofset. Tipar RISO

Coli de tipar

Formatul

Tirajul 50 ex.

Comanda

2004, UTM, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168

Editura „Tehnica-UTM”

2068 Chișinău, str. Studenților, 9/9

ISBN 978-9975-45-331-8.

© UTM, 2023

CUPRINSUL

INTRODECERE	6
1 NOȚIUNILE DE BAZĂ ALE INGINERIEI SISTEMELOR AUTOMATE	8
1.1 Structuri de sisteme de reglare automată.....	8
1.2 Formularea problemei de proiectare a sistemului de reglare automată	10
1.3 Modelul matematic al procesului condus și proprietățile lui	10
1.4 Performanțele sistemului de reglare automată.....	19
1.5 Eroarea staționară a sistemului automat	21
1.6 Criteriile integrale pentru aprecierea performanțelor sistemului automat	23
1.7 Metode de proiectare a sistemelor de reglare automată	24
2 ALGORITMI ȘI STRUCTURI CONVENȚIONALE DE REGLARE	25
2.1 Legile de reglare tipice	25
2.2 Algoritmi PID modificați cu două grade de libertate	26
2.3 Structura regulatorului real	28
2.4 Proiectarea sistemelor monovariabile pe baza funcțiilor de transfer	29
2.5 Relațiile modelului matematic al sistemului de ordinul doi și performanțele lui	32
2.6 Repartizarea poli-zeroouri ai funcției de transfer $H_0(s)$ și a imaginii semnalului $R(s)$	34
2.7 Proiectarea sistemului prin metoda alocării poli-zeroouri	34
2.8 Sinteza algoritmilor de reglare în sisteme monovariabile pe bazaindicatorilor de performanță	37
2.9 Proiectarea sistemului pe baza funcțiilor de transfer $H_0(s)$ și $H_d(s)$	39
2.10 Sinteza algoritmilor de reglare prin metoda	

alocării poli-zerouri	44
2.11 Proiectarea sistemului automat în raport cu perturbația	46
2.11 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese rapide	49
2.12.1 <i>Introducere</i>	49
2.12.2 <i>Criteriul modulului</i>	49
2.12.3 <i>Criteriul simetriei</i>	51
2.13 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese lente	52
2.14 Alegerea și acordarea reguletoarelor prin metode experimentale	53
2.14.1 <i>Metode empirice</i>	53
2.14.2 <i>Criteriile experimentale de acordare a reguletoarelor</i>	55
2.14.3 <i>Metoda Ziegler–Nichols</i>	55
2.15 Acordarea reguletoarelor prin utilizarea criteriilor integrale	56
2.16 Metoda gradului maximal de stabilitate al sistemului automat	61
3 STRUCTURI DE SISTEME AUTOMATE	
PENTRU PROCESE LENTE	69
3.1 <i>Introducere</i>	69
3.2 Structura sistemului automat cu două grade de libertate	69
3.3 Structura sistemului automat de reglare combinată	70
3.4 Structura sistemului automat de reglare în cascadă	72
3.5 Structura sistemului de reglare automată cu predictor Smith	74
4 MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR	
NUMERICE DE REGLARE AUTOMATĂ	78
4.1 Modelarea blocurilor din structura sistemului numeric monovariabil	78
4.2 Modelarea sistemului numeric ca sistem	

continuu cu eșantionare	80
4.3 Modelarea sistemului numeric ca sistem discret	82
4.4 Modele discrete ale sistemelor multivariabile	83
4.5 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-ieșire...	84
4.6 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-stare-ieșire	88
4.7 Criterii de performanță utilizate în reglarea numerică...	89
4.7.1 <i>Criteriile locale de performanță</i>	89
4.7.2 <i>Criterii globale de performanță</i>	90
5 ALGORITMI DE REGLARE NUMERICĂ	
DERIVAȚI DIN LEGI DE REGLARE CONTINUE	92
5.1 Introducere	92
5.2 Filtrarea numerică de întârziere de ordinul întâi	92
5.3 Algoritmul de avans-întârziere numeric	93
5.4 Algoritmii bipoziționali și tripoziționali	93
5.4.1 <i>Algoritmul bipozițional</i>	93
5.4.2 <i>Algoritmul tripozițional</i>	94
5.5 Algoritmi numerici de reglare	95
5.5.1 <i>Algoritmul PID numeric de poziție și incremental.</i> 95	
5.5.2 <i>Algoritmul PID cu filtrate</i>	98
5.5.3 <i>Algoritmul PID modificali</i>	101
5.6 Optimizarea parametrilor de acord ai regulatorului	102
5.6.1 <i>Optimizarea parametrilor regulatorului</i> <i>utilizând un model al procesului</i>	102
5.6.2 <i>Optimizarea pe baza ecuației caracteristice a</i> <i>sistemului închis</i>	103
5.6.3 <i>Pe baza unor reguli de acordare</i>	105
5.7 Alegerea optimă a perioadei de eșantionare	107
5.8 Funcții suplimentare ale regulatorului PID numeric....	109
5.8.1 <i>Metode antisaturație</i>	109
5.8.2 <i>Comutarea manual–automat</i>	110
5.9 Autoacordarea reglatoarelor PID	111
5.9.1 <i>Preliminarii</i>	111
5.9.2 <i>Metode bazate pe răspunsul indicial</i>	112
5.9.3 <i>Metode bazate pe caracteristicile oscilațiilor</i>	

<i>la limita de stabilitate</i>	113
5.9.4 Acordarea cu metoda Ziegler-Nichols	114
5.9.5 Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate	114
6. PROIECTAREA SISTEMULUI NUMERIC DUPĂ	
METODA INTRARE-IEȘIRE	117
6.1 Preliminarii	117
6.2 Proiectarea SNRA monovariabile prin	
metoda alocării	117
7 PROIECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE	
REGLARE ÎN DOMENIUL TIMPULUI	124
7.1 Introducere	124
7.2 Metoda timpului finit	124
7.2.1 Metoda răspunsului impus-algoritmul normal	124
7.2.2 Metoda răspunsului impus-algoritmul extins	131
7.2.3 Alegerea perioadei de eșantionare	135
7.2.4 Metoda timpului minim	135
8 PROIECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE	
REGLARE PENTRU PROCESE MULTIVARIABILE	136
8.1 Modele matematice ale proceselor multivariabile	137
8.2 Algoritmi de reglare a proceselor multivariabile	136
8.3 Acordarea optima a regulatorului monovariabile	
pentru procese multivariabile	139
8.4 Conducerea noninteractivă a proceselor	
multivariabile	143
8.4.1 Structurari noninteractive de sisteme	
multivariabile	143
8.4.2 Decuplarea sistemului multivariabil	
în circuit deschis	144
8.4.3 Structura de reglare noninteractivă pentru	
procesele în forma canonică P_{cu} reglatoare	
de decuplare în forma canonică V	145
8.4.4 Structura de reglare noninteractivă pentru	
procesele în forma canonică V cu reglatoare	
de decuplare în forma canonică P	147
8.4.5 Decuplarea sistemului multivariabil	

<i>în circuit închis</i>	148
8.4.7 <i>Decuplarea sistemului multivariabil cu regulator pe calea de reacție</i>	149
9 IMPLEMENTAREA ALGORITMILOR NUMERICI	153
9.1 Structuri de implementare a algoritmului PID numeric	153
9.2 Comutare manual – automat	153
9.3 Implementera unui algoritm recurent de ordinul doi ...	155
9.4 Implementera unui algoritm structurat pe module	157
9.5 Modele de Comanda generală	158
9.6. Regulatorul PID de tip RST	160
BIBLIOGRAFIE	161
ANEXE	162

1 NOȚIUNILE DE BAZĂ ALE INGINERIEI SISTEMELOR AUTOMATE

1.1 Structuri de sisteme de reglare automată

Se consideră structura sistemului de reglare automată dată în fig. 1.1 alcătuită din elementele din canalul direct: amplificatorul (EA) cu f.d.t. $H_A(s)$, elemental de execuție (EE) cu f.d.t. $H_E(s)$, procesul (P) cu f.d.t. $H_P(s)$, iar în canalul de reacție traductorul (Tr) cu f.d.t. $H_{tr}(s)$. Asupra sistemului acționează semnalele de referință $r(s)$ și perturbația $p(s)$. Mărimea $u(s)$ este mărimea de conducere, $y(s)$ – mărimea de ieșire (condusă/reglare), $\varepsilon(s)$ – eroarea sistemului, $y_r(s)$ – semnalul reacției.

Structura prezentată a sistemului este alcătuită din minimum de elemente funcționale necesare pentru funcționarea lui și este numită structură convențională a sistemului de reglare automată [1-4, 8-13, 17, 18].

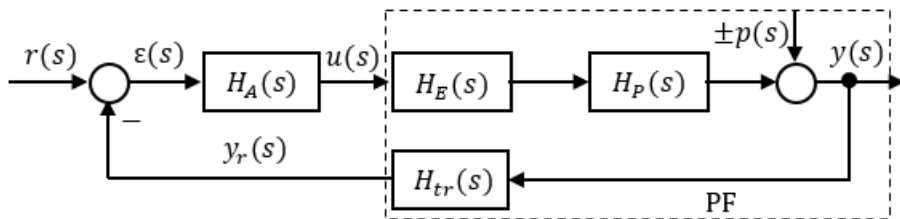


Fig. 1.1. Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată

În procesul de funcționare al sistemului automat, ansamblul din elementul de execuție EE, procesul condus P și traductorul Tr nu își modifică parametrii și, atunci acest ansamblu este numit partea fixată PF (în fig. 1.1 PF este încadrată într-un dreptunghi cu linie întreruptă) a sistemului cu f.d.t. echivalentă a conexiunii în serie:

$$H_{PF}(s) = H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s). \quad (1.1)$$

Se admite cazul când semnalul perturbației $p(s) = 0$ și sistemul este supus numai acțiunii

semnalului de referință.

Conceptual structura sistemului automat din fig.1.1 poate să nu corespundă cerințelor de stabilitate și performanțelor impuse sistemului. Din aceste considerente este strict necesar ca în structura sistemului de introdus elemente noi, conectate în modul corespunzător pentru a realiza cerințele impuse sistemului.

Există două posibilități de proiectare a structurii sistemului de reglare automată.

1. În structura sistemului automat se introduc elemente de corecție conectate în modul corespunzător.

2. În structura sistemului cu partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ se substituie amplificatorul cu f.d.t. $H_A(s)$ cu regulatorul automat cu f.d.t. $H_R(s)$ și se obține structura sistemului dată în fig. 1.2.

Ambele structuri ale sistemului sunt echivalente și au același scop de a realiza sistemul stabil și cu performanțele impuse.

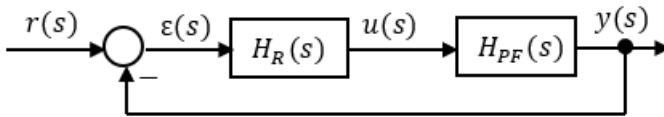


Fig. 1.2. Schema structurală a sistemului de reglare automată

În continuare se considera structura sistemului de reglare automată dată în fig. 1.2, care va fi utilizată la sinteza sistemului automat.

Structura sistemului din fig. 1.2 funcționează în baza reacției negative, care stabilizează regimul funcționării sistemului, ridică robustețea și rejectează acțiunea perturbațiilor măsurate. În sistem automat se determină eroarea (abaterea) între semnalul referinței (ca semnal etalon) și semnalul mărimii măsurate a ieșirii sistemului:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t), \quad (1.2)$$

care are rolul decizional.

Regulatorul este un element dinamic care în baza erorii elaborează mărimea de conducere (reglare):

$$u(t) = f(\varepsilon(t)). \quad (1.3)$$

Elaborarea conducerii (deciziei) presupune cunoașterea apriorică a mărimilor exogene (referința și perturbația), ceea ce conduce la prezența în structura sistemului a unei copii a acestui model, numit model intern.

Definiție. Conducerea (reglarea) automată este un proces sistemic decizional pe baza erorii, evoluând în mod automat, duce la anularea erorii staționare $\varepsilon = 0$.

În sistemele de urmărire funcția de reglare – anularea erorii este urmărirea cât mai fidelă de către mărimea de ieșire $y(t)$ a sistemului a referinței.

În sistemele de rejecție a perturbațiilor se asigură menținerea constantă (la o valoare precisă), independent de perturbații, a mărimei de ieșire a sistemului. În cazul măsurării perturbațiilor, Decizia în sistem de rejecție a perturbațiilor măsurabile se realizează pe baza măsurări acestora.

În cazul prezentat eroarea sistemului se prelucrează cu cea mai elementară structură de regulator. Structuri flexibile de reglatoare se obțin atunci când se prelucrează decizional, diferențiat semnalele referinței $r(t)$, mărimei de ieșire $y(t)$, erorii $\varepsilon(t)$ și perturbației $p(t)$, obținând structuri de reglatoare cu multiple grade de libertate, care pot asigura o evoluție dorită a sistemului proiectat atât în raport cu referințele, cât și în raport cu perturbațiile.

În rezultatul proiectării sistemului automat la o referință constantă, acesta trebuie să fie fizic realizabil, stabil și robust la variația parametrilor obiectului condus și să asigure performanțele impuse în regimul tranzitoriu și staționar.

La etapa actuală sistemele moderne de conducere a diverselor procese larg utilizează și implementează algoritmi de conducere pe cale numerică. Ca rezultat, în structura sistemului se utilizează diverse echipamente numerice care prelucrează informația din canalele sistemului automat [1-4, 8-13, 17, 18]. O structura generalizată a sistemului numeric de reglare automată se dă în fig. 1.3.

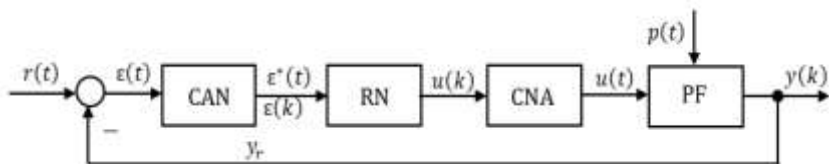


Fig. 1.3. Schema bloc funcțională a sistemului numeric de reglare automată

În schema bloc funcțională (fig. 1.3) sunt utilizate însemnările: PF este ansamblul din elementul de execuție, procesul și traductorul care funcționează în domeniul timpului continuu, CAN – convertorul analog-numeric, care convertește semnalul continuu al erorii $\varepsilon(t)$ în semnal discret $\varepsilon^*(t)$; RN – regulatorul numeric, care în baza erorii $\varepsilon^*(t)$ elaborează algoritmul de conducere în formă discretă $u(k)$, unde $t = kT|_{T=1} = k$, k este timpul în momentul eșantionării (discretizării) și prezintă șirul numerelor reale $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, T este perioada de eșantioare; CNA – convertorul numeric-analog, care convertește semnalul discret de conducere $u(k)$ în semnalul continuu de conducere $u(t)$ și, în continuare, transmis elementului de execuție. Astfel, se realizează conducerea numerică cu procesul. Funcționarea elementelor CAN, RN și CNA se sincronizează cu ajutorul unui ceas.

Algoritmul de reglare $u(k)$ se sintetizează după careva metode și poate fi realizat pe suport tehnic sau prin programare.

1.2 Formularea problemei de proiectare a sistemului de reglare automată

Pentru sinteza unui sistem de reglare automată se impune definirea obiectivelor și cerințelor de performanță necesare în alegerea unei soluții optime de automatizare a procesului condus.

În continuare, se presupune sinteza unui algoritm de conducere/reglare (numit și regulator).

Sinteza unui algoritm de conducere presupune parcurgerea a trei etape [1-3]:

1. Sinteza modelului optimal al regulatorului.

2. Sinteza structurii optimale de realizare a modelului optimal al regulatorului.

3. Sinteza parametrilor optimali ai regulatorului, care mai este numită acordarea parametrilor de acord ai regulatorului.

Pornind de la structura sistemului din fig. 1.2, se formulează problema de proiectare a algoritmului de conducere/reglare (a regulatorului) ce prezintă o procedură de parcurgere a următoarelor etape.

1. Se dă modelul matematic al procesului condus în forma funcției de transfer.

2. Se impun performanțele sistemului automat proiectat (sintetizat).

3. Pornind de la modelul obiectului și performanțele date, în baza unor proceduri se construiește funcția de transfer a sistemului automat închis:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, m \leq n. \quad (1.4)$$

4. Se sintetizează algoritmul de conducere din (1.4) în forma funcției de transfer:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, m_q \leq n_p. \quad (1.5)$$

5. Verificarea realizabilității algoritmilor de conducere sintetizați și analiza condițiilor de implementare pe suport tehnic. Algoritmul de conducere elaborat pentru un sistem automat este util și eficient, dacă este implementabil pe suport tehnic cu erori minime. Se alege echipamentul tehnic care asigură implementarea cât mai precisă a algoritmului de conducere.

6. Validarea soluției obținute prin simulare. Se validează soluția analizând analiza performanțele sistemului de reglarea automată implementat pe procesul condus.

Dacă performanțele analizate corespund cerințelor impuse, atunci procedura de proiectare s-a realizat. În caz contrar, se reia

procedura de proiectare cu acordarea parametrilor regulatorului pe procesul în funcțiune.

1.3 Modelul matematic al procesului condus și proprietățile lui

În practică există diverse tipuri de procese industriale, tehnologice, instalații tehnologice, mașini etc., care produc diferite bunuri materiale și diverse servicii în domeniul activității umane. Procesele pot fi clasificate după mai multe criterii: staționare, nestaționare, termice, electrice, chimice etc.

Din diversitatea proceselor tehnologice se pot evidenția un număr redus de procese simple tipice, care prin combinarea acestora se obțin procese complexe în industrie (nu se referă la procese chimice și biologice) [2-4, 13-21]:

1. Procese mecanice:
 - 1.1. Procese cu viteză liniară.
 - 1.2. Procese cu viteză unghiulară.
2. Procese termice și de difuzie:
 - 2.1. Procese de încălzire și răcire.
 - 2.2. Procese de uscare și umezire.
 - 2.3. Procese de evaporare.
 - 2.4. Procese de dizolvare.
 - 2.5. Procese de precipitare (depunere) din suspensii.
3. Procese pneumo-hidraulice:
 - 3.1. Procese de umplere/golire a rezervorului cu granule.
 - 3.2. Procese de umplere/golire a rezervorului cu gaze.
 - 3.3. Procese de umplere/golire a rezervorului cu lichid.

În calitate de parametri tehnologici care determină starea procesului se utilizează: temperatura, debit, presiune, nivel, concentrație etc.

Se evidențiază procese simple și complexe. Procesele simple se prezintă dintr-o capacitate, iar cele complexe – din mai multe capacități în care evoluează procesul.

Se prezintă exemple de procese industriale și tehnologice.

1. Se consideră un recipient tehnologic de acumulare a lichidului (fig. 1.4) cu secțiunea transversală S , în care prin conducta C_1 curge fluxul Q_1 , iar prin conducta C_2 se extrage fluxul Q_2 și, în rezultat, se acumulează o cantitate de lichid de volumul V , mărimea de ieșire.

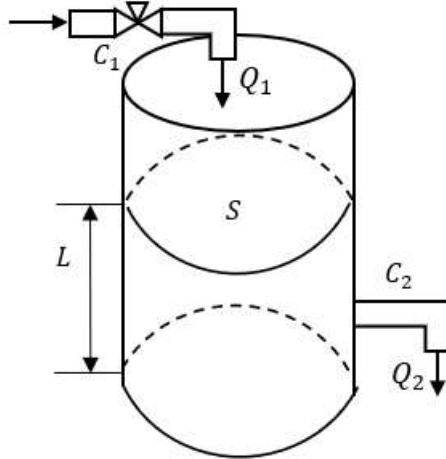


Fig. 1.4. Recipient tehnologic

Pentru descrierea dinamicii acestui proces de acumulare a lichidului în recipient se aplică legea bilanțului material care se exprimă în forma:

$$S\Delta L = (Q_1(t) - Q_2(t))\Delta t, \quad (1.6)$$

sau

$$S \frac{dL(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) = \Delta Q(t) = Q(t), \quad (1.7)$$

unde S este secțiunea transversală, m^2 , L – nivelul lichidului acumulat, m este mărimea de ieșire, Q este abaterea ca mărime de intrare.

2. Se consideră o masă m , care este necesar de a fi pusă în mișcare. Asupra masei acționează forța P_1 , iar forța de rezistență este forța de frecare P_2 , mărimea de ieșire va fi viteza de mișcare v .

Pentru descrierea dinamicii acestei mase se aplică legea lui Newton care are forma:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = P_1(t) - P_2(t) = \Delta P(t) = P(t), \quad (1.8)$$

unde m este masa, kg, v – viteza de mișcare, m/s, ΔP – este abaterea.

3. Se consideră un motor ideal simbolic prezentat în fig. 1.5 cu simbolizările: mărimea de intrare $r(t)$ în baza căreia se dezvoltă momentul dinamic M_d , mărimea de ieșire $n(t)$ sau $\omega(t)$ – viteza unghiulară a rotorului în jurul axei, mărimea M_s – cuplul de sarcină sau perturbația.

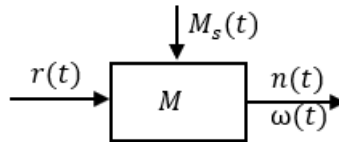


Fig. 1.5. Motor ideal

Pentru descrierea dinamicii motorului ideal (se neglijează momentul de frecare) se aplică legea arborelui (legea Newton, D’Alambert), care are forma:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_d(\omega) - M_s(\omega) = \Delta M(\omega) = M(\omega), \quad (1.9)$$

unde J este momentul de inerție al rotorului, Nm^2 , ω – viteza unghiulară a rotorului, s^{-1} , M_d – momentul dinamic dezvoltat de motor, Nm, M_s – momentul de sarcină sau de rezistență, Nm, ΔM – este abaterea.

În exemplele de mai sus mărimile S este secțiunea transversală, J – momentul de inerție și m – masa, care exprimă proprietățile interne ale proceselor respective.

Din exemplele analizate, se constata că ecuațiile diferențiale, care descriu dinamica proceselor sunt similare după formă și de același ordin.

În baza acestei constatări se prezintă forma generalizată a descrierii proceselor simbolic prezentată în fig. 1.6 cu următoarele notații. Semnalul mării de intrare $x(t)$, care caracterizează valoarea

instantanee a acțiunii energetice sau fluxul de substanță și la procese în mișcare prezintă forța sau momentul, la procese hidraulice sau pneumatice este fluxul de intrare al lichidului sau gazului, la procese termice este cantitatea de căldură etc., $y(t)$ - semnalul mărimii de ieșire, care la mișcare este viteza, la încălzire - temperatura, la umplerea rezervorului cu gaz (lichid) – presiunea etc., L - proprietatea internă, care determină intensitatea modificării în timp a mărimii de ieșire.

Ecuția diferențială care descrie evoluția (dinamica) unui proces generalizat (fig. 1.6) cu notațiile introduse se prezintă în forma:

$$L \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (1.10)$$

sau

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{L} x(t). \quad (1.11)$$

După integrarea ecuației (1.11) se obține forma integrală:

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_0^t x(t) dt. \quad (1.12)$$

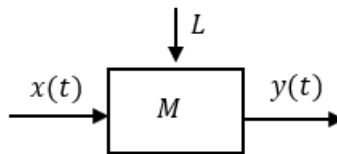


Fig. 1.6. Model de proces

Expresia (1.12) prezintă descrierea dinamicii unui element integrator, unde constanta de timp de integrare se determină de valoarea numerică a parametrului L , care caracterizează proprietatea internă și exprimă inerția evoluției procesului condus.

Pentru conducerea proceselor, indiferent de tipul proceselor, este necesar să fie cunoscute proprietățile interne și în baza acestora se elaborează algoritmi de conducere.

Se consideră un proces condus cu o capacitate în regim de

funcționare care are proprietăți:

1. Proprietatea de acumulare/disipă (inerție) a energiei, substanței etc.
2. Proprietatea de autoreglare sau autostabilizare a procesului.
3. Timp mort.

Ecuția diferențială cu inerție de ordinul unu cu timp mort, care descrie dinamica obiectului condus are forma:

$$T_0 \frac{dy(t)}{dt} \pm \rho y(t) = x(t - \tau), \quad (1.13)$$

unde T_0 este constanta de timp a obiectului, unitatea de măsură s, care exprimă proprietatea de inerție (acumulare), ρ – coeficientul de autoreglare, adimensional, care exprimă proprietatea procesului de stabilizare după ce a fost excitat de un semnal (prin modificarea condițiilor inițiale sau aplicarea unui semnal), τ – timp mort, unitatea de măsură s, pe durata acestuia la ieșirea obiectului semnalul de ieșire este egal cu zero.

Mărimile T_0 , ρ , τ se numesc parametrii obiectului condus și exprima proprietățile respective inerția, autoreglarea și timpul mort.

Ecuția (1.13) mai puțin este aplicată în practică și, din aceste considerente, se aduce la forma canonică unde ultimul termen (cu derivata de ordin zero) va avea coeficientul egal cu unu și pentru aceasta toți termenii din partea stângă și dreaptă se împart la coeficientul ρ și, introducând notațiile respective, va avea forma:

$$T \frac{dy(t)}{dt} \pm y(t) = kx(t - \tau), \quad (1.14)$$

unde $T = T_0/\rho$ este constanta de timp a procesului cu dimensiunea s, $k = 1/\rho$ – coeficientul de transfer al obiectului condus, τ – timpul mort, s.

În acest caz parametrii obiectului condus (reglat) sunt T , k , τ , care exprimă proprietățile procesului real.

Din proprietatea de autoreglare rezultă o clasificare a obiectelor (fig. 1.7) dată în forma:

1. Dacă $\rho > 0$, atunci obiectul are regim stabil de funcționare și

este *static*.

2. Dacă $\rho < 0$, atunci obiectul are regim instabil de funcționare și se numește *instabil*.

3. Dacă $\rho = 0$, atunci obiectul are regim de integrare și se numește *astatic sau neutru*.

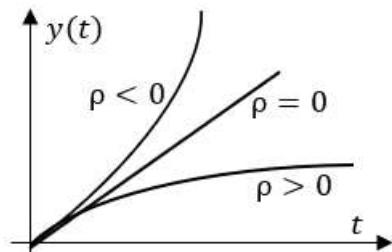


Fig. 1.7. Clasificarea modelelor de procese

Pentru ecuația diferențială (1.13) funcția de transfer are forma:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}. \quad (1.15)$$

Pentru a obține modelele matematice ale proceselor se utilizează proceduri de identificare:

- 1) metode analitice,
- 2) metode experimentale,
- 3) metode analitico-experimentale.

Metodele analitice constau în aplicarea legilor fundamentale care guvernează procesul pentru a obține modelul matematic al obiectului de reglare. Prin aceste metode este dificil de obținut rezultatul scontat.

Metodele experimentale au o largă utilizare și se reduc la ridicarea caracteristicilor de timp (proces indicial, funcția pondere) și funcțiilor frecvențiale și prin proceduri de identificare se determină modelul matematic al obiectului de reglare în forma de bază prin funcții de transfer cu parametrii cunoscuți.

Metodele analitico-experimentale se aplică în mod combinat de determinare a modelului matematic al obiectului de reglare cu parametrii cunoscuți.

La această etapă se analizează procesul pentru a cunoaște sursele de energie și modul de utilizare a acestora, a variabilelor măsurabile, a mărimilor de calitate specifice procesului, natura fizică și particularitățile perturbațiilor, care acționează asupra procesului, regimul staționar de funcționare și mediul în care evoluează pentru a adopta o soluție de automatizare.

În urma analizei de proces se vor alege, dimensiona și poziționa *traductoarele și elementele de execuție* în funcție de regimul de funcționare selectat al procesului și a variabilelor măsurabile și controlabile.

Traductoarele (senzorii) au funcția de culegere a informației din proces prin măsurarea și conversia mărimilor fizice ce asigură informația necesară pentru deciziile de conducere a procesului. În cazurile când unele mărimi fizice nu pot fi măsurate, atunci pot fi generate informații despre proces după unele observații și măsurări indirecte, care conduc la ideea de senzor virtual.

Traductoarele se aleg din condiția de satisfacere a unor cerințe: natura fizică a mărimilor măsurate, precizie ridicată de măsurare (rezoluția traductorului), liniaritatea caracteristicii statice, sensibilitatea și capacitatea de rejecție a zgomotelor, finețea și fidelitatea, viteza de răspuns (dinamica), robustețe (viguros, rezistent), preț de cost, compatibilitate cu mediul în care evoluează procesul.

Traductoarele, care conțin în structura lor elemente sensibile și adaptoare de semnal, furnizează mărimea măsurată ca semnal unificat (cel mai utilizat de curent continuu 4 – 20 mA).

Elementele de execuție reglează fluxurile de energie (substanță) din procesul condus.

Elementele de execuție, datorită proprietățile lor, pot ridica sau reduce performanțele sistemului automat.

Alegerea, dimensionarea și poziționarea elementelor de execuție se efectuează în baza criteriilor: forța sau cuplul dezvoltat, domeniul de liniaritate al caracteristicii statice cât mai ridicat, dinamica (viteza de răspuns cât mai mare și precizie ridicată) elementului și compatibilitatea cu dinamica procesului, capacitatea organului de execuție pentru asigurarea fluxului de energie necesar compensării perturbațiilor,

compatibilitatea elementului de execuție cu mediul industrial, robustețe și siguranță ridicată în funcționare în medii dificile, greutate specifică cât mai redusă și preț de cost cât mai redus.

Performanțele sistemului automat pot fi influențate de proprietățile neliniare esențiale ale elementelor de execuție.

Tendințele dezvoltării domeniului elementelor de execuție conduce la dezvoltarea unor elemente de execuție inteligente cu ridicată compatibilitate, atât cu instalația tehnologică (procesul), cât și cu sistemele numerice de conducere în timp real.

Ansamblul alcătuit din elementul de execuție, instalația tehnologică (procesul) și traductorul în regimul de funcționare parametrii acestora nu se modifică, se numește *partea fixată*.

Se consideră dinamica elementelor părții fixate descrisă de f.d.t. cu inerție de ordinul unu a elementului de execuție, a procesului condus și a traductorului:

$$H_E(s) = \frac{k_E}{T_{ES}+1}, H_P(s) = \frac{k_P}{T_{PS}+1}, H_{tr}(s) = \frac{k_{tr}}{T_{trS}+1} \quad (1.16)$$

și se realizează condiția când constantele de timp a elementului de execuție și a traductorului sunt cu mult mai mici decât constanta de timp a procesului: $T_E \ll T_P$ și $T_{tr} \ll T_P$.

În acest caz f.d.t. echivalentă a conexiunii serie a părții fixate se prezintă:

$$\begin{aligned} H_{PF}(s) &= H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s) = \frac{k_E}{T_{ES}+1} \frac{k_P}{T_{PS}+1} \frac{k_{tr}}{T_{trS}+1} \approx \\ &\approx \frac{k_E k_P k_{tr}}{T_{PS}+1} = \frac{k}{T_{PS}+1}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

unde $k = k_E k_P k_{tr}$ este coeficientul de transfer al părții fixate.

La proiectare se utilizează atât modele intrare-ieșire, cât și modele intrare-stare-ieșire ale obiectelor conduse. Cele mai larg utilizate modele pentru descrierea obiectelor conduse sunt modelele intrare-ieșire *parametrice* (ecuații diferențiale, funcții de transfer) și *neparametrice*

(caracteristicile frecvențiale, răspunsul indicial), care se obțin după prelucrarea datelor experimentale.

În calitate de parametri tehnologici care determină starea procesului se utilizează: temperatura, debit, presiune, nivel, concentrație etc.

Pentru determinarea modelului matematic de aproximare al procesului se parcurg etapele.

1. Se determină procesul (tehnologic) și se analizează evoluția procesului.

2. Se determină parametrii procesului cu valoarea nominală și eroarea admisibilă.

4. Se alege și se dimensionează traductorul cu datele metrologice necesare pentru măsurarea parametrului tehnologic cu eroarea dată în proces. Se analizează caracteristica statică și dinamică a traductorului.

5. Se alege și se dimensionează elementul de execuție.

6. Se aplică semnalul de probă treaptă unitară, se ridică și se înregistrează **răspunsul indicial al procesului**.

7. Prelucrarea datelor experimentale și determinarea modelului matematic de aproximare al procesului analizat.

Se prezintă un exemplu de determinare a modelului matematic al unui proces pe cale experimentală. La intrarea procesului s-a aplicat semnalul treaptă unitară $1(t)$ și s-a ridicat procesul indicial $h(t)$, care se dă în fig. 1.8.

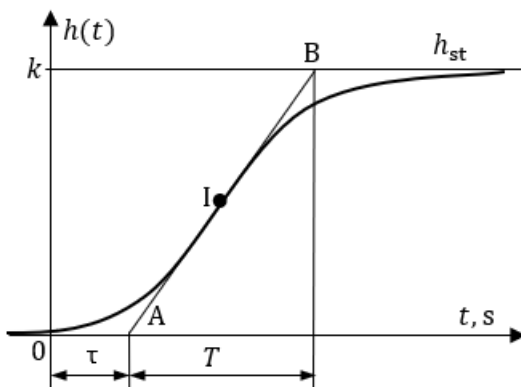


Fig. 1.8. Procesul indicial al obiectului

Procedura de determinare a modelului obiectului după curbă experimentală se reduce la etapele:

- 1) pe curbă se alege punctul de inflexiune M , în care derivata (viteza) își schimbă semnul,
- 2) în punctul M la curbă se trasează tangenta până la intersecția cu axa absciselor și regimul staționar,
- 3) se determină proiecția tangentei pe axa absciselor și acest segment de timp prezintă constanta de timp T a procesului,
- 4) segmentul pe axa absciselor de la origine până la punctul de intersecție a tangentei cu axa absciselor prezintă timpul mort τ al procesului,
- 5) coeficientul de transfer este valoarea regimului indicial staționar $k = h_{st}/1$.

În rezultatul procedurilor efectuate s-au obținut parametrii unui model de obiect cu inerție de ordinul unu cu timp mort cu funcția de transfer (1.15).

Modelul obținut, prin procedura dată, este o aproximare a procesului, însă pot fi obținute și alte aproximări (modele) după această curbă, dar procedura este dificilă.

Din aceste considerente s-au elaborat mai multe pachete de programe (de exemplu MATLAB), care se aplică pentru identificarea modelului matematic în forma funcțiilor de transfer după curba procesului indicial ridicată experimental pentru procesul real.

Pentru clase largi de procese lente și foarte lente se utilizează modele parametrice în forma funcțiilor de transfer. Se prezintă exemple de modele de obiecte de reglare cu diferite proprietăți exprimate prin funcții de transfer:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{k}{Ts+1}, \quad H(s) = \frac{1}{Ts}, \quad H(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts}, \quad H(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \\
 H(s) &= \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad H(s) = \frac{k}{(Ts+1)^n}, \quad H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(Ts+1)^n}, \\
 H(s) &= \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n}, \quad H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n}. \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

În (1.18) se dau f.d.t. pentru modele de obiecte de reglare:

- 1) cu inerție de ordinul unu,
- 2) cu astatism (integrare),
- 3) cu astatism și timp mort,
- 4) cu inerție de ordinul doi,
- 5) cu inerție de ordinul doi și timp mort,
- 6) cu inerție cu elemente identice de ordinul n ,
- 7) cu inerție cu elemente identice de ordinul n și timp mort,
- 8) cu inerție de ordinul $n + 1$,
- 9) cu inerție de ordinul $n + 1$ și timp mort,

unde k, T, T_1, T_2, τ, n sunt parametrii modelelor respective.

Se prezintă o formă generalizată a procesului cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}B(s)}{s^\nu A(s)} = \frac{ke^{-\tau s}}{s^\nu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^{n-\nu} + a_{n-1} s^{n-\nu-1} + \dots + a_1 s + a_0}, m \leq n, (1.19)$$

unde k este coeficientul de transfer, τ – timpul mort, ν – grad de astatism, $B(s)$ – polinomul număratorului de gradul m , care prezintă zerourile modelului obiectului și accelerează procesul, $A(s)$ – polinomul numitorului de gradul $n - \nu$, care prezintă poliile modelului obiectului și exprimă inerția obiectului condus, iar raportul $m \leq n$ prezintă realizabilitatea fizică a proceselor.

Funcția de transfer $H(s)$ a procesului este proprie când $n \geq m$ și atunci $H(\infty)$ este finită, f.d.t. $H(s)$ este strict proprie când $n > m$ și $H(\infty) = 0$ și f.d.t. $H(s)$ este biproprie când $n = m$. Procesul descris de f.d.t. $H(s)$ cu $m > n$ este impropriu.

Primele 6 modelele din (1.18) au un grad redus de aproximare, care descrie comportarea reală a procesului condus în vecinătatea punctului static de funcționare pentru variații de amplitudine redusă ale variabilelor funcționale $y(t)$ și $u(t)$.

Pentru descrierea proceselor rapide pot fi approximate cu modele de forma:

$$H_P(s) = \frac{k}{\prod_{k=1}^n (T_k s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \quad (1.20)$$

unde T_k sunt constante de timp dominante, care au valori mai mari de 10 s, iar T_Σ - constanta de timp parazită, care este mult mai mică decât cea mai mică constantă de timp dominantă și se determină ca suma constantelor mici de timp.

Modelele neparametrice se prezintă prin caracteristicile frecvențiale ca modele simplificate, liniare și de dimensiune redusă, care descriu procesele reale cu un grad mai mare sau mai redus de incertitudine. Incertitudinile la construirea modelelor este rezultatul reducerii dimensiunii modelelor, de liniarizarea neliniarităților din proces.

Incetitudinile se clasifică în parametrice când sunt incorecții valorile parametrilor modelelor și structurale când structurile modelului sunt imperfecte.

Dacă este cunoscut răspunsul indicial, atunci prin metode de identificare se determină modelul parametric al procesului.

Un rol tot mai important se atribuie modelelor obiectelor liniare intrare-stare-ieșire la proiectarea sistemelor cu conducere automată cu acțiunea semnalelor mărimii de intrare $\mathbf{u}(t)$ și a perturbației $\mathbf{v}(t)$ pentru obiectul multivariabil prezentat în forma vector-matriceală:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{p}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (1.21)$$

unde se utilizează însemnările:

\mathbf{A} este matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$,

\mathbf{B} – matricea de comandă de dimensiunea $n \times m$,

\mathbf{C} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times n$,

\mathbf{D} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times m$,

\mathbf{E} – matricea de perturbație de dimensiunea $l \times r$.

$\mathbf{u}(t)$ – vectorul intrării de dimensiunea m ,

$\mathbf{x}(t)$ – vectorul de stare de dimensiunea n ,

$y(t)$ – vectorul ieșirii de dimensiunea l ,

$p(t)$ – vectorul perturbațiilor de dimensiunea r .

În cazul obiectului monovariabil modelul (1.21) are forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + ep(t), \quad (1.22)$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t),$$

unde $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ este derivata vectorului stării, A – matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$, b – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, c – vectorul de ieșire de tip coloană de dimensiunea $n \times 1$, iar c^T – vectorul c transpus de dimensiunea $1 \times n$ – rând, d – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, e – vectorul coloană a perturbației de dimensiunea $1 \times n$.

Dacă asupra procesului acționează referința $u(t)$ și perturbația $p(t)$ (fig. 1.9, a), atunci modelul matematic al obiectului de reglare se prezintă în forma (fig. 1.9, b).

Mărimea de ieșire a obiectului de reglare (fig. 1.9, b) în formă operațională se prezintă cu relația din două componente:

$$y(s) = y_u(s) \pm y_p(s) = H_{yu}(s)u(s) \pm H_{yp}(s)p(s), \quad (1.23)$$

unde $y_u(s)$ este componenta răspunsului la acțiunea referinței, $y_p(s)$ – componenta răspunsului la acțiunea perturbației, $H_{yu}(s)$, $H_{yp}(s)$ – funcțiile de transfer, care descriu transferurile intrare-ieșire respective.

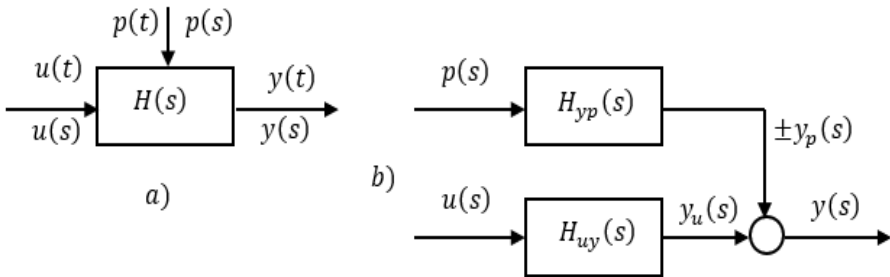


Fig. 1.9. Modelul matematic al obiectului de reglare cu perturbație

1.4 Performanțele sistemului de reglare automată

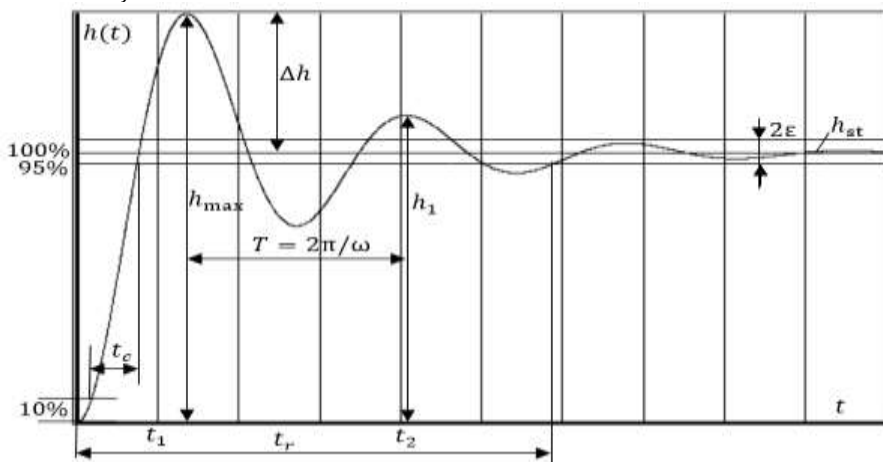
Pentru un sistem automat funcțiile principale calitative sunt
rejecția perturbațiilor și
urmărirea referinței. Urmărirea referinței $r = \text{const}$ cu eroarea staționară
minimă $\varepsilon_{st} = 0$ (este problema stabilizării) și urmărirea referinței $r(t)$
cu eroarea minimă (prezintă problema conducerii cu program).

La automatizarea unui proces, la obiectivele calitative, se vor
impune și cerințe specifice ca siguranța în funcționare, calitatea
producției, conformitatea cu cerințele de mediu etc.

Cerințele de stabilitate asimptotică și de performanță ale unui
sistem automat pot fi determinate în raport cu tipurile de semnale ca
referința, perturbația etc. care acționează asupra sistemului.

Proprietatea de stabilitate este necesară oricărui sistem de reglare
automată, fiindcă procesele tranzitorii care vor apărea, ca rezultat al
acțiunii unor semnale, se vor stinge.

Calitatea regimului de funcționare al unui sistem automat se
apreciază după procesul indicial al componentei libere $y_l(t)$ și regimul
staționar $y_f(t)$ (fig. 1.10) ca răspuns la semnal treaptă unitară.



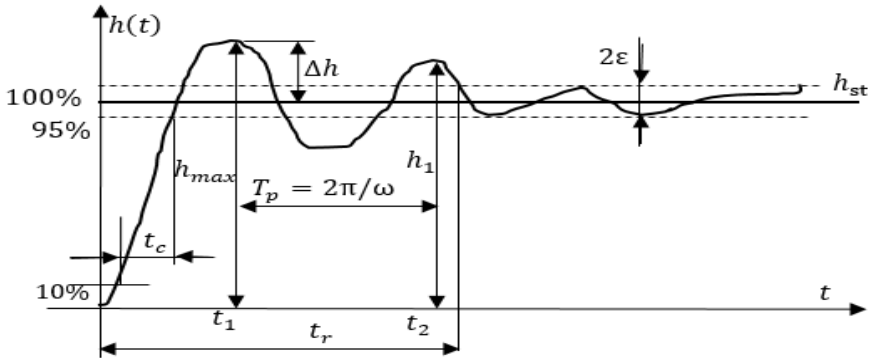


Fig. 1.10. Răspunsul indicial al sistemului de reglare automată

La proiectarea sistemelor automate se utilizează două categorii de performanțe:

1. Criteriile locale (ε , t_c , σ , t_r etc.).
2. Criteriile globale (integrale).

Se prezintă aprecierea calității sistemului automat după procesul indicial cu indici de calitate (criteriile locale) pentru regimul staționar și tranzitoriu.

1. *Indicii de calitate apreciați după regimul staționar h_{st} .*

Eroarea staționară sau precizia sistemului ε_{st} , care se alege convențional o mărime finită în raport cu regimul staționar h_{st} (de exemplu $\varepsilon_{st} = 0,05$ sau 5 % din valoarea lui h_{st}):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{st} = r(t) - h(t), \quad (1.24)$$

unde $r(t)$ este semnalul de referință ca semnal etalon al mărimii de ieșire al sistemului, iar $h(t)$ - mărimea curentă a răspunsului indicial al sistemului.

2. *Indicii de calitate apreciați după procesul indicial $h(t)$.*

Indicii de calitate se apreciază după răspunsul indicial $h(t)$ al sistemului la semnalul treaptă unitară aplicată la intrarea lui (fig. 1.10).

1. *Timpul de reglare t_r* , care caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea inițială dată (nulă sau nenulă) în banda regimului staționar cu satisfacerea inegalității:

$$|h(t) - h_{st}| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_r > 0. \quad (1.25)$$

Se constată că regimul tranzitoriu are o durată finită, care are o deosebită importanță practică, deoarece teoretic durata regimului tranzitoriu tinde la infinit.

2. *Suprareglarea* σ sau *eroarea dinamică* Δh , care determină cea mai mare abatere h_{\max} de la regimul staționar h_{st} , care este mărime absolută sau relativă:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{st}}{h_{st}} = \frac{\Delta h}{h_{st}} 100 \%. \quad (1.26)$$

Un sistem automat se consideră calitativ pentru suprareglarea $\sigma \leq 20 \%$.

3. *Timpul de creștere* t_c , care caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea inițială dată 5-10 % până la 95 % din regimul staționar și $1/t_c$ este indicator al rapidității răspunsului indicial al sistemului.

4. *Numărul de abateri sau oscilații* λ de la regimul staționar pe durata timpului de reglare t_r . Pentru un sistem calitativ se recomandă valori pentru $\lambda \leq 3$.

5. *Perioada oscilațiilor* $T_p = 2\pi/\omega$ sau *pulsăția oscilațiilor* $\omega = 2\pi/T_p$.

Având în vedere că asupra sistemului automat acționează semnalul de referință și semnalul perturbației, atunci rezultă că performanțele sistemului automat trebuie să satisfacă două cerințe de bază.

1. Este necesar ca sistemul automat să urmărească cât mai precis semnalul de referință și să fie cât mai controlabil, ceea ce impune cerința ca derivata $dy(t)/dr(t)$ să fie mai mare în toată gama de variație a referinței $r(t)$.

2. Sistemul automat să fie cât mai slab influențat de acțiunea perturbației și eroarea sistemului $\varepsilon(t)$, rezultatul acțiunii perturbației, să fie cât mai mică și să fie compensată cât mai rapid. Se cere ca sistemul automat cât mai slab să reacționeze la acțiunea perturbației, deci derivata $dy(t)/dp(t)$ să fie cât mai mică.

Din condițiile formulate mai sus rezultă că indicii principali pentru aprecierea performanțelor procesului tranzitoriu al sistemului automat sunt timpul de reglare t_r și suprareglajul σ [1, 4, 6, 7].

1.5 Eroarea staționară a sistemului automat

În sistemul automat există regimul staționar, care are o importanță deosebită pentru caracterizarea calităților sistemului automat. Eroarea staționară se determină în raport cu fiecare tip de semnal care acționează asupra sistemului, dar eroarea totală a sistemului este suma erorilor pentru fiecare semnal, care acționează asupra sistemului.

Dacă asupra sistemului acționează semnalele de referință și perturbația (fig. 1.11), atunci eroarea sistemului se prezintă ca suma a două componente ale erorilor raportate la semnalele de intrare:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_p(t), \quad (1.27)$$

unde $\varepsilon_r(t)$ este eroarea transferului referință $r(t)$ – ieșirea sistemului $y_r(t)$, $\varepsilon_p(t)$ - eroarea transferului perturbație $p(t)$ – ieșirea sistemului $y_p(t)$.

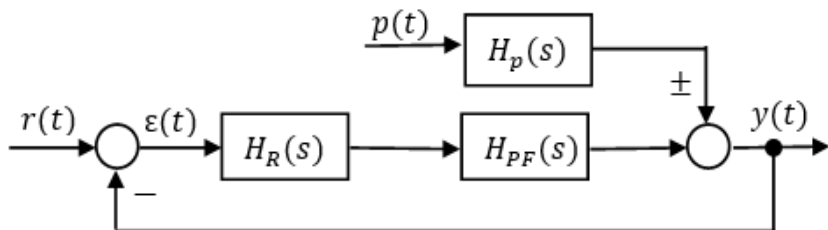


Fig. 1.11. Structura sistemului de reglare automată

Pornind de la schema structurală a sistemului automat (fig. 1.11), se determină eroarea staționară a sistemului în raport cu semnalele referinței $r(t)$ și perturbației $p(t)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(s) &= \frac{1}{1+H_d(s)}r(s) - \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)}p(s) = \\ &= H_{\varepsilon r}(s)r(s) - H_{\varepsilon p}(s)p(s) = \varepsilon_r(s) - \varepsilon_p(s),\end{aligned}\quad (1.28)$$

unde $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ este f.d.t. a canalului direct sau sistemul în circuit deschis, $H_{\varepsilon r}(s)$ - f.d.t. a erorii transferului referință-ieșire, $H_{\varepsilon p}(s)$ - f.d.t. a erorii transferului perturbație-ieșire, $H_p(s)$ – f.d.t. în canalul perturbației.

Se analizează performanțele ce caracterizează eroarea staționară în raport cu semnalul de referință *numită și eroare forțată* $\varepsilon_r(s)$ dată de relația:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(s) &= r(s) - y(s) = r(s) - H_d(s)\varepsilon_r(s) = \\ &= r(s) - H_0(s)r(s) = r(s)(1 - H_0(s)) = H_{\varepsilon r}(s)r(s).\end{aligned}\quad (1.29)$$

unde $H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$ este f.d.t. a sistemului în buclă închisă.

Pentru a caracteriza proprietățile sistemului automat în regim staționar se evidențiază următoarele tipuri de erori staționare.

1. *Eroarea staționară de poziționare (regim pozițional)* la semnal de referință de tip treaptă unitară pentru care se definește expresia analitică, derivata și imaginea în s în forma:

$$r(t) = 1(t) = \text{const}, \quad \dot{r}(t) = 0, \quad r(s) = 1(s) = \frac{1}{s}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(s) &= r(s) - y(s) = r(s) - H_0(s)r(s) = \\ &(1 - H_0(s))r(s) = H_{\varepsilon r}(s)r(s),\end{aligned}\quad (1.31)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar de la expresia (1.31) se aplică teorema valorii finale și se obține:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{\varepsilon r}(s) \frac{1}{s} = H_{\varepsilon r}(0) \neq 0. \quad (1.32)$$

3. *Eroarea staționară de viteză (regim cu viteză constantă)* la semnal de referință de tip rampă unitară (cu viteză unitară) pentru care se definește expresia analitică, derivatele și imaginea în s și se obține:

$$r(t) = t \cdot 1(t), \dot{r}(t) = 1, \ddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (1.33)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar de la expresia (1.31) se aplică teorema valorii finale și se obține:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{\varepsilon_r}(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} H_{\varepsilon_r}(s) \frac{1}{s}. \quad (1.34)$$

3. *Eroarea staționară de accelerație (regim cu accelerație constantă)* la semnal de referință de tip funcție parabolă unitară (cu accelerație unitară) pentru care se definește expresia analitică, derivatele și imaginea în s și se obține:

$$r(t) = t^2 \cdot \frac{1(t)}{2}, \dot{r}(t) = 2t, \ddot{r}(t) = 2, \dddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^3}. \quad (1.35)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar de la expresia (1.31) se aplică teorema valorii finale și se obține:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{\varepsilon_r}(s) \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} H_{\varepsilon_r}(s) \frac{1}{s^2}. \quad (1.36)$$

Din analiza expresiilor (1.32), (1.34), (1.36) se constată că precizia este definită de comportarea f.d.t. $H_{\varepsilon_r}(s)$ în vecinătatea originii la valori mici ale lui s .

Pentru calcul erorii staționare (1.31) a sistemului f.d.t. a erorii $H_{\varepsilon_r}(s)$ se dezvoltă în serie Taylor și se obține:

$$H_{\varepsilon_r}(s) = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!} c_2 s^2 + + \dots + \frac{1}{k!} c_k s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad (1.37)$$

unde coeficienții erorii se calculează conform relației:

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k H_{\varepsilon r}(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{1+H_d(s)} \right). \quad (1.38)$$

Pentru o formă generică a semnalului de referință dat de expresia:

$$r(t) = t^k \frac{1}{k!}, \quad r(s) = \frac{1}{s^{k+1}}. \quad (1.39)$$

eroarea sistemului în formă operațională se dă de relația:

$$\varepsilon_r(s) = c_0 r(s) + c_1 s r(s) + \frac{1}{2!} c_2 s^2 r(s) + \dots + \frac{1}{k!} c_k s^k r(s), \quad (1.40)$$

iar în domeniul timpului eroarea (1.40) se prezintă în forma:

$$\varepsilon_r(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t) + \dots + \frac{1}{k!} c_k r^{(k)}(t). \quad (1.41)$$

Coeficienții $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ din (1.36) și (1.40) se numesc *coeficienții erorii staționare* în raport cu mărimea de referință.

Un sistem automat se numește de tipul k în raport cu mărimea de referință dacă primul coeficient al erorii staționare este nenul în ordinea lor naturală este c_k .

Similar se calculează și coeficienții erorii sistemului în raport cu semnalul perturbației.

1.6 Criteriile integrale pentru aprecierea performanțelor sistemului automat

Este stabilit că fiecare performanță separată caracterizează proprietățile concrete ale sistemului de reglare automată. Alegerea unor performanțe locale pentru ca sistemul să posede o calitate mai bună devine o problemă de contradicții, deoarece alte performanțe locale vor fi mai nefavorabile.

În comparație cu performanțele dinamice definite prin criterii locale $\varepsilon, \sigma, t_r, \dots$, care se referă la valori ale erorii în anumite momente ale

timpului, criteriile integrale reprezintă indici sintetici de calitate ai sistemului, care caracterizează în ansamblu regimul tranzitoriu și oferă o informație globală complexă despre dinamica sistemului studiat [2, 3, 7-10, 15, 17].

Această contradicție a condus la ideea definirii unor *indicatori sintetici de calitate* care să înglobeze toate aspectele pentru determinarea calității după răspunsul indicial al sistemului.

Un indicator sintetic de calitate asigură o apreciere globală a performanțelor regimului dinamic și staționar al unui sistem automat, care se exprimă printr-un număr real pozitiv și poate fi calculat și măsurat experimental. Acest indicator poate fi supus minimizării valorii lui, ceea ce implicit conduce la realizarea unei *optimizări* a sistemului automat, care influențează asupra structurii și valorilor parametrilor sistemului automat (ai regulatorului).

Pentru aprecierea *vitezei de răspuns* și a abaterilor mărimii de reglare:

$$\Delta y(t) = \varepsilon_l(t) = \varepsilon(t) = r(t) - y(t) = 1(t) - y(t), t \geq 0 \quad (1.42)$$

de la regimul staționar se utilizează criterii integrale (globale), numite și criterii sintetice, care se formează în funcție de tipul semnalelor externe care acționează asupra sistemului automat.

Dacă se admite că eroarea $\varepsilon(t)$ este abaterea sistemului stabil în raport cu comportarea ideală, atunci criteriul integral de performanță care poate fi utilizat, se definește de funcționala în forma:

$$J = \int_0^{\infty} L(\varepsilon(t), t) dt = \min, \quad (1.43)$$

unde operatorul $L(\varepsilon(t), t)$ este o funcție liniară sau neliniară de argumentele eroarea $\varepsilon(t)$ sistemului și timpul t .

Utilizarea expresiei (1.43) pentru determinarea performanțelor impune minimizarea erorii și această funcție poate avea diverse forme în dependență de particularitățile procesului de reglare, de forma răspunsului sistemului pentru semnale exogene standard.

Ca indice de calitate pentru procese aperiodice se calculează numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt \rightarrow \min. \quad (1.44)$$

Pentru procese oscilante se utilizează criteriul numărul exprimat prin integrala pătratică de forma:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min \quad (1.45)$$

sau integrale de alte forme.

Integrala (1.45) se calculează exprimând eroarea prin parametrii sistemului închis.

1.7 Metode de proiectare a sistemelor de reglare automată

Pe parcursul dezvoltării teoriei sistemelor automate au fost elaborate mai multe metode de sinteză a sistemelor de conducere automată. Aceste metode utilizează atât modele matematice bazate pe transferul intrare-ieșire (perturbație-ieșire) - metode clasice, cât și modele intrare-stare-ieșire.

Din categoria metodelor practicate în procedurile de sinteză a structurilor de sisteme de reglare automată sunt larg utilizate următoarele metode în forma modelelor intrare-ieșire.

1. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată pe baza funcțiilor de transfer: metoda repartizării (alocării) poli-zero-uri, metoda locului rădăcinilor.

2. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată pe baza caracteristicilor de frecvență: metoda caracteristicilor logaritmice, metoda caracteristicilor amplitudine-fază (locul de transfer).

3. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată pe baza criteriilor experimentale: metode empirice, metoda Ziegler-Nichols etc.

4. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată în baza criteriilor integrale de performanță (criteriile pătratice).

5. Metoda gradului maximal de stabilitate.

Se menționează că proiectarea este un proces cu reacție, în care obiectul și specificațiile

sunt iterativ ajustate într-un ciclu cu reacție. În procesul de interacțiune om-mașină în procedurile de proiectare, proiectantul se confruntă cu incertitudinile modelului matematic al obiectului de reglare și complexitatea calculelor. Pentru a realiza toate acestea într-un mod corespunzător s-au elaborat sisteme pentru proiectarea asistată de calculator (PAC). În literatura de specialitate sunt indicate mai multe pachete de programe MATLAB, KOPRAS etc. utilizate la proiectarea sistemelor automate.

2 ALGORITMI ȘI STRUCTURI CONVENȚIONALE DE REGLARE

2.1 Legile de reglare tipice

În practica automatizărilor industriale o largă utilizare legile de reglare tipice care se construiesc pe baza elementelor dinamice tipice: elementul ideal sau proporțional (P), elementul integrator (I), elementul ideal derivativ (D) și combinația acestora P, I, D, PD, PI, ID, PID. Algoritmii de reglare de tipul P, I, D, PD, PI, ID, PID etc. au modelul matematic și structură fixă cunoscută [1-4]. Structura standard a algoritmului PID se dă în fig. 2.1.

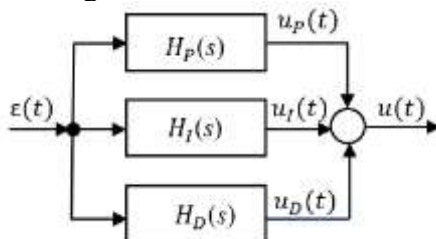


Fig. 2.1. Structura regulatorului PID

Modelele matematice ale algoritmilor (legilor) de reglare se prezintă în forma ecuațiilor diferențiale și funcțiilor de transfer.

Algoritmii de reglare cu acțiune proporțională - regulatorul P:

$$u_p(t) = k_p \varepsilon(t), \quad (2.1)$$

$$H_P(s) = k_p. \quad (2.2)$$

Algoritmii de reglare cu acțiune integrativă - regulatorul I:

$$u_i(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^\infty \varepsilon(t) dt, \quad (2.3)$$

$$H_I(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}. \quad (2.4)$$

Algoritmii de reglare cu acțiune derivativă - regulatorul D:

$$u_d(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

$$H_D(s) = T_d s = k_d s. \quad (2.6)$$

În practică se realizează algoritmul real derivativ:

$$T_p \frac{du(t)}{dt} + u_d(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

$$H_D(s) = \frac{T_d s}{T_f s + 1} = T_d s \frac{1}{T_f s + 1}, \quad (2.8)$$

care este o conexiune serie a elementului ideal derivativ cu un element de filtrare de ordinul întâi, iar T_f este constanta de timp de filtrare care se calculează după relația:

$$T_p \approx \alpha T_d = (0,1 \dots 0,125) T_d. \quad (2.9)$$

Elementul de filtrare asigură realizabilitatea fizică a algoritmilor și se atenuază efectul acestora asupra semnalelor de tip zgomot.

Algoritmul de reglare cu acțiune proporțională – derivativă PD:

$$u_{pd}(t) = k_p \varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.10)$$

$$H_{PD}(s) = k_p + T_d s. \quad (2.11)$$

Algoritmul de reglare cu acțiune proporțională–integrativ PI:

$$u_{pi}(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^\infty \varepsilon(t) dt, \quad (2.12)$$

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = \frac{k_p T_i s + 1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (2.13)$$

unde $k_i = 1/T_i$.

Algoritmul de reglare cu acțiune proporțională–integrativă–derivativă PID:

$$u_{pid}(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \quad (2.15)$$

În relațiile de mai sus coeficienții k_p , T_i , k_i , T_d , k_d - sunt parametrii de acord ai algoritmilor de reglare respectivi cu componenta proporțională P, integrativă I și derivativă D.

În algoritmi prezența, în care este inclusă componenta ideal derivativă D, aceasta se realizează ca componentă real derivativă.

Algoritmul PID (2.15) poate fi prezentat și în formele cu f.d.t.:

$$H_{PID}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_p \left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s \right), \quad (2.16)$$

unde k_p este coeficientului de proporționalitate sau coeficientul regulatorului, $k_i = \frac{1}{k_p T_i}$ - coeficientul de integrare cu dimensiunea s^{-1} ,

$k_d = \frac{T_d}{k_p}$ - coeficientul derivativ;

$$H_{PID}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{T_d s + 1}{T_f s + 1}. \quad (2.17)$$

Se utilizează și algoritmi PID cu filtrare, care prelucrează diferit eroarea, ieșirea măsurată și referința - numiți algoritmi PID modificați [1-4, 11].

2.2 Algoritmi PID modificați cu două grade de libertate

În figura 2.2 se prezintă structura sistemului automat cu regulatorul PI-D, care se descrie de relația:

$$u(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) r(s) - k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) y_z(s). \quad (2.18)$$

Structura regulatorului (2.18) nu conține componenta derivativă D pe calea directă și, la modificarea bruscă a semnalelor de referință, permite evitarea apariției unor șocuri în instalația tehnologică.

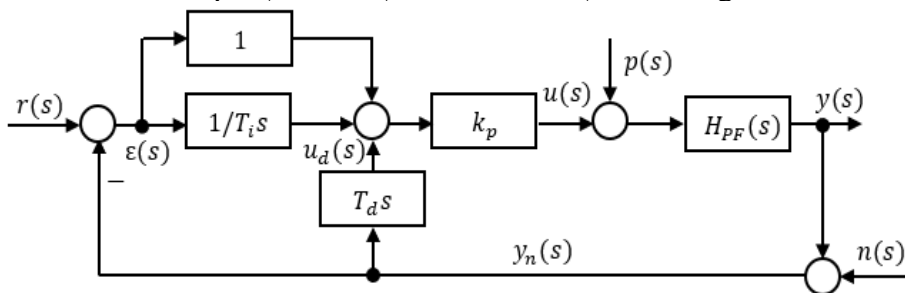


Fig. 2.2. Structura SRA cu regulatorul PI-D

În acest caz componenta derivativă cu filtrare este plasată pe calea de reacție și se descrie cu relația:

$$u_d(s) = \frac{T_d s}{T_f s + 1} y_z(s). \quad (2.19)$$

În cazul când se evidențiază eroarea sistemului algoritmul PI-D este de forma:

$$\begin{aligned} u(s) &= k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \varepsilon(s) - k_p \frac{T_d s}{T_f s + 1} y_z(s) = \\ &= k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (r(s) - y_z(s)) - k_p \frac{T_d s}{T_f s + 1} y_z(s) = \\ &= k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) r(s) - k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1} \right) y_z(s). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Funcția de transfer a sistemului în raport cu perturbația, în care se asigură rejecția perturbațiilor în regim permanent staționar este:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_p(s)}{1 + H_p(s)k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}. \quad (2.21)$$

Pentru evitarea apariției unor salturi ale mărimii de reglare $u(t)$ la modificarea semnalului treaptă a referinței, care conduce în regim de saturație elementul de execuție, se utilizează o altă structură de algoritm de tipul I-PD (fig. 2.3).

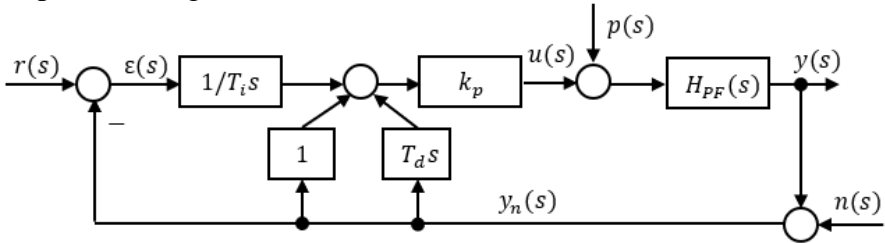


Fig. 2.3. Structura sistemului cu regulatorul I-PD

Mărimea de reglare $u(s)$ se calculează cu relația:

$$u(s) = k_p \frac{1}{T_{iS}} r(s) - k_p \left(1 + \frac{1}{T_{iS}} + \frac{T_d s}{T_{fS+1}}\right) y_z(s). \quad (2.22)$$

În acest caz pe calea directă se menține componenta integrală I, care asigură comportarea dorită a SA în regim staționar:

$$u(s) = k_p \frac{1}{T_{iS}} \varepsilon(s) - k_p \left(1 + \frac{1}{T_{iS}} + \frac{T_d s}{T_{fS+1}}\right) y_z(s). \quad (2.23)$$

2.3 Structura regulatorului real

Structura regulatorului real se prezintă în fig. 2.4, în care $H_A(s)$ este f.d.t. a elementului de amplificare (EA), $H_E(s)$ – f.d.t. a elementului de execuție (EE), $H_r(s)$ – f.d.t. a elementului de corecție (EC) în reacție inversă negativă.

Pentru realizarea algoritmului ideal de reglare se alege structura respectivă de realizare și în baza proprietăților elementelor componente ale structurii se calculează proprietățile structurii reale a regulatorului.

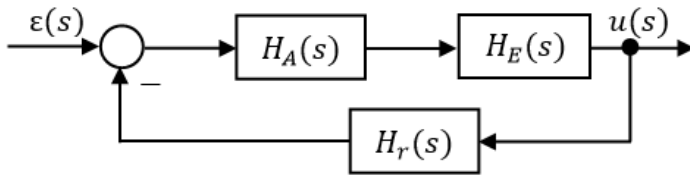


Fig. 2.4. Schema structurală a regulatorului real

Funcția de transfer a elementului de corecție se alege astfel ca să se realizeze algoritmul de reglare respectiv, iar modelul matematic al elementului de corecție nu va fi mai mare de ordinul doi. Elementul de corecție poate fi conectat în reacție în diverse variante la amplificator, la elementul de execuție sau la amplificator și elementul de execuție.

Structura unui regulator real se descrie de funcția de transfer:

$$H_{RR}(s) = H_{RI}(s)H_b(s), \quad (2.24)$$

unde $H_{RR}(s)$ este f.d.t. a regulatorului real, $H_{RI}(s)$ – f.d.t. a algoritmului de reglare ideal (regulatorul ideal) și $H_b(s)$ – f.d.t. a balastului (eroarea la realizarea algoritmului de reglare ideal).

Pentru structura regulatorului real din fig. 2.4 cu f.d.t. ale elementelor: amplificatorul cu $H_A(s)$, elementul de execuție cu $H_E(s)$, canalul de reacție cu $H_r(s)$, f.d.t. echivalentă a structurii închise $H_{ec}(s)$, în general, la condiția când $1/(H_A(s)H_E(s)) \ll H_r(s)$ se prezenta în forma:

$$H_{ec}(s) = \frac{H_A(s)H_E(s)}{1 \mp H_A(s)H_E(s)H_r(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H_A(s)H_E(s)} \mp H_r(s)} \approx \mp \frac{1}{H_r(s)}. \quad (2.25)$$

Rezultă f.d.t. echivalentă a acestei conexiuni care nu depinde de proprietățile dinamice ale canalului direct, dar depinde numai de proprietățile dinamice ale canalului de reacție. Această idee se utilizează în practica construirii structurilor de realizare a legilor de reglare tipice și, în general, pentru stabilizarea și ridicarea performanțelor sistemului automat.

Exemplul 2.1. Se dau funcțiile de transfer ale elementelor idealizate ale amplificatorului și elementului de execuție:

$$H_A(s) = k_A, H_E(s) = \frac{1}{T_E s}.$$

Se cere să se realizeze legea de reglare proporțională cu parametrul de acord k_p .

Soluționare. Se alege reacția rigidă cu funcția de transfer:

$$H_r(s) = k_r.$$

Pentru structura regulatorului real din fig. 2.4 cu funcțiile de transfer ale elementelor determinate se calculează funcția de transfer echivalentă în forma:

$$H_{RR}(s) = \frac{k_A \frac{1}{T_E s}}{1 + k_A \frac{1}{T_E s} k_r} = \frac{k_A}{T_E s + k_A k_r} = \frac{k_A / k_A k_r}{\frac{T_E}{k_A k_r} s + \frac{k_A k_r}{k_A k_r}} = k_p \frac{1}{T_b s + 1} = H_{RI}(s) H_b(s),$$

unde $H_{RI}(s) = k_p = \frac{1}{k_r}$ este regulatorul proporțional cu parametrul de acord realizat prin inversarea f.d.t. a reacției, $H_b(s) = \frac{1}{T_b s + 1}$ este f.d.t. a balastului (a erorii de realizare), care prezintă un element cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer unitar $k_b = 1$ și constanta de timp $T_b = \frac{T_E}{k_A k_r}$. ■

2.4 Proiectarea sistemelor monovariabile pe baza funcțiilor de transfer

Se consideră structura convențională a sistemului de reglare automată dată în fig. 2.5, unde $H_{pF}(s)$ este f.d.t. a părții fixate, $H_R(s)$ – regulatorul, $r(t)$ – semnalul de referință, $p(t)$ – perturbația, care acționează la ieșirea obiectului prin elementul prefiltru cu f.d.t. $H_p(s)$.

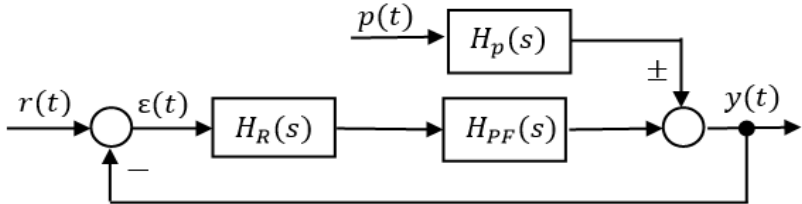


Fig. 2.5. Structura sistemului de reglare automată

Se consideră cunoscute toate restricțiile și limitările asupra comenzii și clasa mărimilor exogene referința $r(t)$ și perturbația $p(t)$ ce acționează asupra procesului condus.

Având în vedere că asupra sistemului automat acționează semnalul de referință $r(t)$ și semnalul perturbației $p(t)$, atunci rezultă că performanțele sistemului automat trebuie să satisfacă două cerințe de bază.

1. Este necesar ca sistemul automat să urmărească cât mai precis semnalul de referință și să fie cât mai controlabil, ceea ce impune cerința ca derivata $dy(t)/dr(t)$ să fie mai mare în toată gama de variație a referinței $r(t)$.

2. Sistemul automat să fie cât mai slab influențat de acțiunea perturbației și eroarea sistemului $\varepsilon(t)$, rezultatul acțiunii perturbației, să fie cât mai mică și să fie compensată cât mai rapid. Se cere ca sistemul **automat cât mai slab să reacționeze** la acțiunea perturbației, deci derivata $dy(t)/dp(t)$ să fie cât mai mică.

Din condițiile formulate mai sus rezultă că indicii principali pentru aprecierea performanțelor răspunsului sistemului automat sunt timpul de reglare t_r și suprareglajul σ .

Proiectarea sistemului constă în determinarea f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului (proiectarea regulatorului), astfel ca să aibă comportarea dorită în regim tranzitoriu și staționar în raport cu semnalele exogene referința $r(t)$ și perturbația $p(t)$ precizate respectiv: *stabilitate, reglare asimptotică, precizie, performanțe (cerințe dinamice) și robustețe*.

Cerințele de proiectare formulate în domeniul timpului sau domeniul frecvență este necesar să fie corelate cu incertitudinile cunoașterii modelelor obiectului și al perturbațiilor pentru a obține o soluție adecvată problemei de proiectare.

În unele aplicații practice specificațiile de proiectare nu sunt considerate definitiv fixate, deoarece adesea sunt contradictorii. Problema reglării poate fi rezolvată atât prin adoptarea unei soluții convenționale din fig. 2.5, cât și prin utilizarea unei structuri de regulator cu prelucrarea după legi diferite referința $r(t)$, ieșirea $y(t)$ și/sau eroarea $\varepsilon(t)$ prezentă prin structura modificată a sistemului automat din fig. 2.6.

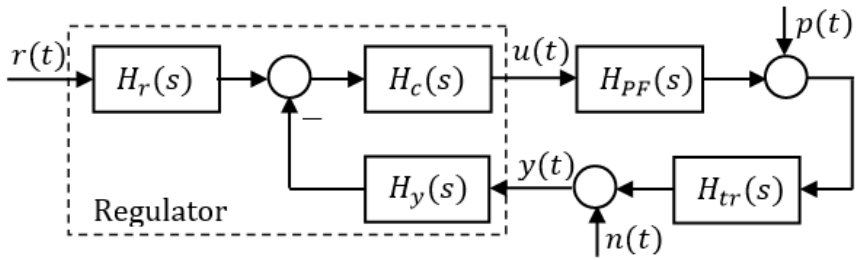


Fig. 2.6. Structura modificată a sistemului de reglare automată

În această structură s-a inclus în procesul condus elementul de execuție, iar traductorul cu f.d.t. $H_{tr}(s)$ este scos în afara procesului pentru a evidenția zgomotul $n(t)$ ca o intrare suplimentară. Regulatorul este încadrat cu linia întreruptă.

Utilizând această structură generală pot fi obținute diferite forme ale acesteia. Proiectarea regulatorului în cazul dat general constă în determinarea structurii și parametrilor prefiltrului cu f.d.t. $H_r(s)$, compensatorului din canalul direct cu f.d.t. $H_c(s)$ și a compensatorului din reacție cu f.d.t. $H_y(s)$ astfel ca sistemul închis să satisfacă cerințele de proiectare.

Principalele probleme care trebuie rezolvate sunt următoarele.

1. Determinarea configurației structurii sistemului automat: care semnale sunt măsurate, care elemente de execuție sunt excitate în cazul proceselor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri.
2. Determinarea structurii regulatorului: care proprietăți dinamice trebuie incluse în structura regulatorului.
3. Determinarea parametrilor regulatorului.

Dacă se consideră structura modificată (fig. 2.6) și se determină ieșirea $y(t)$ (pentru un sistem multivariabil) cu relația:

$$y(s) = [I + H_{PF}(s)H_c(s)H_y(s)]^{-1} H_{PF}(s)H_c(s)H_r(s)r(s) - [I + H_{PF}(s)H_c(s)H_y(s)]^{-1} H_{PF}(s)H_c(s)H_y(s)n(s) +$$

$$+[\mathbf{I} + \mathbf{H}_{PF}(s)\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_y(s)]^{-1}\mathbf{p}(s). \quad (2.26)$$

Dacă se utilizează matricea de sensibilitate a sistemului definită de relația:

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_{PF}(s)\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_y(s)]^{-1}\mathbf{H}_{PF}(s)\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_y(s) \quad (2.27)$$

și matricea complementară de sensibilitate a sistemului dată de relația:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_{PF}(s)\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_y(s)]^{-1}. \quad (2.28)$$

Expresia (2.26) cu însemnările (2.27) și (2.28) are forma:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{H}_{PF}(s)\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_r(s)\mathbf{r}(s) - \mathbf{T}(s)\mathbf{n}(s) + \mathbf{S}(s)\mathbf{p}(s). \quad (2.29)$$

Din (2.29) rezultă că stabilitatea, rejecția perturbației și atenuarea incertitudinii modelului sunt proprietăți ale reacției negative, pe când urmărirea referinței $\mathbf{r}(t)$ poate fi realizată pe calea directă. Aceasta este evident când se consideră în (2.29) f.d.t. $\mathbf{H}_y(s) = 0$ și reacția este nulă.

În aceste condiții stabilitatea sistemului necesită stabilizarea procesului condus, perturbația se însumează la ieșire procesului. Urmărirea referinței $\mathbf{r}(t)$ se asigură prin proiectarea compensatorului $\mathbf{H}_c(s)$ din structura regulatorului.

Din (2.28) rezultă că atenuarea perturbației $\mathbf{p}(t)$ și atenuarea zgomotului $\mathbf{n}(t)$ sunt obiective contradictorii. Produsul f.d.t. $\mathbf{H}_c(s)\mathbf{H}_y(s)$ se alege astfel de realizat încât să se asigure compromisul între aceste obiective.

Urmărirea referinței și rejecția perturbației pot fi realizate independent. Dacă m.d.t. $\mathbf{H}_y(s)$ a fost proiectată, atunci m.d.t. $\mathbf{H}_r(s)$ a prefiltrului se va alege în concordanță cu cerințele intrare-ieșire impuse sistemului.

Configurația generală a regulatorului cu cele trei componente incluse evidențiază un sistem cu două grade de libertate deoarece compensatorul cu f.d.t. $\mathbf{H}_c(s)$ este inclus atât în produsul

$H_c(s)H_y(s)$, cât și în produsul $H_c(s)H_r(s)$.

Structura sistemului din fig. 2.7 are de asemenea două grade de libertate. Dacă se alege $H_c(s) = I$ și $H_y(s) = I$, atunci rezultă un regulator cu un singur grad de libertate și, astfel, atenuarea perturbației $p(t)$ și urmărirea referinței $r(t)$ nu pot fi influențate independent. Această structură de sistem (fig. 2.7) simplă nu permite realizarea tuturor cerințelor de performanță simultan în raport atât cu referința, cât și în raport cu perturbația.

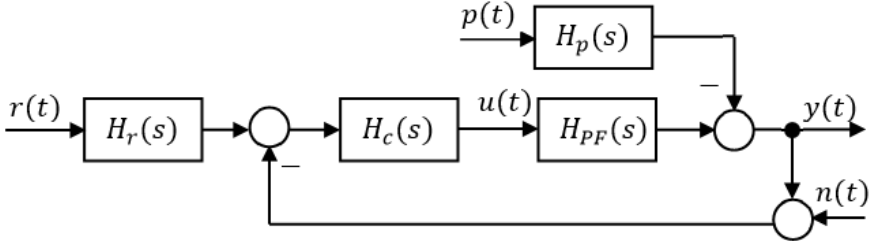


Fig. 2.7. Structura sistemului de reglare automată cu prefiltru

În structura sistemului (fig. 2.5) se consideră că f.d.t. $H_{PF}(s)$ și $H_p(s)$ sunt cunoscute ca raționale strict proprii. Problema proiectării se reduce la determinarea f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului, astfel ca să fie satisfăcute cerințele de performanță ale sistemului atât în raport cu referința $r(t)$, cât și în raport cu perturbația $p(t)$.

Ieșirea sistemului în raport cu referința $r(t)$ se descrie cu relația:

$$\begin{aligned} y_r(s) &= H_0(s)r(s) = \frac{H_R(s)H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)}r(s) = \\ &= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}r(s) = \frac{B(s)}{A(s)}r(s), \end{aligned} \quad (2.30)$$

iar ieșirea în raport cu perturbația $p(t)$ este:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)}p(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)}p(s) =$$

$$\frac{B(s)}{A(s)}p(s), \quad (2.31)$$

unde $H_0(s)$ este f.d.t. a sistemului închis a transferului referință-ieșire, $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ – f.d.t. a sistemului deschis, $H_{0p}(s)$ - f.d.t. a sistemului închis a transferului perturbație-ieșire.

Pentru asigurarea comportării dorite a sistemului în raport cu semnalele exogene $r(t)$ și $p(t)$ se impune ca f.d.t. $H_0(s)$ și $H_{0p}(s)$ ale sistemului să aibă forme dorite, care să asigure satisfacerea tuturor performanțelor în regim tranzitoriu și staționar ale sistemului.

Performanțele impuse sistemului în raport cu referința și perturbația conduc la rezultate contradictorii la proiectare și atunci se adoptă variante de proiectare de compromis.

1. O variantă de proiectare a transferului referință-ieșire a sistemului este aceea când dintre toate soluțiile care satisfac performanțele impuse răspunsului $y_r(t)$, să fie adoptată cea soluție care asigură cele mai bune performanțe pentru răspunsul $y_p(s)$.

2. O altă variantă de proiectare prevede asigurarea performanțelor impuse răspunsului $y_p(t)$ și selectarea acelei soluții, care asigură cea mai bună comportare a răspunsului în raport cu referința $y_r(t)$.

În aplicații practice se impun anumite performanțe răspunsului $y_r(t)$ la variația semnalelor treaptă ale referinței $r(t)$, care sunt semnale dure pentru sistem. O comportare bună a sistemului la aceste semnale asigură o comportare satisfăcătoare și în raport cu alte tipuri de semnale de referință și perturbații.

Dacă sunt cunoscute f.d.t. $H_{PF}(s)$ a obiectului și f.d.t. $H_0(s)$ și $H_{0p}(s)$ ale sistemului închis la acțiunea referinței și perturbației respectiv, atunci din (2.30) și (2.31) se determină f.d.t. $H_R(s)$ ale regulatorului după relațiile:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (2.32)$$

$$H_R^p(s) = \frac{H_{0p}(s)}{1-H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q_p(s)}{P_p(s)}. \quad (2.33)$$

Funcția de transfer a sistemului închis $H_0(s)$ se construiește pornind de la performanțele impuse sistemului, care în domeniul timpului presupun o anumită alocare (poziționare) a polilor și zerourilor f.d.t. $H_0(s)$.

Pentru sinteza f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului se impun condițiile:

1. *Satisfacerea cerințelor funcționale* presupun transpunerea cerințelor de performanță într-o formă dorită a f.d.t. $H_0(s)$ ceea ce conduce la poziționarea corespunzătoare a polilor-zerourilor în semiplanul stâng al planului complex (sistemul stabil).

2. *Satisfacerea cerințelor structurale*, când rezultatul proiectării f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului să fie fizic realizabil și să fie o rațională proprie sau strict proprie.

Funcția de transfer $H_d(s)$ a sistemului deschis se determină prin f.d.t. a sistemului închis după relația:

$$H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}, \quad (2.34)$$

de unde se calculează f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(s) = \frac{H_d(s)}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Dacă se notează e_0 excesul de poli-zerouri al f.d.t. $H_0(s)$ dat în forma:

$$e_0 = p_0 - z_0 \quad (2.35)$$

și excesul e_F de poli-zerouri al f.d.t. $H_{PF}(s)$ dat de relația:

$$e_F = p_F - z_F, \quad (2.36)$$

atunci condiția necesară și suficientă ca f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului să fie fizic realizabilă este:

$$e_R = e_0 - e_F \geq 0. \quad (2.37)$$

Dacă excesul de poli-zerouri al regulatorului este egal cu zero, atunci regulatorul este static, iar dacă excesul poli-zerouri al regulatorului este mai mare ca zero, atunci regulatorul este astatic (conține componenta integratoare).

În continuare, se va expune metoda de proiectare a unui sistem de reglare automată cu utilizarea metodei alocării polilor și zerourilor f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului închis.

2.5 Relațiile modelului matematic al sistemului de ordinul doi și performanțele lui

Pornind de la modelul matematic al procesului condus și performanțele impuse sistemului proiectat timpul de reglare t_{rimp} și suprareglarea σ_{imp} , se presupune că s-a construit funcția de transfer $H_0(s)$ a sistemului automat închis, care prezintă un element dinamic oscilant amortizat cu coeficientul de transfer unitar dată de relația:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}, \quad (2.38)$$

unde $\omega_n = 1/T$ este pulsația nominală a sistemului, gradul de amortizare ξ se modifică în limitele $0 < \xi < 1$. Soluționând ecuația caracteristică a sistemului, se obțin rădăcinile p_1, p_2 care sunt polii f.d.t. $H_0(s)$:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2},$$

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n, p_1 p_2 = \omega_n^2. \quad (2.38)$$

Polii p_1, p_2 se numesc polii dominanți deoarece s-au alocat astfel ca să satisfacă performanțele sistemului.

Răspunsul indicial al sistemului se prezintă cu relația:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} t + \varphi), t \geq 0, \quad (2.40)$$

unde $\varphi = \arccos\xi$.

Valoarea maximă a răspunsului indicial și a suprareglării se dau de relațiile:

$$y_{\max}(t) = 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}, \sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.41)$$

Satisfacerea performanțelor de suprareglare sunt:

$$\xi \leq \xi_{\text{imp}}, \sigma_{\text{imp}} = e^{-\pi\xi_{\text{imp}}/\sqrt{1-\xi_{\text{imp}}^2}}, \varphi \leq \varphi_{\text{imp}}, \varphi_{\text{imp}} = \arccos\xi_{\text{imp}}. \quad (2.42)$$

Dacă se admite suprareglarea sistemului $\sigma \leq 20\%$, atunci gradul de amortizare corespunde $\xi = 0,5 \dots 0,9$. Durata regimului tranzitoriu la eroarea $\varepsilon = 0,05y_{st}$ se determină:

$$|\varepsilon(t)| = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} = 0,05. \quad (2.43)$$

Soluționând (2.43) se obține valoarea timpului de reglare:

$$t_r = \frac{\ln 0,05\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi\omega_n} \approx \frac{4}{\xi\omega_n}, \xi\omega_n \geq \frac{4}{t_{r\text{imp}}}. \quad (2.44)$$

Dacă $\omega_n \geq \omega_{n\text{imp}} \approx \frac{4}{\xi t_{r\text{imp}}}$, atunci $t_r = t_{r\text{imp}} = ct$.

Dacă se impune ca eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ la intrare semnal treaptă, atunci f.d.t. a sistemului închis $H_0(0) = 1$, ceea ce conduce la condiția $p_1 p_2 = \omega_n^2$ și sistemul deschis conține un element integrator, deci va avea un pol în origine.

Exemplul 2.2. Se impun performanțele sistemului: $\sigma_{\text{imp}} = 10\%$, timpul de reglare $t_{r\text{imp}} = 10$ s, eroarea staționară $\varepsilon = 0$.

Se cere să se determine funcția de transfer $H_0(0)$ a sistemului închis.

Soluționare. 1. Se calculează gradul de amortizare impus ξ_{imp} din relația:

$$\sigma_{\text{imp}} = e^{-\pi\xi_{\text{imp}}/\sqrt{1-\xi_{\text{imp}}^2}},$$

în care se substituie datele numerice și se obține:

$$10 = e^{-\pi\xi_{\text{imp}}/\sqrt{1-\xi_{\text{imp}}^2}}$$

Ultima expresie se logaritmează și după unele transformări se obține:

$$\ln 10 = -\frac{3,14\xi_{\text{imp}}}{\sqrt{1-\xi_{\text{imp}}^2}}, 2,3026\sqrt{1-\xi_{\text{imp}}^2} = -3,14\xi_{\text{imp}},$$

$$5,30197 \cdot (1 - \xi_{\text{imp}}^2) = (-3,14\xi_{\text{imp}})^2, 15,1616\xi_{\text{imp}}^2 = 5,30197,$$

$$\xi_{\text{imp}}^2 = \frac{5,30197}{15,1616} = 0,3497 \text{ sau } \xi_{\text{imp}} = 0,5914.$$

2. Se calculează pulsația nominală din relația:

$$\omega_{\text{nimp}} = \frac{4}{\xi_{\text{imp}} t_{\text{rimp}}} = \frac{4}{0,5914 \cdot 10} = \frac{4}{5,914} = 0,6764 \text{ s}^{-1}$$

și constanta de timp va fi:

$$T = \frac{1}{\omega_{\text{nimp}}} = \frac{1}{0,6764} = 1,4784 \text{ s.}$$

3. Se determină polii f.d.t. ai sistemului după relația:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \\ &= -0,5914 \cdot 0,6764 \pm j0,6764\sqrt{1-0,3497} = -0,4 \pm j0,5455. \end{aligned}$$

4. Funcția de transfer a sistemului are forma:

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s-(-0,4+j0,5455))(s-(-0,4-j0,5455))} = \frac{0,6764^2}{s^2+2\cdot 0,5914\cdot 0,6764s+0,6764^2} = \\ &= \frac{1}{1,4784^2s^2+2\cdot 0,5914\cdot 1,4784s+1} = \frac{1}{2,1867s^2+1,7486s+1} = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, \end{aligned}$$

unde $T^2 = 2,1867$, $2\xi T = 1,7486$ ■

2.6 Repartizarea poli-zerouri ai funcției de transfer $H_0(s)$ și a imaginii semnalului $r(s)$

Sistemul automat trebuie să reproducă semnalul de referință cu erori minimale. Pentru a atinge acest scop este necesar ca $p - z$ să fie repartizați în modul următor.

1. Polii f.d.t. $H_0(s)$ să fie alocați mai departe de polii imaginii semnalului $r(s)$ și valorile lor să nu se suprapună, fiindcă apare rezonanța în sistem.

2. Zerourile f.d.t. $H_0(s)$ să fie repartizate cât mai aproape de polii lui $r(s)$ – se formează dipolul $p - z$ cu z mai aproape de origine și se reduce componenta y_{st} de la $r(s)$.

3. Polii-zerourile f.d.t. $H_0(s)$ în raport cu perturbația $p(s)$ se repartizează în așa mod ca pentru toți polii lui $r(s)$ f.d.t. $H_0(s)$ să aibă aceeași valoare: $H(p_1) \approx H(p_2) \approx \dots \approx \text{const}$ și, deci, eroarea staționară $\varepsilon \rightarrow \text{min}$.

4. Zerourile lui $H_0(s)$ se repartizează aproape de polii care sunt mai aproape de axa imaginară dipolul $p - z$, care reduce eroarea staționară $\varepsilon \rightarrow \text{min}$.

4. **Polii lui $H_0(s)$** se alocă cât mai departe de axa imaginară cu atât mai rapid se stinge componenta liberă $y_l(t)$.

2.6 Proiectarea sistemului automat prin metoda alocării poli-zerouri

Se consideră modelul matematic de ordinul doi al sistemului proiectat cu performanțele impuse. Forma generală a f.d.t. $H_0(s)$ cu doi poli dominanți și mai mulți poli și zerouri suplimentari introduși pentru a satisface atât cerințele funcționale cât și cerințele structurale ale sistemului se prezintă în forma:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{\prod_{i=1}^n p_i \prod_{j=1}^m (s+z_j)}{\prod_{j=1}^m z_j \prod_{i=1}^n (s+p_i)}. \quad (2.45)$$

Polii dominanți sunt alocați în planul rădăcinilor în așa mod ca să satisfacă performanțele impuse sistemului. Dacă performanțele impuse

sistemului nu sunt satisfăcute, atunci în modelul matematic se introduc poli-zero-uri suplimentari pentru a satisface toate performanțele sistemului. Introducerea polilor suplimentari cât mai departe pe axa reală negativă asigură satisfacerea cerințelor de realizabilitate fizică a algoritmului de conducere, fără a influența sensibil performanțele tranzitorii și staționare ale sistemului.

Dacă polii p_1, p_2 sunt polii dominanți ai sistemului determinați de valorile specifice ale parametrilor sistemului gradul de amortizare ξ și pulsația nominală ω_n , atunci răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară are forma:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}. \quad (2.46)$$

În (2.46) primii trei termeni exprimă răspunsul echivalent al sistemului de ordinul doi, iar restul termenilor prezintă contribuția $p - z$ suplimentari introduși în sistem. Când polii $|p_i| \rightarrow \infty$ atunci aportul acestor poli este neglijabil. Poziția zerourilor z_j în semiplanul stâng C^- influențează răspunsul sistemului atât prin modificarea valorilor coeficienților c_1, c_2 , cât și a coeficienților c_i .

În literatura de specialitate sunt analizate efectele introducerii unor singularități $p - z$ în structura f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului închis. Introducerea unui zero suplimentar într-un sistem de ordinul doi cu cei doi poli dominanți asigură *creșterea vitezei de răspuns, creșterea suprareglării, reducerea erorii în regim permanent în raport cu semnalele de tip rampă*.

Poli suplimentari se introduc pentru a asigura *cerințele de structură* ale sistemului. Pentru asigurarea performanțelor se introduce un zero suplimentar, iar asigurarea cerințelor de structură implică adăugarea unui pol și această configurație formează dipolul $p - z$ cu condiția $|p| > |z|$, care se alocă fie cât mai aproape de origine sau cât mai departe de origine pe axa reală negativă.

Se constată că efectul acestor singularități asupra performanțelor sistemului de ordinul doi este redus dacă valoarea $|p_i| \gg (5 \dots 7)\omega_n$.

Pentru procese cu două constante de timp cu excesul poli-zero-uri $p - z$ $e_p \leq 2$ se recomandă utilizarea unui model cu f.d.t. $H_0(s)$:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2 \frac{p}{z}(s+z)}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}, \quad (2.47)$$

unde se includ pe lângă cei doi poli dominanți p_1, p_2 un dipol $p - z$. Alocarea corespunzătoare a dipolului permite asigurarea tuturor performanțelor sistemului și îndeplinirea condiției de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare proiectat.

Introducerea unui element de corecție de anticipație-întârziere cu f.d.t.:

$$H_c(s) = k_c \frac{s+z}{s+p} \quad (2.48)$$

pentru obținerea f.d.t. dorită $H_0(s)$, se va realiza pornind de la necesitatea asigurării tuturor performanțelor sistemului în forma:

$$H_0(s) = k_c \frac{s+z}{s+p} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = k_c \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \frac{s+z}{s+p} \quad (2.49)$$

presupune selectarea coeficientului $k_c = p/z$ pentru a asigura condiția $H_0(0) = 1$ care asigură eroarea staționară $\varepsilon_{st} = 0$ la semnal treaptă unitară. Dipolul $p - z$ va fi alocat în raport cu cei doi poli dominanți fie foarte aproape sau foarte departe de origine, astfel în cât $\frac{\omega_n}{z} \leq 0,2$ și $\frac{\omega_n}{p} \leq 0,2$ cu respectarea condiției $|p| > |z|$. În aceste cazuri se urmărește ca efectul de anticipație să fie predominant pentru asigurarea performanțelor sistemului.

Pentru a demonstra modul de alocare a dipolului $p - z$ mai aproape de origine, se calculează răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară și se compară cu răspunsul sistemului de ordinul doi, care se prezintă în forma operațională:

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \frac{c_3}{s+p}, \quad (2.50)$$

unde coeficienții c_1, c_2, c_3 au valorile:

$$c_1 = -\frac{pp_2}{z} \frac{z-p_1}{p-p_1} \frac{1}{p_2-p_1}, c_2 = -\frac{pp_1}{z} \frac{z-p_2}{p-p_2} \frac{1}{p_1-p_2},$$

$$c_3 = -\frac{p_1 p_2}{z} \frac{z-p}{(p_1-p)(p_2-p)}. \quad (2.51)$$

În mod similar, răspunsul sistemului cu cei doi poli dominanți p_1, p_2 se prezintă în forma:

$$y_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{c'_1}{s+p_1} + \frac{c'_2}{s+p_2}, \quad (2.52)$$

unde coeficienții au valorile:

$$c'_1 = -\frac{p_2}{p_2-p_1}, c'_2 = -\frac{p_1}{p_1-p_2}. \quad (2.53)$$

Dacă $|p| \ll \omega_n, |z| \ll \omega_n$ și $p/z \approx 1$, atunci se pot aproxima rapoartele $\frac{z-p_1}{p-p_1} \approx 1$ și $\frac{z-p_2}{p-p_2} \approx 1$, iar coeficienții c_1, c_2 satisfac egalitățile $c_1 \approx c'_1, c_2 \approx c'_2$.

Răspunsul asociat sistemului cu trei poli și un zero este influențat de ponderea termenului $c_3 e^{pt}$ care se suprapune peste răspunsul determinat de cei doi poli dominanți. Dacă este satisfăcută condiția $|p| \ll \ll \omega_n$, atunci coeficientul c_3 din (2.51) poate fi aproximat cu relația:

$$c_3 \approx -\frac{1}{z}(z-p) \approx -1 + \frac{p}{z}, \quad (2.54)$$

iar componenta răspunsului determinată de prezența acestui pol se dă de relația:

$$y_p(t) = \left(-1 + \frac{p}{z}\right) e^{pt}. \quad (2.55)$$

Valoarea maximă a lui $y_p(t)$ se obține când $t = 0$ și că efectul acestei componente să fie cât mai redus la o creștere a suprareglării σ cu 5 % rezultă condiția pentru acest coeficient:

$$c_3 = -1 + \frac{p}{z} \leq 0,05 \text{ sau } \frac{p}{z} \leq 1,05. \quad (2.56)$$

Limita inferioară a raportului p/z se alege din condiția ca eroarea ε să fie redusă prin utilizarea acestui element de corecție.

Astfel, dacă utilizăm relația erorii de viteză:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{z}, \quad (2.57)$$

atunci se utilizează pentru limita inferioară a raportului p/z o valoare $p/z \geq 1,01$. Pentru a obține performanțele dorite pentru sistem elementul de corecție se alege sub forma:

$$H_c(s) = \frac{p s+z}{z s+p}. \quad (2.58)$$

Poziționând $p - z$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile:

$$1,01 \leq \frac{p}{z} \leq 1,05, \text{ cu } |p| \ll \omega_n, |z| \ll \omega_n. \quad (2.59)$$

Cu cât dipolul $p - z$ este alocat mai departe de polii dominanți, cu atât efectul lor asupra performanțelor este mai redus.

Astfel, analiza modului de construcție a f.d.t. dorită $H_0(s)$ a sistemului proiectat se reduce la un procedeu iterativ și interactiv. Pornind de la performanțele impuse sistemului proiectat și alocând corespunzător polii și zerourile astfel, încât să fie asigurate toate cerințele funcționale (performanțele), cât și cerințele de structură (realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare).

Pornind de la modelul matematic al procesului cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ și cerințele de performanță în forma unor criterii locale t_r, σ, ε etc., procedura de proiectare a sistemului prin metoda alocării poli și zerouri se reduce la etapele.

1. Se determină polii și zerourile f.d.t. $H_{PF}(s)$ și se calculează excesul de poli-zerouri e_p .
2. Se determină parametrii sistemului gradul de amortizare ξ și pulsația nominală ω_n pentru a alocă polii dominanți reieșind din cerințele de performanță.
3. Se verifică asigurarea tuturor performanțelor sistemului pentru f.d.t. dorită $H_0(s)$ construită numai după parametrii sistemului gradul de amortizare ξ și pulsația nominală ω_n .

4. În caz afirmativ, se testează condiția de structură a sistemului cu excesul de poli $e_0 \geq e_p$ și se determină algoritmul de reglare $H_R(s)$, care să satisfacă excesul de poli $e_0 \geq e_p$. În caz contrar, se alocă poli suplimentari cât mai departe de origine, până se asigură condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare.

5. În cazul, dacă nu sunt satisfăcute cerințele de performanță, se alocă zerouri și poli suplimentari până se asigură toate performanțele impuse sistemului.

6. Se verifică condiția de structură a sistemului pentru ambele situații posibile $p - z$ suplimentari apropiați și îndepărtați de origine care satisfac toate performanțele sistemului.

7. Se introduc poli suplimentari depărtați de origine pentru a asigura condiția de structură a sistemului.

8. Procesul de alocare $p - z$ se finalizează atunci când sunt satisfăcute performanțele, iar algoritmul obținut este fizic realizabil.

2.8 Sinteza algoritmilor de reglare în sisteme monovariabile pe baza indicatorilor de performanță

Se consideră structura convențională a unui SRA (fig. 2.8) alcătuit din partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ și regulatorul (compensatorul) cu f.d.t. $H_R(s)$, iar $r(t)$ este mărimea de referință, $u(t)$ – mărimea de reglare, $y(t)$ – mărimea reglată (ieșirea sistemului), $n(t)$ – zgomotul de măsură, deci mărimea măsurată va fi influențată de zgomot $y_n(t) = y(t) + n(t)$, $p(s)$ – perturbația care acționează la ieșirea procesului, eroarea sistemului este $\varepsilon(t) = r(t) - y(t) - n(t)$.

Mărimea de intrare în regulator este eroarea alterată de zgomot.

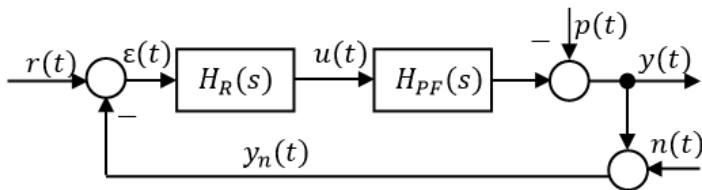


Fig. 2.8. Structura sistemului de reglare automată cu semnal zgomot

Transferurile intrare-ieșire de la mărimile externe ale sistemului la mărimea reglată $y(t)$ și respectiv la mărimea de reglare $u(t)$ se descriu în formă operațională cu relațiile:

$$y(s) = H_0(s)(r(s) - n(s)) + H_\varepsilon(s)p(s), \quad (2.60)$$

$$u(s) = H_R(s)H_\varepsilon(s)(r(s) - p(s) - n(s)), \quad (2.61)$$

$$\varepsilon(s) = H_\varepsilon(s)(r(s) - p(s)) + H_d(s)n(s), \quad (2.62)$$

unde $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis, $H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$ – f.d.t. a sistemului închis, $H_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)}$ – f.d.t. a erorii sistemului.

F.d.t. ale sistemului închis și a erorii sunt legate prin relația:

$$H_0(s) + H_\varepsilon(s) = 1. \quad (2.63)$$

În structura analizată mărimea reglată $y(t)$ trebuie să urmărească cât mai fidel mărimea de referință $r(t)$ când asupra sistemului acționează semnalele perturbante $p(t)$ și $n(t)$.

Obiectivele de bază ale SRA *urmărirea referinței și rejectia perturbațiilor* pot fi realizate impunând condiții asupra f.d.t. $H_0(s)$ și $H_\varepsilon(s)$.

Se menționează că f.d.t. $H_\varepsilon(s)$ reprezintă funcția de sensibilitate în raport cu variația parametrilor modelului obiectului de reglare. Dacă există o variație a parametrilor f.d.t. $\Delta H_P(s)$ a procesului, atunci rezultă și o variație a lui f.d.t. $\Delta H_d(s)$ a sistemului deschis și o variație a lui f.d.t. $\Delta H_0(s)$ a sistemului închis.

Funcția de sensibilitate a sistemului se prezintă cu relația:

$$S(s) = \frac{\Delta H_0(s)/H_0(s)}{\Delta H_P(s)/H_P(s)} = \frac{1}{1+H_d(s)}, \quad (2.64)$$

iar funcția complementară a sensibilității este:

$$T(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}. \quad (2.65)$$

Pentru expresiile (2.64) și (2.65) este valabilă relația:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (2.66)$$

Pentru procese conduse caracterizate de modele cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n \quad (2.67)$$

cu exces de poli-zero-uri $e_p = n - m$, se cere un algoritm de reglare de forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_{n_q} s^{n_q} + q_{n_q-1} s^{n_q-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^{n_p} + p_{n_p-1} s^{n_p-1} + \dots + p_1 s + p_0}, \quad n_q < n_p \quad (2.68)$$

în care parametrii regulatorului q_i, p_j sunt necunoscuți, iar dimensiunea polinoamelor $Q_R(s), P_R(s), q_i, p_j$ este necesar de determinat cu condiția de realizare fizică a algoritmului de reglare ca $n_q < n_p$.

Pe baza relațiilor (2.67) și (2.68) se determină f.d.t. a sistemului deschis și închis:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{Q_R(s)B_P(s)}{P_R(s)A_P(s)}, \quad (2.69)$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{Q_R(s)B_P(s)}{P_R(s)A_P(s)+Q_R(s)B_P(s)}. \quad (2.70)$$

Cerințele de performanță impuse sistemului pot fi obținute dacă acestea se transpun într-o formă a f.d.t. $H_0(s)$ și respectiv $H_d(s)$ a sistemului închis și deschis. Cerințele funcționale stabilitatea și precizia pot fi realizate asigurând celor două funcții de transfer o anumită formă.

Polinomul caracteristic al sistemului se dă de relația:

$$\begin{aligned}
 P_c(s) &= P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) = \\
 &= \alpha_l s^l + \alpha_{l-1} s^{l-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

Se analizează cerința de stabilitate a sistemului proiectat. Compensarea unor poli sau zerouri ale procesului descris prin f.d.t. $H_P(s)$ datorită incertitudinilor de modelare, cu valabilitate limitată în vecinătatea punctului de funcționare este inadmisibilă în raport cu cerința de stabilitate a sistemului.

În aceste condiții, se recomandă construcția unei f.d.t. $H_d(s)$ pornind de la performanțele impuse, astfel încât să nu se compenseze posibilele singularități instabile ale procesului $H_P(s)$. Pot fi compensați cu precauție anumiți poli stabili ai procesului, cu condiția ca aceștia să nu se încadreze printre incertitudinile parametrice ale modelului atașat procesului condus.

Se analizează cerința de precizie a sistemului în regim staționar (permanent). Sistemul de reglare automată trebuie să asigure urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor. Realizarea acestor cerințe (obiective) presupune o anumită formă a funcțiilor de transfer $H_d(s)$ și $H_0(s)$.

Semnalele exogene generalizate se descriu de f.d.t. de forma:

$$G(s) = \frac{M(s)}{L(s)}, \tag{2.72}$$

unde prin $M(s)$ se alege un element din clasa mărimilor exogene, iar $L(s)$ este polinomul care determină clasa mărimilor exogene. Pentru mărimile exogene persistente se admite implicit că polinomul $L(s)$ este instabil sau la limită de stabilitate.

Pentru structura sistemului automat dată eroarea sistemului în raport cu $H_d(s)$ și perturbația $p(s)$ se calculează cu relațiile:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} r(s) \text{ sau } \varepsilon(s) = -\frac{1}{1+H_d(s)} p(s) \tag{2.73}$$

sau în forma:

$$\varepsilon(s) = S(s) \frac{M(s)}{L(s)}. \tag{2.74}$$

Din (2.73) și (2.74) rezultă condiția pentru a obține precizia dorită $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, prezența în funcția de sensibilitate a unui număr de zerouri în origine mai mare decât dimensiunea polinomului $L(s)$.

Primele două condiții de proiectare stabilitatea și precizia sistemului se completează cu condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare. Cerința de precizie a sistemului impune condiția ca în modelul algoritmului de reglare să se regăsească modelul semnalelor exogene. Deci, pentru semnale de tip treaptă, rampă și parabolă, f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului va conține un număr de poli q în origine, unde pentru treaptă $q = 1$, pentru rampă $q = 2$ și pentru parabolă de gradul unu $q = 3$.

Pentru aceste trei condiții se obține o structură a algoritmului de reglare implementabilă dacă excesul de poli al sistemului $e_0 \geq e_P$ ($e_R \geq 0$). Astfel, f.d.t. a regulatorului poate fi construită pentru sistemul deschis în forma:

$$H_R(s) = H_d(s)H_P^{-1}(s) \quad (2.75)$$

sau pentru sistemul închis în forma:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)}H_P^{-1}(s). \quad (2.76)$$

2.9 Proiectarea sistemului automat pe baza funcțiilor de transfer $H_0(s)$ și $H_d(s)$

Pentru structura convențională a sistemului (fig. 2.5) cu modelul procesului cunoscut $H_P(s)$ și performanțele impuse sistemului proiectat timpul de reglare $t_{r_{imp}}$, suprareglajul σ_{imp} și precizia sau eroarea staționară ε_{imp} , transpunerea performanțelor tranzitorii și staționare în structura modelului sistemului închis $H_0(s)$ este etapa principală și dificilă a proiectării.

Pornind de la relațiile cunoscute dintre performanțele unui SRA de ordinul doi și polii f.d.t. $H_0(s)$ pentru un semnal de intrare treaptă unitară, se prezintă procedura iterativă și interactivă de proiectare în baza funcțiilor de transfer.

Funcția de transfer a unui sistem automat de ordinul doi cu coeficientul de transfer unitar se prezintă în forma:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.77)$$

iar pentru sistemul deschis se obține f.d.t. de forma:

$$H_d(s) = \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{1}{s} \frac{k}{Ts + 1}, \quad (2.78)$$

unde parametrii sistemului sunt: $\omega_n = 1/T$ este pulsația nominală a sistemului, $T = 1/2\xi\omega_n$ – constanta de timp, ξ - gradul de amortizare care se modifică în limitele $0 < \xi < 1$, $k = \omega_n/2\xi$ - coeficientul, care sunt calculați după performanțele impuse sistemului.

Sistemul deschis prezintă o conexiune serie a elementului de integrare (cu constnta de integrare unitară) cu elementul cu inerție de ordinul unu cu parametrii coeficientul de transfer k și constanta de timp T .

Dacă procesul este descris de f.d.t. $H_P(s) = B_P(s)/A_P(s)$ (2.42) rațională, strict proprie, stabilă și de fază minimă, atunci (2.44) f.d.t. a regulatorului se prezintă în forma:

$$H_R(s) = H_d(s)H_P^{-1}(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{(s + 2\xi\omega_n)} \frac{A_P(s)}{B_P(s)}, \quad (2.79)$$

În structura regulatorului este inclus modelul semnalului de intrare de tip treaptă unitară – descris de modelul elementului de integrare cu f.d.t $H(s) = 1/s$.

Algoritmul de reglare $H_R(s)$ obținut (2.79) este realizabil fizic pentru un proces cu excesul de poli-zerouri $e_p < 2$.

Pentru procese caracterizate cu f.d.t. $H_0(s)$ rațională, strict proprie, stabilă și de fază minimă cu excesul $e_p > 2$, atunci în f.d.t. (2.77) se introduc poli reali suplimentari p_i pe axa reală negativă cât mai departe de origine $|p_i| \gg (5 \dots 6)\xi\omega_n$, astfel încât efectul lor asupra

performanțelor se fie cât mai redus, eroarea staționară $\varepsilon = 0$, iar f.d.t. se prezintă în forma:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{\prod_{i=1}^n p_i}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}. \quad (2.80)$$

În cazurile când se dorește ridicarea vitezei de răspuns a sistemului și menținerea celorlalte performanțe în regim tranzitoriu, atunci în (2.80) se introduc zerouri z_j plasate pe axa reală negativă suficient de departe de origine, formând dipolul $p - z$ cu zeroul mai aproape de origine, astfel ca să asigure efectul anticipativ și să asigure condiția de realizabilitate fizică a algoritmului și menținând în domeniul admisibil performanțele tranzitorii ale sistemului cu f.d.t. (2.80) de forma:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{\prod_{i=1}^n p_i \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{j=1}^m z_j \prod_{i=1}^n (s + p_i)}. \quad (2.81)$$

Pentru obținerea modelelor f.d.t. de forma (2.80), (2.81) la modelul (2.77) se adaugă elemente de corecție cu efecte de anticipație-întârziere astfel ca să fie asigurate condițiile de funcționalitate și structură (performanțe și realizabilitate fizică a algoritmului de reglare proiectat) cu f.d.t. de forma:

$$H_c(s) = \frac{p}{s+p}, H_c(s) = \frac{p \frac{s+z}{z}}{z \frac{s+p}{s+p}}, H_{ci}(s) = \frac{p_i \frac{s+z_j}{z_j}}{z_j \frac{s+p_i}{s+p_i}}. \quad (2.82)$$

Compensatoarele cu f.d.t. $H_c(s) = \frac{p \frac{s+z}{z}}{z \frac{s+p}{s+p}}$, în funcție de valoarea raportului $|p|/|z|$, pot fi de tipul *anticipație-întârziere* când acest raport este supraunitar sau *întârziere-anticipație*, când acest raport este subunitar.

Introducerea elementelor de corecție (compensatoarelor) cu f.d.t. $H_c(s)$ se realizează în două variante: pe calea directă (fig. 2.9) și în bucla de compensare (fig. 2.10).

În primul caz sistemul din fig. 2.9 în canalul direct are f.d.t. de forma:

$$H_d(s) = H_{R1}(s)H_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}. \quad (2.83)$$

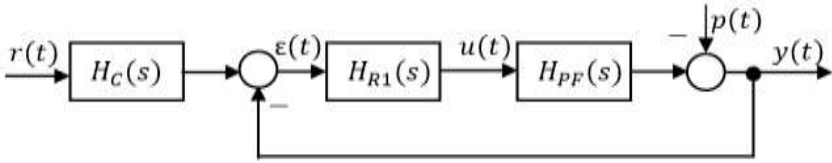


Fig. 2.9. Structura convențională a SRA cu compensator în afara buclei de reglare

Structura sistemului este o structură cu două regulatoare cu f.d.t. $H_{R1}(s)$ în bucla de reglare și cu f.d.t. $H_C(s)$ ca compensator și este un sistem automat cu două grade de libertate.

În cazul al doilea (fig. 2.10) compensatorul cu f.d.t. $H_C(s)$ este introdus pe cale directă, care asigură obținerea funcției de transfer dorite pe calea directă cu un grad de libertate.

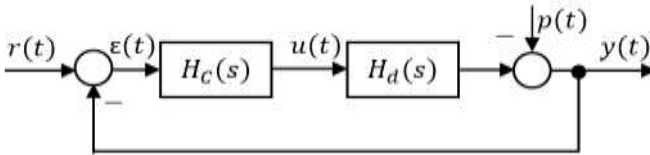


Fig. 2.10. Structura SRA cu compensator în canalul direct

Se presupune că regulatorul cu f.d.t. $H_{R1}(s)$ din (2.83) din bucla închisă este fizic realizabil, dacă excesul $p - z$ a procesului $e_p \leq 2$:

$$H_{R1}(s) = H_P^{-1}(s) \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}, \quad (2.84)$$

unde parametrii gradul de amortizare $\xi = \xi_0$ și pulsația nominală $\omega_n = \omega_{n0}$ se determină din cerințele de performanță.

Dacă nu sunt satisfăcute performanțele sistemului și realizabilitatea fizică a regulatorului, atunci în structura sistemului se introduc elemente de corecție și f.d.t. a sistemului este:

$$H_{dc}(s) = H_d(s)H_c(s). \quad (2.85)$$

Compensatorul cu f.d.t. $H_c(s)$ cu un zero și un pol se introduce pentru a obține f.d.t. a sistemului închis de forma:

$$H_{0c}(s) = H_0(s)H_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{p s + z}{s + p}. \quad (2.86)$$

Algoritmul de reglare se determină după relația (2.76) cu f.d.t. $H_{0c}(s)$ (2.86) și se obține:

$$H_R(s) = \frac{H_{0c}(s)}{1 - H_{0c}(s)} H_P^{-1}(s) = \frac{\omega_n^2 p (s + z)}{z(s + p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) - \omega_n^2 p (s + z)} \frac{A_P(s)}{B_P(s)}. \quad (2.87)$$

Incertitudinile în modelul matematic al procesului sunt preluate de regulator care conține modelul invers al procesului $H_P^{-1}(s)$. Astfel, se pot alege singularități $p - z$ ale f.d.t. $H_{0c}(s)$ care să asigure o formă minimală a f.d.t. $H_R(s)$ pentru a se reduce efortul de implementare.

Dacă se alege un compensator cu f.d.t.:

$$H_c(s) = \frac{s + z}{s + p} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s}, \quad (2.88)$$

unde $\alpha > 1$, iar $z = -\frac{1}{\alpha T}$, $p = -\frac{1}{T}$ și f.d.t. a căii directe corectate are forma:

$$H_{dc}(s) = H_d(s)H_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s}, \quad (2.89)$$

Funcția de transfer a sistemului închis corectat se calculează după relației (2.89) și se obține:

$$\begin{aligned} H_{0c}(s) &= \frac{H_{dc}(s)}{1 + H_{dc}(s)} = \frac{\omega_n^2 (1 + \alpha T s)}{\omega_n^2 (1 + \alpha T s) + \alpha s (1 + T s) (s + 2\xi\omega_n)} = \\ &= \frac{\omega_n^2 (1 + \alpha T s)}{\alpha T s^3 + \alpha (1 + 2\xi\omega_n T) s^2 + (2\alpha\xi\omega_n + \alpha T \omega_n^2) s + \omega_n^2}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

care prezintă o funcție de transfer cu trei poli și un zero.

Dacă în (2.88) $\alpha \gg 1$, atunci f.d.t. a compensatorului se aproximează cu expresia:

$$H_c(s) \approx 1 + \alpha Ts, \quad (2.91)$$

iar f.d.t. (2.90) se aproximează cu expresia:

$$H_{0c}(s) = \frac{\omega_n^2(1+\xi s)}{s^2+(2\xi\omega_n+\alpha T\omega_n^2)s+\omega_n^2}, \quad (2.92)$$

obținând un model de ordinul doi cu doi poli și un zero determinat de valorile parametrilor α și T ai elementului de corecție. Coeficientul relativ de amortizare corectat se determină din (2.92) și are forma:

$$\xi_c = \xi + \alpha \frac{T\omega_n}{2}, \quad (2.93)$$

Creșterea factorului de amortizare conduce la modificarea erorii în raport cu semnale de tip rampă la care eroarea de viteză se dă de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi_c}{\omega_n} = \frac{2}{\omega_n} \left(\xi + \alpha \frac{T\omega_n}{2} \right) = \frac{2\xi}{\omega_n} + \alpha T. \quad (2.94)$$

Un rezultat similar se obține și în cazul când se utilizează un compensator de tip derivativ ideal în cadrul buclei locale a sistemului cu structura din fig. 2.11.

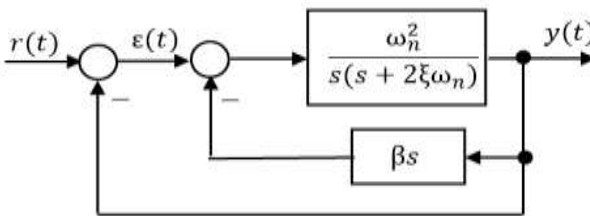


Fig. 2.11. Structura SRA cu compensator în bucla de reacție

Funcția de transfer a căii directe:

$$H_{dc}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n+\beta\omega_n^2)}, \quad (2.95)$$

iar f.d.t. a sistemului închis are forma:

$$H_{0c}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + \beta\omega_n^2)s + \omega_n^2}. \quad (2.96)$$

Din (2.96) rezultă că factorul de amortizare al sistemului corectat este mai mare și se calculează cu relația:

$$\xi_c = \xi + \frac{\beta\omega_n}{2}. \quad (2.97)$$

Eroarea de viteză în raport cu referința de tip rampă se descrie de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \beta, \quad (2.98)$$

care a crescut și conduce la o înrăutățire a evoluției sistemului în regim staționar.

În rezultatul analizei celor două variante de compensare se constată că efectul de amortizare produs de termenii αT și β este același.

Exemplul 2.3. Se dă structura sistemului cu f.d.t. a căii directe de forma [AAA]:

$$H_d(s) = \frac{144}{s(0,1s+1)}$$

cu parametrii inițiali $\omega_n^2 = 144$, $\omega_n = 12 \text{ s}^{-1}$, $\xi = 0,417$.

Se cere să se corecteze f.d.t. $H_d(s)$, astfel încât răspunsul indicial al sistemului să fie amortizat critic $\xi = 1$.

Soluționare. Se determină performanțele sistemului după pulsația proprie ω_n și coeficientul de amortizare ξ :

$$\sigma = 23.5 \%, t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0,417 \cdot 12} \approx 3,2 \text{ s}, \varepsilon_{st} = 0, \varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2 \cdot 0,417}{12} \approx 0,0695 \text{ s}.$$

În sistem se utilizează un compensator cu f.d.t. de forma:

$$H_c(s) \approx 1 + \alpha T s$$

și se obține un sistem de ordinul doi cu aceeași pulsație și cu factorul de amortizare:

$$\xi_c = \xi + \alpha \frac{T\omega_n}{2} = 1 = 1 - 0,417 = 6\alpha T; 0,583 = 6\alpha T, \alpha T = 0,0972.$$

Dacă se utilizează compensatorul derivativ în reacția locală a sistemului, atunci

factorul ξ_c are valoarea:

$$\xi_c = \xi + \frac{\beta\omega_n}{2} = 1 = 0,417 + 6\beta; 0,583 = 6\beta, \beta = 0,0972.$$

Se constată că parametrii αT și β a compensatoarelor au aceeași valoare. Eroarea de viteză pentru ambele structuri de sisteme este aceeași:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \alpha T = \frac{2 \cdot 0,417}{12} = 0,0972 + 0,1667 = 0,2639. \blacksquare$$

2.10 Sinteza algoritmilor de reglare prin metoda alocării poli-zeroouri

Se consideră procesul caracterizat prin f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.99)$$

cu exces de poli-zeroouri $e_p = n - m = n - (n - 1) = 1, m = n - 1$, se cere proiectat un algoritm de reglare de forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_n s^{n_q} + q_{n_q-1} s^{n_q-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^{n_p} + p_{n_p-1} s^{n_p-1} + \dots + p_1 s + p_0}, \quad (2.100)$$

în care coeficienții q_i, p_j sunt necunoscuți, iar dimensiunea polinoamelor $Q_R(s), P_R(s), q_i, p_j$ este necesar de determinat cu condiția de realizare fizică a algoritmului de reglare ca $n_p > n_q$.

În (2.99) și (2.100) f.d.t. sunt în formă ireductibilă și strict proprii $m \leq n$ și $n_q \leq n_p$.

Polinomul caracteristic dorit al sistemului se dă de forma:

$$\begin{aligned} P_c(s) &= P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) = \\ &= \alpha_l s^l + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \prod_1^l (s - p_i), \end{aligned} \quad (2.101)$$

unde coeficienții $\alpha_i, \overline{1, l}$ se obțin printr-o procedură de alocare corespunzătoare a polilor p_i sistemului. Dacă polinomul $P_c(s)$ este

arbitrar specificat, atunci se cere ca algoritmul de reglare sintetizat pentru f.d.t. $H_P(s)$ dată să asigure existența polinomului caracteristic în forma (2.101).

Ecuția polinomială (2.101) se numește *ecuație diofantică* deoarece pentru polinoame se aplică operațiile de adunare, scădere și înmulțire (fără împărțire).

Definiție. Dacă se consideră un sistem automat cu un singur grad de libertate cu modelul procesului (2.99) cu polinoamele $B_P(s)$, $A_P(s)$ coprime și modelul regulatorului (2.100), atunci polinomul caracteristic (2.101) este un polinom arbitrar cu gradul $l = 2n - 1$ cu existența polinoamelor $Q_R(s)$, $P_R(s)$ cu gradele $n_q = n_p = n - 1$ [1, 2]. Polinoamele $B_P(s)$, $A_P(s)$, $Q_R(s)$ și $P_R(s)$ pot fi monice.

Dacă se proiectează un regulator strict propriu, gradul minim al polinoamelor $Q_R(s)$ și $P_R(s)$ este $n_q = n - 1$ și $n_p = n$ și pentru o alegere arbitrară a polinomului caracteristic $P_c(s)$, atunci gradul său va fi $l = 2n$.

Pentru a se garanta stabilitatea internă a sistemului automat nu se admite compensarea poli-zero-uri instabili între regulator și modelul procesului.

Dacă se dorește compensarea poli-zero-uri stabili ai regulatorului și ai modelul procesului, atunci se impune ca factorii care se compensează să se includă în polinomul caracteristic.

Când se va compensa un pol $s = -p$ al modelului procesului de un zero al regulatorului, polinomul caracteristic $P_c(s)$ conține factorul $(s + p)$, iar ecuația (2.101) are soluție și factorul $(s + p)$ este comun ambelor părți ale ecuației.

Rezolvarea problemei de proiectare prin metoda alocării poli-zero-uri presupune validarea condiției ca polinoamele $B_P(s)$ și $A_P(s)$ să fie coprime, iar dimensionarea polinoamelor $Q_R(s)$ și $P_R(s)$ să fie aleasă în corelație cu dimensiunea polinoamelor $B_P(s)$ și $A_P(s)$ și cea a polinomului caracteristic dorit $P_c(s)$.

Din polinomul (2.101), prin egalarea coeficienților din partea stângă și dreaptă de pe lângă aceleași puteri ale lui s , se obține ecuația matriceală de forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n & b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_0 \\ q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix}}_q = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_l \\ \alpha_{l-1} \\ \alpha_{l-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}}_\alpha \quad (2.102)$$

sau

$$q = R^{-1}\alpha, \quad (2.103)$$

unde R este matricea procesului, q - vectorul parametrilor regulatorului, α - vectorul polilor.

Sistemul de ecuații (2.102) se soluționează și se determină coeficienții algoritmului de reglare.

Exemplul 2.4. Se consideră modelul procesului de ordinul $n = 2$ cu f.d.t. și polinoamele în forma:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2},$$

unde $A_P(s) = s^2 + 3s + 2$, cu gradul $n = 2$, polii $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $B_P(s) = 1$.

Se cere de construit algoritmul de reglare.

Soluționare. Pentru f.d.t. a regulatorului se determină gradele polinoamelor $n_q = n - 1 = 2 - 1 = 1$ și $n_p = n - 1 = 2 - 1 = 1$ și f.d.t. ia forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0}$$

cu parametrii de acord q_1 , q_0 , p_1 , p_0 necunoscuți, care se vor calcula.

Se construiește polinomul caracteristic și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned} P_C(s) &= P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) = (s^2 + 3s + 2)(p_1 s + p_0) + q_1 s + q_0 = \\ &= \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \end{aligned}$$

unde $\alpha_3 = p_1$, $\alpha_2 = 3p_1 + p_0$, $\alpha_1 = 2p_1 + 3p_0 + q_1$, $\alpha_0 = 2p_0 + q_0$.

Se consideră polinomul caracteristic dorit al sistemului automat care va avea trei poli multipli $k = 3$ în forma:

$$P_c^d(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Se alcătuieste ecuația polinomială de forma:

$$P_c^d(s) = P_c(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

din care rezultă relația matricială prin operația de egalare a coeficienților din partea stângă și partea dreaptă de pe lângă aceleași puteri ale lui s :

$$\begin{aligned} s^3: p_1 &= 1, \\ s^2: 3p_1 + p_0 &= 3, \\ s: 2p_1 + 3p_0 + q_1 &= 3, \\ s^0: 2p_0 + q_0 &= 1. \end{aligned}$$

$$\mathbf{Aq} = \mathbf{N}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea coeficienților este nesingulară și se soluționează pentru valorile p_1 , p_0 , q_1 , q_0 care au valorile: $p_1 = 1$, $p_0 = 0$, $q_1 = 1$, $q_0 = 1$.

Astfel, s-a obținut un regulator cu f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0} = \frac{s + 1}{s} = 1 + \frac{1}{s},$$

care prezintă un regulator de tipul PI cu parametrii de acord: $k_p = 1$, $T_i = 1$, $k_i = 1/T_i = 1$.

Alocarea polilor polinomului caracteristic al sistemului depinde de nesingularitatea unei matrice particulare [1, 2].■

Exemplul 2.5. Se consideră modelul procesului dat de f.d.t de forma:

$$H_p(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

cu ordinul $n_p = 2$ și polii $p_1 = -1$, $p_2 = -5$.

Se cere de sintetizat algoritmul de reglare.

Soluționare. Construim polinomul caracteristic pe baza excesului de poli-zerouri ai f.d.t a sistemului închis și a f.d.t a procesului $e_0 > e_p$ și gradul polinomului

este $n_0 = n_p + 1 = 2 + 1 = 3$. Pentru a satisface cerințele de performanță impunem polii dominați ai polinomului caracteristic $p_{1,2} = -3 \pm j3$, iar al treilea pol $p_1 = -30$ este alocat mai departe de polii dominanți ca să nu influențeze performanțele sistemului. Polinomul caracteristic are forma:

$$P_c^d(s) = (s + (3 + j3))(s + (3 - j3))(s + 30) = (s^2 + 6s + 18)(s + 30).$$

Se determină gradele polinoamelor regulatorului $n_q = n - 1 = 2 - 1 = 1$ și $n_p = n - 1 = 2 - 1 = 1$ și f.d.t. a regulatorului are forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} \Big|_{p_1=1}.$$

Se alcătuieste ecuația polinomială de forma:

$$A_P(s)P_P(s) + B_P(s)Q_P(s) = P_c^d(s),$$

$$(s + 1)(s + 5)(s + p_0) + 5(q_1 s + q_0) = (s^2 + 6s + 18)(s + 30),$$

unde parametrii necunoscuți ai regulatorului sunt q_1, q_0, p_1, p_0 .

Efectuând calculele necesare se obțin valorile numerice ale parametrilor de acord ai regulatorului: $q_1 = 2.6, q_0 = 78, p_1 = 1, p_0 = 30$ și f.d.t. a regulatorului are forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{2.6s + 78}{s + 30}. \blacksquare$$

Exemplul 2.6. Se consideră modelul procesului dat de f.d.t de forma:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{2}{(s+2)(s+5)}$$

cu $n_p = 2$, polii $p_1 = -2, p_2 = -5$.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de tipul PID astfel ca polii dominanți ai sistemului să fie $p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{5} = -2 \pm j2,236$.

Soluționare. Se alege algoritmul de tip PID cu componenta derivativă reală:

$$H_R(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s(s + p_0)}$$

cu parametrii de acord q_2, q_1, q_0, p_0 pentru a asigura eroarea staționară $\varepsilon = 0$ la semnale de referință și perturbație de tip treaptă unitară.

Polinomul caracteristic dorit este:

$$P_c^d(s) = (s - (-2 + j\sqrt{5}))(s - (-2 - j\sqrt{5}))(s + 30)^2 = \\ = (s^2 + 4s + 9)(s + 30)^2 = s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100.$$

Se alcătuieste ecuația polinomială de forma:

$$A_P(s)P_P(s) + B_P(s)Q_P(s) = P_c^d(s), \\ s(s + 2)(s + 5)(s + p_0) + 2(q_2s^2 + q_1s + q_0) = \\ = s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100, \\ s^4 + s^3(p_0 + 7) + s^2(7p_0 + 2q_2 + 10) + s(10p_0 + 2q_1) + 2q_0 = \\ = s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100,$$

după care se alcătuieste sistemul de ecuații algebrice cu parametri necunoscuți ai regulatorului PID și soluționând-o se obțin valorile numerice ale parametrilor regulatorului PID cu f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{q_2s^2 + q_1s + q_0}{s(s + p_0)} = \frac{370s^2 + 1785s + 4050}{s(s + 57)}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat și alura răspunsului este prezentată în fig. 2.12, care are performanțele: timpul de creștere $t_c = 0.06$ s, suprareglarea $\sigma = 19.8\%$, timpul de reglare $t_r = 0.21$ s, oscilații 2.■

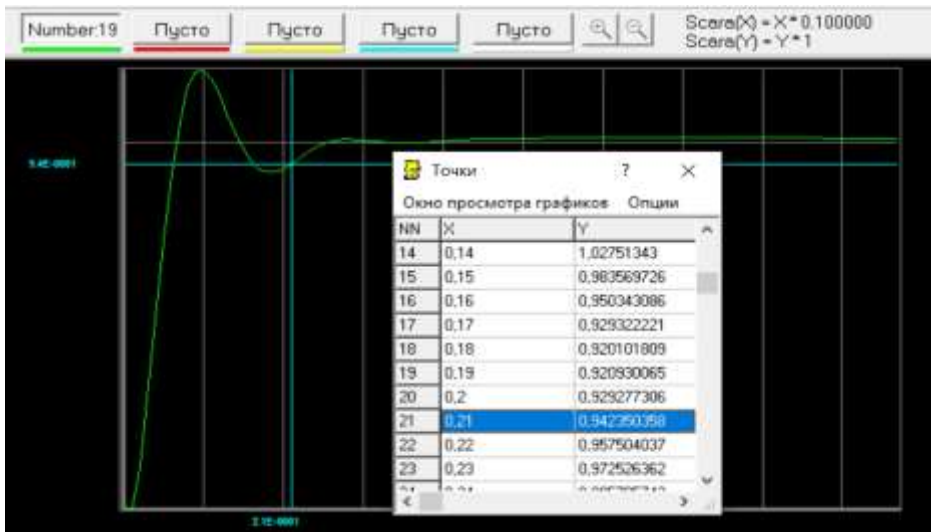


Fig. 2.12. Alura răspunsului indicial al sistemului

2.11 Proiectarea sistemului automat în raport cu perturbația

În practică sunt multe situații în care proiectarea sistemului se impune a fi efectuată în raport cu perturbația. Se presupune o structură convențională a sistemului de reglare automată dată în fig. 2.13, pentru care algoritmul de reglare se determină din relația:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)},$$
$$H_R(s) = H_{0p}^{-1}(s) - H_P^{-1}(s), \quad (2.104)$$

care se obține din f.d.t. a sistemului $H_{0p}(s)$ în raport cu perturbația.

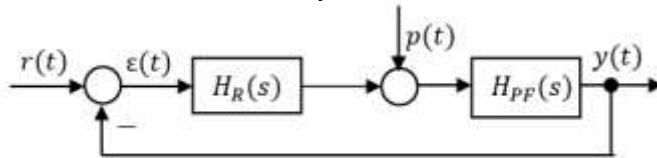


Fig. 2.13. Structura sistemului de reglare automată cu acțiunea perturbației

Construcția f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului închis perturbație – ieșire se proiectează pornind de la performanțele impuse sistemului automat. Se prezintă procedura de construcție a f.d.t. $H_{0p}(s)$ când procesul este dat de f.d.t. în forma:

$$H_{PF}(s) = \frac{k}{s(T_p s + 1)} \quad (2.105)$$

și un algoritm de reglare de tip proporțional:

$$H_R(s) = k_p. \quad (2.106)$$

Se determină f.d.t. a transferului perturbație-ieșire:

$$\begin{aligned}
 H_{0p}(s) &= \frac{H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{\frac{k}{s(T_p s+1)}}{1+\frac{k}{s(T_p s+1)}k_p} = \frac{k}{s(T_p s+1)+kk_p} = \\
 &= \frac{k/T_p}{s^2+\frac{1}{T_p}s+\frac{kk_p}{T_p}} = \frac{\omega_n^2/k_p}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{k_p} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \quad (2.107)
 \end{aligned}$$

unde $\omega_n^2 = \frac{kk_p}{T_p}$, $2\xi\omega_n = \frac{1}{T_p}$.

Se prezintă ieșirea sistemului din (2.107) pentru perturbație de tip treaptă unitară în formă operațională:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{1}{k_p} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \frac{1}{s}. \quad (2.108)$$

În regim staționar din (2.108) se obține:

$$y_{pst} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_p(s) = \frac{1}{k_p}, \quad (2.109)$$

de unde rezultă că eroarea este diferită de zero și se reduce când $k_p \rightarrow \infty$.

Astfel, sistemul în aceste condiții nu rejectează exact acțiunea perturbației de tip treaptă și sistemul funcționează cu eroare în regim staționar.

Se consideră un proces de ordinul unu cu f.d.t. de forma:

$$H_p(s) = \frac{k}{T_p s+1} \quad (2.110)$$

și un algoritm de reglare de tip PI:

$$H_{PI}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (2.111)$$

Se calculează f.d.t. a sistemului în forma:

$$\begin{aligned}
 H_{0p}(s) &= \frac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{kT_i s}{T_i T_p s^2 + T_i s(1+k k_p) + k k_p} = \\
 &= \frac{\omega_n^2 \frac{T_i s}{k_p}}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{T_i}{k_p} \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

unde parametrii sistemului ξ și ω_n se determină de relațiile:

$$\xi = \frac{1+k k_p}{2T_p} \sqrt{\frac{T_i T_p}{k k_p}}, \quad \omega_n^2 = \frac{k k_p}{T_i T_p}. \quad (2.113)$$

În cazul dat regimul staționar al sistemului $y_{pst} = 0$:

$$y_{pst} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s y_v(s) \frac{T_i}{k_p} \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = 0. \quad (2.114)$$

Relația (2.114) se realizează atunci când în structura sistemului integratorul este plasat înaintea punctului de aplicație al perturbației.

Se determină răspunsul sistemului la semnalul de perturbație – treaptă unitară:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{T_i}{k_p} \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{T_i}{k_p} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.115)$$

În domeniului timpului ieșirea sistemului este:

$$y_p(t) = \frac{T_i}{k_p} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1-\xi^2}. \quad (2.116)$$

Pentru aceeași structură de sistem determinăm f.d.t. a sistemului referință – ieșire:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{k k_p(1+T_i s)}{T_i T_p s^2 + T_i s(1+k k_p) + k k_p} = \frac{\omega_n^2(1+T_i s)}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.117)$$

unde parametrii sistemului ξ și ω_n se descriu cu expresiile (2.113).

Pentru un răspuns dorit al sistemului cu ξ , ω_n , k_p , T_i date în raport cu referința și care satisface unele performanțe în regim tranzitoriu și staționar, răspunsul la perturbație este puternic influențat de raportul T_i/k_p , care la valori mari determină valori mari ale răspunsului $y_p(t)$ și o creștere a suprareglajului σ . În raport cu referința, valori mari ale raportului T_i/k_p conduc la o creștere a suprareglajului σ și a vitezei de răspuns, dar și o reducere a gradului de stabilitate.

Pentru a proiecta un sistem automat optimal se cere a alege valorile lui ξ , pentru care să se asigure și gradul de amortizare dorit în raport cu perturbația.

Pentru un raport T_i/k_p impus amplitudinea lui $y_p(t)$ să fie limitată, **se determină valorile lui T_i , k_p** astfel ca să asigure gradul de amortizare dorit.

Procedura de proiectare este:

1. Se determină polii și zerourile f.d.t. $H_p(s)$ a procesului.
2. Se construiește f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului închis care să satisfacă performanțele în raport cu perturbația selectată.
3. Se calculează f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului după relația (2.104) astfel ca să fie fizic realizabil.
4. Se introduc elemente de corecție în structura regulatorului și se verifică asigurarea performanțelor.
5. Se analizează comportarea sistemului în raport cu referința și se ajustează parametrii algoritmului astfel ca performanțele sistemului să fie asigurate.
6. Procedura se încheie când sunt satisfăcute performanțele optime în raport cu perturbația și performanțele admisibile în raport cu referința.

2.12 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese rapide

2.12.1 Introducere

Acordarea reguletoarelor convenționale de tip PID presupune

determinarea valorilor optimale ale parametrilor k_p, T_i, T_d care asigură pentru un proces dat performanțele impuse sistemului în raport cu semnalele de referință și perturbație ce acționează asupra lui.

Din punctul de vedere al conducerii automate obiectele de conducere în funcție de valorile constantelor de timp și a timpului mort se separă în două categorii:

- 1) *procese rapide* cu constantele de timp dominante mai mici de 10 s și constante de timp parazite cu mult mai mici,
- 2) *procese lente* cu evidențierea de asemenea a constantelor de timp dominante.

Astfel, este posibilă utilizarea unor metode analitice pentru acordarea parametrilor optimali ai algoritmului de reglare de tip PID pentru procese rapide [1, 2].

Se prezintă *metoda (criteriul) modulului Kessler și metoda (criteriul) simetriei*.

2.12.2 Criteriul modulului

Pornind de la condiția ca timpul de reglare să fie minimal (banda de frecvență cât mai mare), există metode de determinare a valorilor optimale ale parametrilor de acord ai algoritmului de tip PID în funcție de valorile date ale parametrilor obiectului de reglare.

Se consideră un model matematic al obiectului de reglare dat de f.d.t. de forma:

$$H_p(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)\dots(T_ns+1)} \approx \frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s+1)(T_\Sigma s+1)}, \quad (2.118)$$

unde s-au separat constantele de timp dominante m și sunt prezentate ca produsul acestora, iar constantele de timp mici se însumează și sunt exprimate prin constanta de timp T_Σ .

Satisfacerea condițiilor menționate presupune proiectarea unui regulator descris de f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{\prod_{r=1}^m (\theta_r s+1)}{\theta_s} = \frac{k_p \prod_{r=1}^m (\theta_r s+1)}{s}, \quad (2.119)$$

iar parametrii de acord ai regulatorului se calculează cu relațiile:

$$\theta_r = T_r, \theta = 2kT_\Sigma, k_p = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2kT_\Sigma}, \quad (2.120)$$

care să compenseze cele mai mari constante de timp din structura modelului obiectului.

Se determină f.d.t. ale sistemului deschis și închis și după transformările respective se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} H_d(s) &= H_R(s)H_p(s) = \frac{k_p \prod_{r=1}^m (\theta_r s + 1)}{s} \frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)(T_\Sigma s + 1)} = \\ &= \frac{1}{2T_\Sigma s (T_\Sigma s + 1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} = \frac{1}{2T_\Sigma^2 s^2 + 2T_\Sigma s + 1}. \quad (2.122)$$

Din relația (2.122) rezultă că performanțele sistemului sunt determinate de constanta de timp parazită T_Σ . Funcția de transfer (2.122) prezintă un model echivalent al sistemului de ordinul doi cu parametrii: coeficientul de amortizare $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ și pulsația $\omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2T_\Sigma}$. Performanțele sistemului în regim tranzitoriu și staționar cu eroarea staționară $\varepsilon = 0$ în raport cu semnalele de referință și perturbație se determină cu relațiile:

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 4,3 \%, t_r \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 8T_\Sigma. \quad (2.123)$$

În regim staționar eroarea staționară $\varepsilon = 0$ în raport cu semnalele de referință și perturbație, deoarece regulatorul conține modelul intern al semnalelor exogene de tip treaptă unitară (prezența integratorului în structura regulatorului).

Pentru semnale de tip rampă eroarea în regim staționar este diferită de zero și se dă de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k_v} = 2T_\Sigma. \quad (2.124)$$

Alegerea și acordarea regulatorului și obținerea f.d.t. (2.122) a sistemului închis asigură coeficientul de amortizare $\xi = 0,707$, iar banda de frecvență este egală cu pulsația nominală $\omega_B = \omega_n = \sqrt{2}/2T_\Sigma = 0,707/T_\Sigma$. Deci cu cât componenta T_Σ are o valoare mai redusă, cu atât lărgimea de bandă este mai mare.

Se proiectează un regulator de tip PID cu f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}{s(\theta_3 s + 1)}, \quad (2.125)$$

pentru un model al obiectului cu f.d.t.:

$$H_p(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \quad (2.126)$$

și parametrii regulatorului se calculează cu relațiile:

$$\theta_1 = T_1, \theta_2 = T_2, k_p = \frac{1}{2kT_\Sigma'}, \quad (2.127)$$

unde $T_\Sigma' = T_\Sigma + \theta_3 = T_\Sigma + 0.1 \min(T_1, T_2)$.

Exemplul 2.7. Se consideră modelul obiectului de reglare cu f.d.t. de forma:

$$H_p(s) = \frac{4}{(25s+1)(31s+1)(9s+1)(5s+1)}.$$

Se cere să se proiecteze algoritmul de reglare pentru modelul obiectului dat.

Soluționare: Constantele de timp dominante sunt $T_1 = 25$ s, $T_2 = 31$ s, iar constantele de timp parazite sunt $T_3 = 9$ s, $T_4 = 5$ s și se aproximează cu constanta sumară $T_\Sigma = T_3 + T_4 = 9 + 5 = 14$ s și modelul obiectului aproximat este:

$$H_p(s) \approx \frac{4}{(25s+1)(31s+1)(14s+1)}.$$

Fiindcă modelul obiectului conține două constante dominante de timp, se alege f.d.t. a regulatorului de tip PID de forma:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}{s(\theta_3 s + 1)}$$

și se calculează parametrii de acord:

$$\theta_1 = T_1 = 25 \text{ s}, \theta_2 = T_2 = 31 \text{ s}, \theta_3 \approx 0.1 \cdot 25 = 2.5 \text{ s},$$

$$T'_\Sigma = T_\Sigma + \theta_3 = 14 + 2.5 = 16.5 \text{ s},$$

$$k_p = 1/(2kT'_\Sigma) = 1/(2 \cdot 4 \cdot 16.5) = \frac{1}{132} = 0.0076.$$

Funcția de transfer a regulatorului are forma:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}{s(\theta_3 s + 1)} = \frac{0.0076(25s + 1)(31s + 1)}{s(2.5s + 1)}.$$

Se calculează banda de frecvență:

$$\omega_B = \omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2T'_\Sigma} = \frac{0.707}{T'_\Sigma} = \frac{0.707}{16.5} = 0.0428 \text{ s}^{-1}, f = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{0.04284}{2 \cdot 3.14} = 0.0068 \text{ Hz}.$$

Se determină performanțele sistemului cu gradul de amortizare $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ după relațiile (2.123):

$$\text{Suprareglarea } \sigma = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-3.14 \cdot 0.707/\sqrt{1-0.707^2}} = 4.465 \text{ \%}.$$

$$\text{Timpu de reglare } t_r \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.707 \cdot 0.0428} = \frac{4}{0.0303} = 132 \text{ s.} \blacksquare$$

2.12.3 Criteriul simetriei

Criteriul simetriei se utilizează pentru alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese rapide la acțiunea semnalelor externe de tip rampă și se impune ca urmărirea referinței să se realizeze fără eroare.

Se presupune că procesul este descris:

$$\begin{aligned} H_p(s) &= \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \approx \frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)(T_\Sigma s + 1)} \approx \\ &= \frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s)(T_\Sigma s + 1)}, \end{aligned} \quad (2.128)$$

unde în produsul termenilor cu constante de timp mari s-a neglijat

unitatea care este mult mai mică decât constanta de timp și constantele de timp mici s-au prezentat prin constanta sumară.

Acest criteriu recomandă de utilizat un regulator cu f.d.t. alcătuită din produsul a m polinoame de ordinul unu de forma:

$$H_R(s) = \frac{(\theta_c s + 1)^m}{\theta_s} \quad (2.129)$$

Parametrii de acord ai regulatorului pentru o evoluție optimă a sistemului în raport cu semnale rampă se recomandă de calculat cu relațiile [1, 2]:

$$\theta_c = 4mT_\Sigma, \theta = 2kT_\Sigma \frac{\theta_c^m}{\prod_{i=1}^m T_i} \quad (2.130)$$

Se determină f.d.t. a sistemului deschis și închis și, după unele transformări, se obțin expresiile de forma:

$$H_d(s) = H_R(s)H_p(s) = \frac{(\theta_c s + 1)^m}{\theta_s} \frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s)(T_\Sigma s + 1)} = \frac{4T_\Sigma s + 1}{8T_\Sigma^2 s^2 (T_\Sigma s + 1)}, \quad (2.131)$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} = \frac{4T_\Sigma s + 1}{8T_\Sigma^3 s^3 + 8T_\Sigma^2 s^2 + 4T_\Sigma s + 1}. \quad (2.132)$$

Din analiza relației (2.132) rezultă că performanțele sistemului sunt influențate numai de constanta de timp parazită T_Σ și eroarea în regim staționar este nulă la semnal de referință rampă și o comportare nesatisfăcătoare a sistemului în raport cu semnalul treaptă unitară.

Funcția de transfer (2.132) are o configurație din trei poli și un zerou:

$$H_0(s) = \frac{4T_\Sigma s + 1}{8T_\Sigma^3 s^3 + 8T_\Sigma^2 s^2 + 4T_\Sigma s + 1} = \frac{\frac{\omega_n p}{z}(s+z)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)}, \quad (2.133)$$

unde coeficientul de amortizare ξ , pulsația nominală ω_n , zeroul și cei doi poli multipli se exprimă prin constanta de timp parazită:

$$z = -\frac{1}{4T_{\Sigma}}, \xi = 0,5, \omega_n = \frac{1}{2T_{\Sigma}}, p_{1,2} = -\frac{1}{2T_{\Sigma}}.$$

2.13 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese lente

Se consideră procese lente care se caracterizează prin modele aproximative cu constante de timp mai mari de 10 s și care conțin și componenta cu timp mort. Pornind de la modelul procesului și performanțele impuse sistemului, pentru proiectarea algoritmului de reglare există mai multe criterii.

Dacă în funcționarea unui proces există componenta timpului mort, atunci se recomandă atât alegerea algoritmilor de reglare liniari de tipul PI, PID, cât și algoritmi neliniari bipoziționali sau tripoziționali.

Componenta derivativă D se include în structura algoritmului pentru un proces cu timp mort numai dacă se obține o îmbunătățire a performanțelor sistemului. Pentru valori ale raportului $\tau/T < 0,2$ la cerințe de performanță nu ridicare se recomandă algoritmi neliniari (bipoziționali), iar pentru raportul $\tau/T < 1$ se recomandă regulator cu acțiune continuă cu componente P, I, D și pentru raportul $\tau/T > 1$ se recomandă regulator numeric.

Pentru procese cu constanta de timp medie și timp mort redus cu acțiunea perturbației cu amplitudine medie și frecvență joasă, se recomandă alegerea unui regulator bipozițional sau un regulator de tip P. Pentru perturbații cu frecvență mai mare și cu diverse amplitudini se recomandă regulator PI, iar pentru procese cu mai multe constante de timp și timp mort redus cu acțiunea perturbațiilor se recomandă un algoritm PID.

Pentru procese cu două și mai multe constante de timp dominante se recomandă algoritm PI sau PID, care asigură eroarea staționară $\varepsilon = 0$ și o viteză de răspuns mai ridicată. Pentru reglări de nivel se recomandă utilizarea algoritmului de tip PI. Pentru reglări de presiune se recomandă algoritmi PI, parametrii cărora sunt diferiți pentru gaze și lichide, deoarece constanta de timp la lichide este mai redusă decât la gaze. La reglări de debite și amestecuri de fluid, care au constante de timp mici și

o amplificare mare se recomandă algoritmi PI. La reglări de temperatură cu raportul τ/T mare se recomandă algoritmi PID.

În tabelele 2.1 și 2.2 se prezintă recomandări la alegerea tipului de algoritm de reglare pentru diverse modele de f.d.t. ale procesului cu parametrul tehnologic reglat.

Tabelul 2.1. Alegerea algoritmului de reglare după modelul funcției de transfer al procesului

Nr crt	Funcția de transfer a procesului	Tipul algoritmului de reglare			
		P	PI	PD	PID
1	$\frac{k}{Ts + 1}$	Da	Da, dacă se impun cerințe asupra erorii staționare	Da, dacă T este precis determinată	Nu
2	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	Da, cu performanțe reduse	Da, cu restricții asupra amplificării	Se utilizează rar	Da, cu restricții asupra amplificării
3	$\frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}$	Rar utilizat, performanțe scăzute	Da	Se utilizează rar	Da
4	$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$	Da, când raportul $\frac{\tau}{T} < 0,1$ și eroarea staționară este în limite admisibile	Da	Foarte rar	Neconvenabil, când τ este produs de timpul de transport și există zgomot
5	$ke^{-\tau s}$	Nu	Nu	Nu	Nu
6	$\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	Nu	Da	Nu	Rar, în funcție de tipul τ și de efectul

					componentei D
--	--	--	--	--	------------------

Tabelul 2.2. Alegerea algoritmului de reglare după parametrul reglat

Nr. crt.	Parametrul reglat	Tipul algoritmului de reglare			
		P	PI	PD	PID
1	Temperatura	Da, dacă raportul $\frac{\tau}{T} < 0,1$	Da	Da	Da, în funcție de raportul $\frac{\tau}{T}$
2	Presiune	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	În cazuri speciale	-
3	Debit	Nu	Da	Nu	-
4	Nivel	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	-	Da

Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procese cu timp mort este o problemă dificilă la determinarea cu precizie a timpului mort, cât și a influenței nefavorabile a timpului mort asupra stabilității și regimului tranzitoriu a sistemului automat. Pot fi utilizate diverse metode de calcul al algoritmului de reglare pentru procese cu timp mort.

2.14 Alegerea și acordarea reguletoarelor prin metode experimentale

2.14.1 Metode empirice

Metodele empirice prezintă relații stabilite experimental pentru structura sistemului între parametrii regulatorului P, PI, PID și parametrii modelului obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort și modelul obiectului cu astatism și timp mort pentru procese tranzitorii ale sistemului: aperiodice, oscilante amortizate cu suprareglare $\sigma \leq 20\%$ și procese optime.

În tabelul 2.3 se prezintă relații empirice de acordare a parametrilor reguletoarelor PI și PID pentru modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort:

$$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}, \quad (2.134)$$

unde k este coeficientul de transfer, T – constanta de timp, τ – timpul mort.

Tabelul 2.3. Relațiile empirice de acordare a parametrilor reguletoarelor PI, PID

Regulator PI				Regulator PID			
Proces tranzitoriu				Proces tranzitoriu			
Aperiodic		Oscilant		Aperiodic		Oscilant	
Nr. crt.	Relația	Nr. crt.	Relația	Nr. crt.	Relația	Nr. crt.	Relația
1	$k_p = \frac{0.6T}{k\tau}$, $T_i = 0.6T$	5	$k_p = \frac{0.7T}{k\tau}$, $T_i = 0.7T$	1	$k_p = \frac{1.5T}{k\tau}$, $T_i = 2.5\tau$, $T_d = 0.5\tau$	5	$k_p = \frac{1.2T}{k\tau}$, $T_i = 2\tau$, $T_d = 0.4\tau$
2	$k_p = \frac{0.35T}{k\tau}$, $T_i = 1.2\tau$	6	$k_p = \frac{0.6T}{k\tau}$, $T_i = \tau$	2	$k_p = \frac{0.95T}{k\tau}$, $T_i = \tau$, $T_d = 0.5\tau$	6	$k_p = \frac{1.2T}{k\tau}$, $T_i = 1.35\tau$, $T_d = 0.47\tau$
3	$k_p = \frac{0.9T}{k\tau}$, $T_i = 3.3\tau$	7	$k_p = \frac{0.8T}{k\tau}$, $T_i = 3\tau$	3	$k_p = \frac{0.95T}{k\tau}$, $T_i = 2.4\tau$, $T_d = 0.4\tau$	7	$k_p = \frac{1.2T}{k\tau}$, $T_i = 2\tau$, $T_d = 0.4\tau$
4	$k_p = \frac{T}{k\tau}$, $T_i = T$	8	$k_p = \frac{0.6T}{k\tau}$, $T_i = 0.6T$	4	$k_p = \frac{0.95T}{k\tau}$, $T_i = 2.4\tau$	8	$k_p = \frac{1.2T}{k\tau}$

					$T_d = 0.42\tau$		$T_i = 2.4\tau,$ $T_d = 0.42\tau$
--	--	--	--	--	------------------	--	--------------------------------------

Exemplul 2.8. Se dă modelul obiectului de reglare cu funcția de transfer:

$$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

cu parametrii $k = 0,3$, $T = 7$ s, $\tau = 2$ s.

Se cere să se acordeze parametrii regulatorului PI și PID după metodele empirice.

Soluționare. Funcțiile de transfer ale regulatorului PI și PID se dau în forma:

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s}, H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s.$$

Se determină parametrii k_p , T_i a regulatorului PI după relațiile variantei 8 din tabelul 2.3.

Coefficientul componentei proporționale P se dă de relația:

$$k_p = \frac{0.6T}{k\tau} = \frac{0.6 \cdot 7}{0.3 \cdot 2} = \frac{4.2}{0.6} = 7.$$

Constanta de timp de integrare a componentei integrale I se determină cu relația:

$$T_i = 0.6T = 0.6 \cdot 7 = 4.2 \text{ s}, k_i = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{4.2} = 1.6667.$$

Se determină parametrii k_p , T_i , T_d a regulatorului PID după relațiile variantei 5 din tabelul 2.3.

Coefficientul componentei proporționale P:

$$k_p = \frac{1.2T}{k\tau} = \frac{1.2 \cdot 7}{0.3 \cdot 2} = \frac{8.4}{0.6} = 14.$$

Constanta de timp de integrare a componentei integrale I:

$$T_i = 2\tau = 2 \cdot 2 = 4 \text{ s}, k_i = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{4} = 1.25.$$

Constanta de timp de derivare a componentei derivate ideale D:

$$T_d = 0.4\tau = 0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ s.} \blacksquare$$

2.14.2 Criteriile experimentale de acordare a reguletoarelor

Dificultățile care intervin în procedura de identificare cu precizie a proceselor lente, comportarea neliniară în procese și caracterul aleatoriu al unor perturbații care acționează asupra proceselor limitează utilizarea metodelor analitice de acordare a reguletoarelor.

Metodele practice de acordare se bazează pe experiența acumulată în alegerea și acordarea reguletoarelor de tipul PID. Pentru un sistem dat în regim de funcționare cu mărimea de referință și cu mărimile perturbatoare menținute constante, prin modificarea parametrilor de acord până se atinge limita de stabilitate și se determină parametrii oscilațiilor întreținute amplitudinea și frecvența. Pe baza acestor parametri se determină valorile optime ale parametrilor de acord ai reguletoarelor. Se utilizează criteriile experimentale metoda *Ziegler-Nichols* și metoda *Offereins* [AA].

2.14.3 Metoda Ziegler – Nichols

În multe cazuri procesele industriale există sau sunt cunoscute modelele matematice ale părții fixate și, deci, acordarea se efectuează în baza criteriilor experimentale. Una din cele mai larg utilizată metodă de acest tip este metoda Ziegler – Nichols [1, 2].

Metoda Ziegler-Nichols se aplică la acordarea reguletoarelor de tip PID pentru procese lente la care perturbațiile sunt determinate de sarcină și au o durată mare. Pentru structura sistemului cu un reguletor PID se fixează la valoarea maximă parametrul componentei integrate $T_i \rightarrow \infty$ și la valoarea minimă parametrul componentei derivate $T_d = 0$ și se modifică valoarea parametrului componentei proporționale k_p până ce la ieșirea sistemului se instalează oscilații întreținute, care prezintă regimul critic al sistemului, deci sistemul este la limită de stabilitate. Pentru acest regim critic al sistemului se stabilesc parametrii critici ai oscilațiilor coeficientul critic k_{cr} și perioada oscilațiilor T_p . În baza parametrilor critici k_{cr}, T_p se calculează valorile optime ale parametrilor de acord ai reguletoarelor P, PI, PID după relațiile [AA]:

Pentru reguletorul P:

$$k_{popt} = 0.5 k_{cr}. \quad (2.135)$$

Pentru regulatorul PI:

$$k_{popt} = 0.45k_{cr}, T_{iopt} = 0.8 T_p \text{ sau } k_{iopt} = \frac{1}{T_{iopt}}. \quad (2.136)$$

Pentru regulatorul PID:

$$k_{popt} = 0.75k_{cr}, T_{iopt} = 0.6 T_p \text{ sau } k_{iopt} = 1.667/T_p, \\ T_d = k_d = 0.125T_0. \quad (2.137)$$

Aceste relații s-au obținut din condiția ca la ieșirea sistemului să se stabilească raportul 1/4 dintre amplitudinea celei de-a doua oscilații pozitive și amplitudinea primei oscilații pozitive, ceea ce formează amortizarea într-un sfert de amplitudine.

Dezavantajele metodei Ziegler-Nichols:

1. Metoda nu se aplică pentru modele de procese cu inerție mai mici de ordinul 3.
2. Metoda nu se aplică pentru procese care nu au regim staționar.
3. Relațiile de calcul ai parametrilor regulatorului nu se pot optimiza.

Metoda Offereins permite determinarea valorilor parametrilor optimi de acord utilizând valorile critice ale sistemului coeficientul critic k_{cr} și perioada oscilațiilor T_p . Pentru un răspuns optim al sistemului parametrul regulatorului PI se calculează cu relațiile:

$$k_p = 0,5k_{cr} \text{ și } T_i = 3T_{i0},$$

unde T_{i0} este valoarea limitată a lui T_i pentru care se depășește limita de stabilitate menținând valoarea lui k_p , ceea ce mărește raportul k_p/T_i până la depășirea limitei de stabilitate și se reține valoarea lui T_{i0} .

În cazul utilizării regulatorului PID, acordarea se pornește de la regulatorul PI, apoi prin încercări se utilizează componenta derivativă D care ar ridica performanțele sistemului.

Efectuarea experimentelor presupune însă atingerea limitei de stabilitate, proces care poate dura uneori nepermis de mult sau poate impune funcționarea sistemului într-un regim nefavorabil.

Din aceste motive s-au dezvoltat și alte metode specifice pentru acordarea reguletoarelor evitând neajunsurile metodelor indicate mai sus.

2.15 Acordarea reguletoarelor cu aplicarea criteriilor integrale

Procedura de acordare a algoritmilor de reglare utilizează criteriile integrale prin minimizarea unui indice integral de performanță, construit cu ajutorul unei funcționale care depinde de eroarea dinamică a sistemului închis. Un indice integral asociază sistemului automat un număr pozitiv, care apreciază evoluția globală și caracterizează implicit performanțele dinamice și staționare ale sistemului studiat.

Se consideră un sistem automat stabil cu un răspuns indicial aperiodic $h(t)$ la semnal treaptă unitară $r(t) = 1(t)$ și eroare staționară nulă (fig. 2.13).

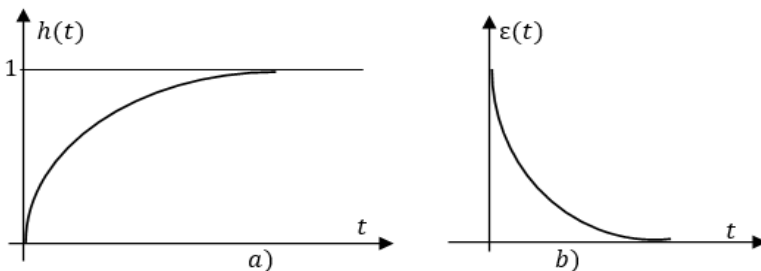


Fig. 2.13. Răspunsul indicial aperiodic *a)* și eroarea sistemului *b)*

Evoluția în timp a erorii se obține prin relația:

$$\epsilon(t) = 1(t) - h(t), t \geq 0. \quad (2.138)$$

Indicele de calitate se formează în baza operatorului $L(\varepsilon(t), t)$ care este funcție de două argumente eroarea $\varepsilon(t)$ și timpul t :

$$J = \int_0^T L(\varepsilon(t), t) dt, \quad (2.139)$$

unde se variază aceste argumente astfel pentru a construi sisteme automate cu performanțe ridicate.

Ca indice de calitate pentru procese aperiodice se calculează numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_0 = \int_0^\infty \varepsilon(t) dt \rightarrow \min. \quad (2.140)$$

Pentru procese oscilante se utilizează criteriul numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_1 = \int_0^\infty |\varepsilon(t)| dt \rightarrow \min \quad (2.141)$$

sau integrala pătratică de forma:

$$J_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (2.142)$$

care pot fi aplicate și pentru procese aperiodice.

Se utilizează și criterii complexe care sunt convergente pe orizont infinit.

Astfel, criteriul integral de forma:

$$J_3 = \int_0^\infty t |\varepsilon(t)| dt \rightarrow \min \quad (2.143)$$

și realizează o pondere a modulului erorii cu factorul de timp t care are o influență mai mare asupra erorii cu cât valorile timpului sunt mai mari.

Pentru a folosi și o limitare a vitezei de variație a erorii în expresia integrandului se introduce un termen care conține și derivata erorii și atunci criteriul are forma:

$$J_4 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \alpha \dot{\varepsilon}^2(t)] dt \rightarrow \min, \quad (2.144)$$

unde coeficientul α este o constantă de ponderare, care se măsoară în condiții de omogeneitate dimensională în unități de timp.

O formă generalizată a criteriului integral va fi:

$$J_5 = \int_0^{\infty} L(\varepsilon(t), t) dt = \int_0^{\infty} f(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \ddot{\varepsilon}(t), \dots, \varepsilon^n(t)) dt \rightarrow \min, \quad (2.145)$$

unde $f(*)$ este o funcțională pozitiv definită, deoarece pentru argumente care nu sunt simultan nule la valori pozitive și este convergentă la condiția că eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$.

În comparație cu performanțele dinamice definite prin criterii locale $\varepsilon, \sigma, t_r, \dots$, care se referă la valori ale erorii în anumite momente ale timpului, criteriile integrale reprezintă indici sintetici de calitate ale sistemului, care caracterizează în ansamblu regimul tranzitoriu și oferă o informație globală complexă despre sistemul studiat.

Astfel, procedura de proiectare constă în determinarea algoritmului de reglare, care satisface o expresie de forma (2.145).

Criteriile integrale pot asigura optimizarea regimurilor dinamice în raport cu semnalele de intrare de referință $r(t)$ și perturbație $p(t)$ de tip treaptă.

Dacă sistemul automat are o comportare bună în raport cu aceste semnale $r(t)$ și $p(t)$, atunci sistemul va avea și o comportare satisfăcătoare în raport cu alte tipuri de variații ale semnalelor $r(t)$ și $p(t)$.

În practica proiectării sistemului automat prin utilizarea criteriilor integrale, calculul conduce la exprimarea directă a indicelui de performanță, care substituie operația de integrare în domeniului timpului.

Avantajul esențial al acestei proceduri apare în faza finală de minimizare a indicelui integral, care se tratează ca o problemă de optimizare parametrică, care are o rezolvare numerică soluționată ca proiectare asistată de calculator.

Exprimarea directă a criteriilor integrale presupune obținerea indicelui de performanță care depinde direct de parametrii algoritmului de reglare.

Explicitatea indicelui de performanță integral în raport cu parametrii algoritmului de reglare se reduce la transformări integrale echivalente din domeniul timpului în domeniul frecvențelor în baza teoremei de trecere Parseval [AA].

Se prezintă cel mai des utilizat criteriu integral de formă pătratică (2.142) [AA]:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \varepsilon(t) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \{L^{-1}[\varepsilon(s)]\} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) e^{st} ds \right\} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) [\varepsilon(t) e^{st} dt] ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) \varepsilon(-s) ds. \tag{2.146}
 \end{aligned}$$

Dacă semnalul de referință este treaptă unitară $r(t) = 1(t)$, atunci f.d.t. a erorii în transformata Laplace este:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} \frac{1}{s} = 1(s) - y(s) = \frac{1}{s} - H_0(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} [1 - H_0(s)], \tag{2.147}$$

unde $H_d(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis, iar $H_0(s)$ – f.d.t. a sistemului închis.

Algoritmul de reglare este precizat și intervine în exprimările f.d.t. $H_d(s)$ și $H_0(s)$ prin parametrii regulatorului în forma unor variabile independente.

Se calculează expresia (2.146) cu (2.147) și se obține expresia:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)] r(s) r(-s) ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)] \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s}\right) ds. \tag{2.148}
 \end{aligned}$$

Se presupune că f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis este raportul polinoamelor:

$$H_d(s) = \frac{M(s)}{sN(s)} \quad (2.149)$$

cu un pol în origine pentru ca eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ și gradul lui $M(s)$ este m , iar a lui $sN(s) - n$ și se impune condiția de $m < n$.

Funcția de transfer a sistemului închis este:

$$H_0 = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)}. \quad (2.150)$$

Se calculează eroarea sistemului (2.147) cu f.d.t. (2.150):

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \frac{1}{s} [1 - H_0(s)] = \left[1 - \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)} \right] \frac{1}{s} = \frac{N(s)}{sN(s)+M(s)} = \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \end{aligned} \quad (2.151)$$

cu condiția că $m = n - 1$.

Integrala J_2 din (2.148) se calculează prin integrarea a unor fracții raționale în s și $-s$ sub forma:

$$J_2 = \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s) B(-s)}{A(s) A(-s)} ds. \quad (2.152)$$

Valoarea integralei J_2 din (2.152) se calculează sub formă directă după algoritmul următor.

1. Se calculează cu ajutorul coeficienților a_i din relația (2.151) determinantul de forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & -a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \end{vmatrix}. \quad (2.153)$$

2. Se calculează determinanții particulari $\Delta_k, k = 0, 1, 2, \dots, n -$

$= 1 = m$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.154)$$

3. Se calculează mărimile B_0, B_1, \dots, B_m după relațiile:

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0^2, \\ B_1 &= b_1^2 - 2b_0b_2, \\ B_2 &= b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4, \\ &\dots\dots\dots(2.155) \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k-1}b_{k+1} + 2b_{k-2}b_{k+2} + \dots + 2(-1)^k b_0b_{2k}, \\ &\dots\dots\dots \\ B_m &= b_m^2. \end{aligned}$$

4. Se calculează în formă directă indicele de performanță J_2 cu relația:

$$J_2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta_k - 2b_0b_1}{2a_0^2 \Delta} = f(q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (2.156)$$

unde q_1, q_2, \dots, q_r sunt parametrii algoritmului de reglare, care sunt funcții de parametrii obiectului de reglare:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(b_i, a_j), \\ q_2 &= f_2(b_i, a_j), \\ &\dots\dots\dots \\ q_r &= f_r(b_i, a_j), \end{aligned} \quad (2.157)$$

Pentru soluționarea problemei de optimizare parametrică din expresia (2.156)-(2.157) se obține un sistem de ecuații algebrice cu parametrii regulatorului necunoscuți q_1, q_2, \dots, q_r :

$$\frac{\partial J}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_2} = 0, \tag{2.158}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_r} = 0$$

și aplicând metode de minimizare se determină parametrii regulatorului.

Dacă se presupune că se va acorda regulatorul de tipul PID, atunci expresia indicelui J_2 din (2.156) este o expresie neliniară în funcție de parametrii regulatorului:

$$J_2 = f(k_p, T_i, T_d). \tag{2.159}$$

La ultima etapa de proiectare se minimizează relația (2.158) în spațiul parametrilor regulatorului k_p, T_i, T_d și se rezolvă problema:

$$J_2 = f(k_p, T_i, T_d) \rightarrow \min \tag{2.160}$$

cu eventuale restricții impuse de realizabilitatea fizică a regulatorului, sau de condiții suplimentare de funcționare a sistemului automat închis, stabilitate etc. și se obține sistemul:

$$\begin{aligned} k_{pmin} &\leq k_p \leq k_{pmax}, \\ T_{imin} &\leq T_i \leq T_{imax}, \\ T_{dmin} &\leq T_d \leq T_{dmax}. \end{aligned} \tag{2.161}$$

Prin metode numerice cunoscute de optimizare parametrică se obține soluția optimă a tripletului (k_p^*, T_i^*, T_d^*) care asigură optimizarea regimului dinamic al sistemului automat în circuit închis:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial k_p} &= 0, \\ \frac{\partial J}{\partial T_i} &= 0, \\ \frac{\partial J}{\partial T_d} &= 0.\end{aligned}\tag{2.162}$$

În același mod se rezolvă și problema de optimizare pentru un criteriu de tipul (2.146) dat în forma:

$$J_4 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \alpha \dot{\varepsilon}^2(t)] dt = J_2 + J_2',\tag{2.163}$$

unde pentru al doilea termen J_2' din (2.163) prin aplicarea transformatei Laplace la expresia derivatei erorii se obține:

$$L[\dot{\varepsilon}^2(t)] = s\varepsilon(s) = \frac{c_r s^r + c_{r-1} s^{r-1} + c_{r-2} s^{r-2} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}\tag{2.164}$$

cu raportul gradelor $n - r \geq 2$.

Se calculează integrala prin suma:

$$J_2' = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta_k}{2a_0^2 \Delta},\tag{2.165}$$

unde mărimile B_k se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned}B_1 &= c_0^2, B_2 = c_1^2, \dots, B_{k+1} = c_k^2 - 2c_{k-1}c_{k+1} + \dots + \\ &+ 2(-1)^k c_0 c_{2k}, \dots, B_{n+1} = c_1^2,\end{aligned}\tag{2.166}$$

iar determinanții Δ și Δ_k se obțin ca în procedura de mai sus.

Prin înlocuirea în (2.163) a lui J_2 din (2.156) și J'_2 din (2.165) se obține forma directă de exprimare a criteriului J_4 .

Dacă se va proiecta regulatorul în raport cu semnalul perturbației de tip treaptă, atunci expresia (2.148) este similară, dar cu condiția că f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului se determină în raport cu perturbația, semnalul referinței $r(t) = 0$.

Astfel, se obține:

$$y(s) = H_{0p}(s)p(s) \quad (2.167)$$

și eroarea sistemului în raport cu perturbație este:

$$\varepsilon(s) = r(s) - y(s)|_{r=0} = -y(s) = -H_{0p}(s)p(s). \quad (2.168)$$

Dacă se va calcula integrala J_2 din (2.148) prin (2.168) și integrandul va conține parametrii regulatorului cu f.d.t. $H_{Rp}(s)$.

La alegerea parametrilor sistemului automat după criteriul J_2 adesea se obține un proces oscilant nedorit, fiindcă apropierea răspunsului $y(t)$ de procesul ideal treaptă $r(t)$ rezultă o mărire a vitezei inițiale de răspuns, care poate conduce la un suprareglaj și o micșorare a rezervei de stabilitate.

În unele cazuri funcția $f(q_1, q_2, \dots, q_r)$ din (2.156) poate să nu aibă minim și parametrii regulatorului se aleg după valoarea lui J_2 minimală în interiorul său la frontieră care este determinată conform altor condiții ca rezervă de stabilitate, precizie staționară etc.

În tabelul 2.4 sunt date relații de calcul al integralei J_2 pentru sisteme automate de ordinul 1, 2, 3, 4.

Tabelul 2.4. Expresii de calcul a integralei J_2

Model de ordinul n a erorii	Expresii de calcul a integralei J_2
$\varepsilon(s) = \frac{b_0}{a_1s+a_0}$	$\frac{b_0^2}{2a_0a_1}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$	$\frac{a_0b_1^2+a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2}$

$\varepsilon(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$\frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2 a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$\frac{b_3^2 (-a_0^2 a_3 + a_0 a_1 a_2) + (b_2^2 - 2b_1 b_3) a_0 a_1 a_4}{2 a_0 a_4 (-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)} \rightarrow$ $\rightarrow \frac{+(b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 a_4 + b_0^2 (a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2)}{2 a_0 a_4 (-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)}$

Exemplul 2.9. Se consideră sistemul automat deschis descris de f.d.t. cu datele numerice, asupra căruia acționează semnal treaptă unitară $r(s) = 1(s) = 1/s$:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{2}{s(0.2s + 1)(5s + 1)},$$

unde k este coeficientul de transfer, T_1, T_2 - constantele de timp.

Se cere: 1) să se determine valoarea criteriului J_2 pentru valorile parametrilor inițiali ai sistemului,

2) să se calculeze valoarea optimală a coeficientului k_{opt} de transfer, care minimizează criteriul pătratic și să se calculeze valoarea optimală a criteriului J_2 pentru valoarea optimală a lui k_{opt} .

Soluționare. 1.1. Se determină expresia semnalului erorii sistemului automat la condiția $m = 2, n = 3$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) = H_\varepsilon(s)1(s) &= \frac{1}{1 + \frac{k}{s(0.2s+1)(5s+1)}} \frac{1}{s} = \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \frac{1}{s} = \\ &= \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \end{aligned}$$

unde $b_2 = T_1 T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1 \text{ s}^2$, $b_1 = T_1 + T_2 = 0.2 + 5 = 5.2 \text{ s}$, $b_0 = 1$, $a_3 = T_1 T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1 \text{ s}^2$, $a_2 = 5.2 \text{ s}$, $a_1 = 1$, $a_0 = k = 2$.

1.2. Se calculează determinantul conform relației (5.66):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 = 5.2k = 5.2 \cdot 2 = 10.4.$$

1.3. Se calculează determinanții particulari Δ_k , $k = m = 0, 1, 2$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana $a_1, a_2, 0$:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2 + a_0 a_2^2 = 1 \cdot 5.2 + 2 \cdot 5.2^2 = 59.28,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2 a_2 = 2^2 \cdot 5.2 = 20.8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_0^3 = 2^3 = 8.$$

1.4. Se calculează mărimile B_0, B_1, \dots, B_m după relațiile:

$$B_0 = b_0^2 = 1, B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2 = 5.2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 25.04, B_2 = b_2^2 = 1.$$

1.5. Se calculează valoarea integralei (5.69) cu coeficienții $\overline{b_0}, \overline{b_2}, \overline{B_0}, \overline{B_2}$ cu valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{B_0 \Delta_0 + B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 - 2b_0 b_1 \Delta}{2a_0^2 \Delta} = \frac{1 \cdot 59.28 + 25.04 \cdot 20.08 + 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 \cdot 5.2 \cdot 10.4}{2 \cdot 2^2 \cdot 10.4} = 5.552.$$

1.6. Se determină valoarea integralei J_2 după formula din tabelul 5.1 pentru $n = 3$ cu valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + (5.2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1) 2 \cdot 1 + 5.2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1 (1 \cdot 5.2 - 2 \cdot 1)} = 4.475.$$

2.1. Calculul integralei J_2 se obține mult mai simplu dacă se utilizează forma tabelară. Pentru sistemul de ordinul $n = 3$ din tabelului 5.1 rândul trei se prezintă expresia integralei cu datele numerice:

$$J_2 = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{k + (5.2^2 - 2)k + 5.2}{2k(5.2 - k)} = \frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2}.$$

2.2. Se determină derivata parțială a integralei în raport cu coeficientul k și se egalează cu zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial k} &= \frac{\partial J_2}{\partial k} \left(\frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2} \right) = \frac{26.04(10.4k - 2k^2) - (26.04k + 5.2)(10.4 - 4k)}{(10.4k - 2k^2)^2} = \\ &= \frac{52.08k^2 + 20.8k - 54.08}{(10.4k - 2k^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Din ultima expresie se calculează valoarea optimală a lui k :

$$26.04(10.4k - 2k^2) - (26.04k + 5.2)(10.4 - 4k) = k^2 + 0.3994k - 1.0384 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-0.3994 \pm \sqrt{0.3994^2 + 4 \cdot 1.0384}}{2} = \frac{-0.3994 \pm 2.0768}{2}.$$

Pentru valoarea lui $k > 0$ se obține:

$$k_{\text{opt}} = \frac{-0.3994 + 2.0768}{2} = 0.8387.$$

2.3. Se calculează valoarea optimală a integralei (5.69) la valoarea lui k_{opt} :

$$J_{2\text{opt}} = \frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2} = \frac{26.04 \cdot 0.8387 + 5.2}{10.4 \cdot 0.8387 - 2 \cdot 0.8387^2} = 3.6961.$$

În fig. 2.14 se prezintă procesele indiciale ale sistemului cu datele inițiale ale parametrilor (fig. 2.14, a, alura 1) și cu valoarea optimală a coeficientului de transfer k_{opt} al sistemului închis (fig. 2.14, b, alura 2).

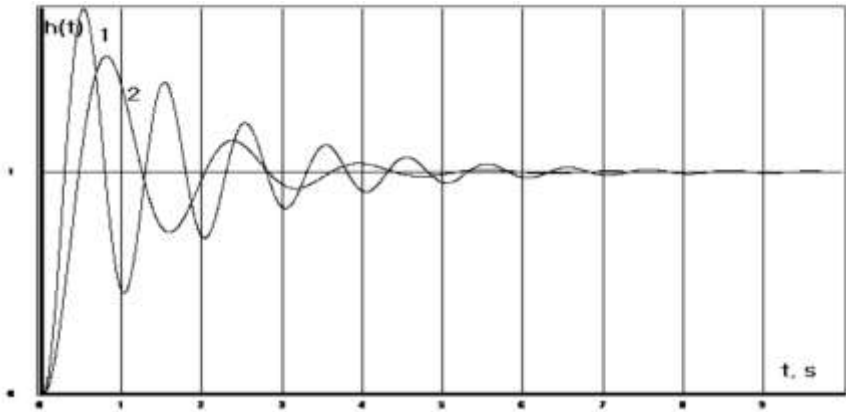


Fig. 2.14. Răspunsuri indiciale ale sistemului automat la ex. 2.9

Exemplul 2.10. Se consideră f.d.t. a sistemului deschis alcătuit din regulator cu acțiune proporțională-derivativă cu f.d.t. $H_{PD}(s)$ și partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$:

$$H_{PD}(s) = k_p + k_d s, H_{PF}(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

unde k_p, k_d sunt parametrii de acord ai regulatorului PD, $k_p = 20 \text{ s}^{-1}$, $T = 0.1 \text{ s}$.

Se cere să se calculeze valoarea coeficientului k_d , care determină nivelul

semnalului primei derivate și corespunde criteriului pătratic când la intrare se aplică semnalul impuls unitar $\delta(t) = 1$.

Soluționare. 1. Se determină f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(s) = H_{PD}(s)H_{PF}(s) = (k_p + k_d s) \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{k_p + k_d s}{s(Ts+1)}.$$

2. Se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + (1+k_d)s + k_p}.$$

3. Mărima de ieșire a sistemului ca răspuns la semnal impuls unitar este:

$$y(s) = H_0(s)\delta(s) = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + s(1+k_d) + k_p} * 1 = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + (1+k_d)s + k_p} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

unde $b_1 = k_d$, $b_0 = k_p$, $a_2 = T$, $a_1 = 1 + k_d$, $a_0 = k_p$.

4. Pentru sistemul de ordinul doi din tabelul 5.1 se prezintă expresia de calcul a integralei:

$$J_2 = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{k_p k_d^2 + T k_p^2}{2k_p(1+k_d)T} = \frac{k_d^2 + T k_p}{2T(1+k_d)}.$$

5. Se calculează derivata lui J_2 pe variabila k_d :

$$\frac{dJ_2}{dk_d} = k_d^2 + 2k_d - k_p T = 0.$$

6. Se rezolvă ecuația pătratică pe variabila k_d și la valorile date ale parametrilor sistemului se obține valoarea optimală pentru rădăcina pozitivă:

$$k_d = -1 + \sqrt{1 + k_p T} = -1 + \sqrt{1 + 20 * 0.1} = 0.73,$$

unde parametrul k_d este funcție neliniară de produsul mărimilor $k_p T$ și nu depinde de coeficientul de transfer al părții fixate. ■

2.16 Metoda gradului maximal de stabilitate al sistemului

Pentru a evita problemele care apar la utilizarea metodelor pentru acordarea algoritmilor de reglare în indicate la punctul 2.11 se propune de a utiliza acordarea reguletoarelor tipizate după metoda gradului maximal

de stabilitate al sistemului automat proiectat [1], care se prezintă în modul următor

Se consideră descrierea unui model matematic al obiectului de reglare prezentat prin funcția de transfer de forma:

$$\begin{aligned} H_P(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)e^{-\tau s}}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n} e^{-\tau s} = \\ &= e^{-\tau s} \frac{\sum_{j=0}^m b_j(p)^j}{\sum_{i=0}^n a_i(p)^i}, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (2.169)$$

unde $y(s)$ este mărimea de ieșire a obiectului, $u(s)$ – mărimea de conducere, coeficienții b_j , $j = \overline{0, m}$, a_i , $j = \overline{0, n}$, τ - timpul mort al procesului.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de conducere de tipul PID cu obiectul (2.169) care se prezintă în forma:

$$H_R(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_{i=0}^r q_i s^{(i-1)}}{s}, \quad r \leq n - 1, \quad (2.170)$$

unde coeficienții $q = (q_0, q_1, \dots, q_r)$ sunt parametrii de acord necunoscuți ai algoritmului de reglare de tipul PID.

Problema constă în a garanta pentru legea de reglare respectivă gradul maximal de stabilitate al sistemului automat proiectat.

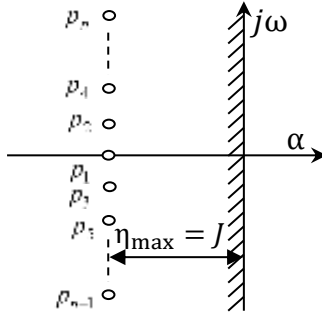
Utilizând expresiile (2.169) și (2.170) se obține ecuația caracteristică a sistemului în circuit închis în forma:

$$\begin{aligned} A(p, q) &= 1 + H_R(p)H_P(p) = 1 + \frac{Q(p)B(p)e^{-\tau p}}{P(p)A(p)} = \\ &= e^{\tau p} \frac{P(p)A(p)}{B(p)} + Q(p) = 1 + \frac{\sum_{i=0}^r q_i p^{(i-1)} \sum_{j=0}^m b_j(p)^j}{p \sum_{i=0}^n a_i(p)^i} e^{-\tau s} = \\ &= e^{\tau p} \frac{\sum_{i=0}^n a_i(p)^{i+1}}{\sum_{j=0}^m b_j(p)^j} + \sum_{i=0}^r q_i(p)^{(i-1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Se introduce noțiunea de grad maximal de stabilitate J al sistemului automat proiectat și în ecuația caracteristică (2.171) se substituie $p = -J$ obținând ecuația caracteristică în forma:

$$A(-J, q) = e^{-\tau J} \frac{\sum_{i=0}^n a_i (-J)^{i+1} +}{\sum_{j=0}^m b_j (-J)^j} + \sum_{i=0}^r q_i (-J)^{(i-1)} = 0, \quad (2.172)$$

unde J este variabilă necunoscută.



nnnnnn

Ecuația (2.172) conține $r + 1$ necunoscute (r parametri de acord necunoscuți ai regulatorului și variabila J necunoscută).

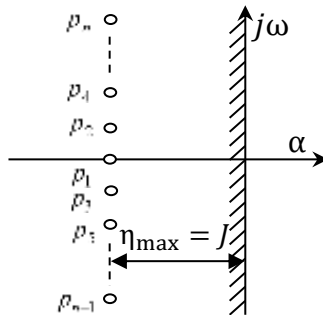
Pentru determinarea valorilor lui J și a parametrilor q_i ecuația caracteristică (2.172) se derivează de r ori pe variabila J conform numărului r parametrilor de acord prezenți în legea de reglare respectivă și, în rezultat, se obține un sistem de ecuații algebrice de forma:

$$\begin{aligned} \frac{dA(J,q)}{dJ} &= A^{(1)}(J, q) = 0, \\ \frac{d^2A(-J,q)}{dJ^2} &= A^{(2)}(J, q) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{r-1}A(-J,q)}{dJ^{r-1}} &= A^{(r-1)}(J, q) = 0, \\ \frac{d^rA(-J,q)}{dJ^r} &= A^{(r)}(J) = 0. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Ultima ecuație din sistemul (2.173) este o ecuație algebrică de gradul respectiv pe necunoscuta J și rădăcinile soluției acesteia prezintă gradele maximale de stabilitate ale sistemului automat proiectat [1]:

$$J = J_{opt} = -\min \max \text{Rep}_i(q), \quad (2.174)$$

unde Rep_i sunt rădăcinile reale sau părțile reale ale rădăcinilor complexe ale ecuației caracteristice (2.172), alocate în semiplanul stâng al planului complex al rădăcinilor sau în sens geometric este distanța dintre rădăcina reală negativă respectivă (partea reală a rădăcinii complexe) cea mai apropiată de axa imaginară și axa imaginară (fig.).



nnnnnn

Utilizând gradul optimal de stabilitate J_{opt} al sistemului automat, din ecuația caracteristică (2.172) și sistemul (2.173) r de ecuații algebrice se determină valorile optimale ale parametrilor de acord ai legii de reglare respective după relațiile:

$$q_i = f_i(\overline{a_0}, \overline{a_n}, \overline{b_0}, \overline{b_m}, J), \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (2.175)$$

Pentru sinteza algoritmilor de acordare a reguletoarelor P, PI, PID după metoda gradului maximal de stabilitate al sistemului la modelul obiectului dat cu parametrii cunoscuți se reduce la parcurgerea următorilor etape.

1. Se determină funcția de transfer a SRA în circuit închis cu regulatorul tipizat selectat.

2. Se obține ecuația caracteristică a sistemului închis.

3. Ecuația caracteristică se transcrie prin gradul de stabilitate utilizând substituția $s = -J$.

4. Din ecuația caracteristică, obținută la pasul trei, prin operații de derivare pe variabila J de un număr de ori egal cu numărul de parametri de acord prezenți în legea de reglare aleasă se obține ecuația algebrică de gradul respectiv pe necunoscuta J .

5. Se soluționează ecuația algebrică obținută la pasul 4 și se obțin rădăcinile, care prezintă gradele maximale de stabilitate ale sistemului proiectat.

6. Se determină valoarea optimală a gradului de stabilitate a sistemului proiectat care prezintă cea mai mică rădăcină reală pozitivă sau cea mai mică parte reală pozitivă a rădăcinilor complexe a ecuației algebrice obținută la pasul patru. Din ecuația caracteristică, obținută la pasul trei și derivatele ei de la pasul 4, se obțin expresiile algebrice pentru determinarea valorilor parametrilor de acord ai legii de reglare aleasă.

7. Se calculează valorile parametrilor de acord ai legii de reglare din expresiile algebrice obținute la pasul 6.

8. Se verifică performanțele sistemului proiectat prin simulare pe calculator.

Dacă performanțele impuse sistemului sunt satisfăcute, atunci procedura de acordare s-a încheiat, iar dacă performanțele impuse sistemului nu sunt satisfăcute, atunci procedura se reia de la început cu alt tip de lege de reglare sau prin utilizarea altei metode.

Exemplul 2.10. Se dă modelul obiectului cu inerție de ordinul doi și timp mort cu f.d.t. de forma:

$$H(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{ke^{-s\tau}}{a_0s^2+a_1s+a_2}, \quad (1)$$

unde k este coeficientul de transfer, T_1 și T_2 – constantele de timp, τ – timpul mort, coeficienții $a_0 = T_1T_2$, $a_1 = T_1 + T_2$, $a_2 = 1$.

Se cere. De acordat regulatorul PI și PID la modelul obiectului dat prin metoda gradului maximal de stabilitate.

Soluționare. Se alcătuiește ecuația caracteristică a sistemului închis cu regulatorul PI și PID:

$$A_{PI}(s) = 1 + H_{PI}(s)H(s) = 1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) \frac{ke^{-s\tau}}{a_0s^2+a_1s+a_2} = \quad (2)$$

$$= e^{s\tau}(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s) + kk_p s + kk_i = 0,$$

$$A_{\text{PID}}(s) = 1 + H_{\text{PID}}(s)H(s) = 1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \frac{ke^{-s\tau}}{a_0s^2 + a_1s + a_2} = \quad (3)$$

$$= e^{s\tau}(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s) + kk_d s^2 + kk_p s + kk_i = 0.$$

Se substituie variabila complexă s prin gradul de stabilitate $s = -J$ și se transcriu ecuațiile caracteristice (2) și (3) ale sistemului în forma:

$$A_{\text{PI}}(-J) = e^{-J\tau}(-a_0J^3 + a_1J^2 - a_2J) - kk_p J + kk_i = 0, \quad (4)$$

$$A_{\text{PID}}(-J) = e^{-J\tau}(-a_0J^3 + a_1J^2 - a_2J) + kk_d J^2 - kk_p J + kk_i = 0. \quad (5)$$

Prin operații de derivare a expresiilor (4) și (5) se determină expresiile pentru determinarea gradului maximal de stabilitate al sistemului cu regulatorul PI și PID.

Pentru regulatorul PI se determină valoarea numerică minimală a rădăcinii din următoarea ecuație algebrică de gradul trei cu necunoscuta J , care este gradul maximal de stabilitate al sistemului proiectat:

$$-c_0J^3 + c_1J^2 - c_2J + c_3 = 0, \quad (6)$$

unde $c_0 = a_0\tau^2$, $c_1 = a_1\tau^2 + 6a_0\tau$, $c_2 = a_2\tau^2 + 4a_1\tau + 6a_0$, $c_3 = 2a_2\tau + 2a_1$.

În continuare, se calculează valorile numerice ale parametrilor regulatorului PI după relațiile:

$$k_p = \frac{e^{-\tau J}}{k}(a_0\tau J^3 - (a_1\tau + 3a_0)J^2 + (a_2\tau + 2a_1)J - a_2) = f_p(J), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{e^{-\tau J}}{k}J^2(a_0\tau J^2 - (a_1\tau + 2a_0)J + a_0\tau + a_1) = \\ &= \frac{e^{-\tau J}}{k}J(a_0J^2 - a_1J + a_2) + k_p J = f_i(J). \end{aligned} \quad (8)$$

Pentru regulatorul PID se determină valoarea numerică minimală a rădăcinii din următoarea ecuație algebrică de gradul trei cu necunoscuta J , care este gradul maximal de stabilitate al sistemului analizat:

$$-c_0J^3 + c_1J^2 - c_2J + c_3 = 0, \quad (9)$$

unde $c_0 = \tau^3 a_0$, $c_1 = \tau^3 a_1 + 9\tau^2 a_0$, $c_2 = \tau^3 a_2 + 6\tau^2 a_1 + 18\tau a_0$, $c_3 = 3\tau^2 a_2 + 6\tau a_1 + 6a_0$.

În continuare, se calculează valorile numerice ale parametrilor regulatorului PID după relațiile:

$$k_p = \frac{e^{-\tau J}}{k} (a_0 \tau^2 J^4 - (a_1 \tau^2 + 5a_0 \tau) J^3 + (a_2 \tau^2 + 3\tau a_1 + 3a_0) J^2 - a_2 \tau J - a_2) =$$

$$= \frac{e^{-\tau J}}{k} (a_0 \tau J^3 - (a_1 \tau + 3a_0) J^2 + (a_2 \tau + 2a_1) J - a_2) + 2k_d J = f_p(J), \quad (10)$$

$$k_i = \frac{e^{-\tau J}}{2k} J^3 (a_0 \tau^2 J^2 - (a_1 \tau^2 + 4a_0 \tau) J + a_2 \tau^2 + 2a_1 \tau + 2a_0) =$$

$$= \frac{e^{-\tau J}}{k} (a_0 J^3 - a_1 J^2 + a_2 J) - k_d J^2 + k_p J = f_i(J), \quad (11)$$

$$k_d = \frac{e^{-\tau J}}{2k} (a_0 \tau^2 J^3 - (a_1 \tau^2 + 6a_0 \tau) J^2 + (a_2 \tau^2 + 4a_1 \tau + 6a_0) J - 2a_2 \tau -$$

$$- 2a_1) = f_d(J). \quad (12)$$

Prin obținerea valorilor parametrilor de acord ai algoritmilor de reglare se încheie procedura de acordare a reguletoarelor la obiectul de reglare cu parametrii cunoscuți. ■

Din aplicațiile practice a acestei metode la acordarea reguletoarelor la diverse modele matematice ale obiectelor de reglare s-a constatat că la valorile obținute la parametrilor de acord nu se garantează stabilitatea sistemului automat proiectat.

În aceste cazuri ecuațiile pentru determinarea valorilor parametrilor se prezintă ca funcții $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$ pe variabila J și variind $J \geq 0$ se calculează și se construiesc aceste funcții după expresiile (7)-(8) pentru algoritmul PI și expresiile (10)-(12) pentru algoritmul PID ca funcții de parametrii cunoscuți ai modelului obiectului (1) și pe variabila necunoscută J . Se variază variabila J de la zero până la o valoare oarecare J_x (această valoare se alege din forma alurei) și se construiesc curbele $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$.

Se aleg seturi de valori suboptimale ale lui J_i și pe panta respectivă a curbelor construite se determină valorile suboptimale ale parametrilor de acord $k_{pi} = f(J_i)$, $k_{ii} = f(J_i)$, $k_{di} = f(J_i)$ ai regulatorului PID, admițând că valoarea lui J_i este mai mică sau mai mare ca cea optimală J_{opt} .

Pentru seturile de valori alese ai parametrilor regulatorului PID se simulează pe calculator sistemul și se determină cele mai ridicate performanțe posibile ale sistemului automat proiectat conform metodei.

Pentru acordarea parametrilor algoritmului modificat PIDD² după metoda GMS cu iterații la modelul (2.167) se utilizează sistemul din patru funcții cu necunoscutele $J, k_p, k_i, k_{d1}, k_{d2}$.

Exemplul 2.11. Se consideră modelul obiectului de reglare din exemplul 2.10 cu parametrii: coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s, timpul mort $\tau = 1$ s, coeficienții $a_0 = T_2 T_2 = 2 \cdot 5 = 10$ s², $a_1 = T_2 + T_2 = 2 + 5 = 7$ s, $a_2 = 1$.

Se cere de acordat parametrii regulatorului PI și PID după metoda gradului maximal de stabilitate.

Soluționare. După relațiile (7)-(8) pentru regulatorul PI s-au calculat și construit dependențele $k_p = f_p(J)$ și $k_i = f_i(J)$ prezentate în fig. 2.15, a și după relațiile (10)-(12) pentru regulatorul PID s-au calculat și construit dependențele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_d = f_d(J)$ date în fig. 2.15, b.

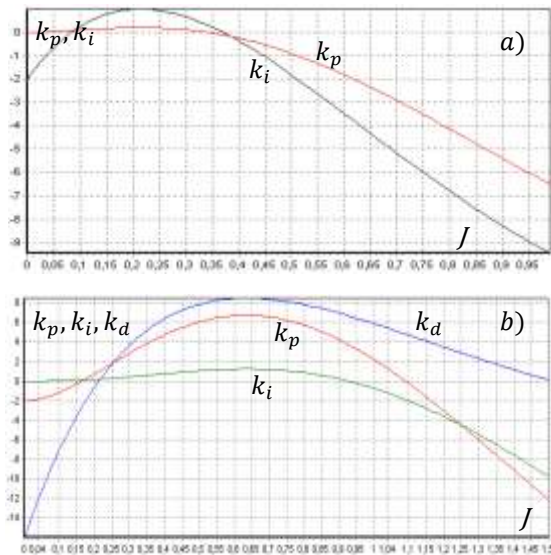
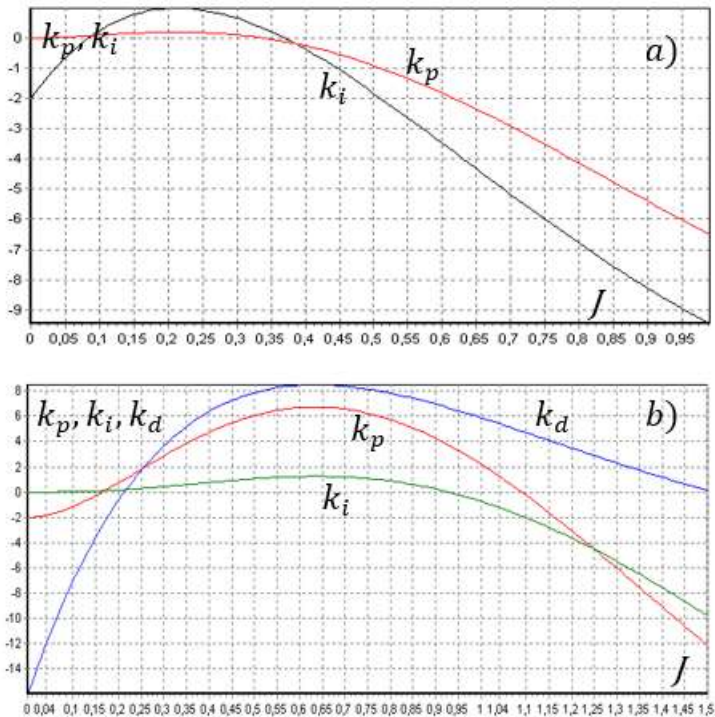


Fig. 2.15. Dependența parametrilor regulatorului PI și PID



S-au ales seturi de valori $J - k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_d = f_d(J)$ pentru regulatorul PI (tabelul 2.5) și pentru regulatorul PID (tabelul 2.6) și s-a simulat sistemul automat cu regulatorul PI și PID în MATLAB (fig. 2.16). Procesele indiciale sunt prezentate în fig. 2.16 (a – sistemul cu regulatorul PI, b – sistemul cu regulatorul PID), iar performanțele sunt date în tabelul 2.7.

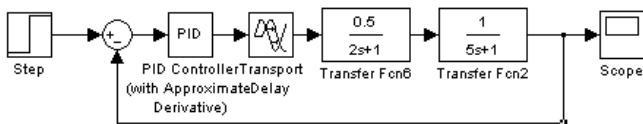


Fig. 2.16. Schema de simulare pe calculator a SRA

Tabelul 2.5. Parametrii regulatorului PI

Nr.	J	k_p	k_i
1	0.2127	0.9906	0.198
2	0.1	0.253	0.097
3	0.15	0.776	0.161
4	0.25	0.924	0.182
5	0.3	0.651	0.106
6	ZN	7.065	0.156

Tabelul 2.6. Parametrii regulatorului PID

Nr.	J	k_p	k_i	k_d
1	0.635	6.745	1.245	8.511
2	0.35	3.65	0.564	4.916
3	0.5	5.261	1.035	7.78
4	0.75	6.332	1.101	8.217
5	0.9	4.427	0.315	7.05
6	ZN	11.775	0.208	0.8

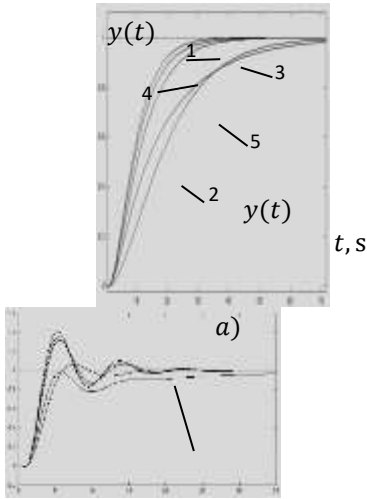


Fig. 2.16. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatorul PI și PID

Pentru sistemul automat cu regulatorul PID performanțele optime se obțin pentru curba 2 (fig. 2.16, b), iar curba 1 (fig. 2.16, b) prezintă răspunsul indicial al sistemului cu setul de valori ai parametrilor regulatorului PID pentru valoarea optimă a gradului de stabilitate $J_{opt} = 0.635$ calculat după ecuația algebrică (8).

Pentru compararea performanțelor sistemului cu regulatorul PID cu parametrii acordați după metodele GMS și ZN (regimul critic cu parametrii $k_{cr} = 15.7, T_p = 8$ s) în fig. 2.17 sunt prezentate răspunsurile indiciale ale sistemelor: curba 1 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda GMS pentru valoarea gradului maximal de stabilitate $J_{opt} = 0.635$, curba 2 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda ZN, curba 3 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda GMS obținută la variația lui J pentru setul de valori prezentat în rândul 2 din tabelul 2.6 (curba 2 în fig. 2.16, b).■

Tabelul 2.7. Performanțele sistemului cu regulatorul PI și PID

Nr. crt.	Tip regulator	Nr. iterații	Performanțele sistemului automat				
			$\varepsilon, \%$	t_c, s	$\sigma, \%$	t_r, s	λ
1	PI	1	5	23	-	23	-

2		2	5	57	-	57	-
3		3	5	31	-	31	-
4		4	5	28	-	28	-
5		5	5	61	-	61	-
6	ZN	5	5	6	19	80	2
7	PID	1	5	3	40	19	2
8		2	5	6	9	16	1
9		3	5	3.2	30	17	2
10		4	5	3.1	35	18	2
11		5	5	5.5		37	
12	ZN	ZN	5	4	57	80	10

Pentru sistemul automat cu regulatorul PID performanțele optime se obțin pentru curba 2 (fig. 2.16, b), iar curba 1 (fig. 2.16, b) prezintă răspunsul indicial al sistemului cu setul de valori ai parametrilor regulatorului PID pentru valoarea optimă a gradului de stabilitate $J_{opt} = 0.635$ calculat după ecuația algebrică (9).

Pentru compararea performanțelor sistemului cu regulatorul PID cu parametrii acordați după metodele GMS și ZN (regimul critic cu parametrii $k_{pcr} = 15.7, T_p = 8$ s) în fig. 2.17 sunt prezentate procesele indiciale ale sistemelor: curba 1 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda GMS pentru valoarea gradului maximal de stabilitate $J_{opt} = 0.635$, curba 2 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda ZN, curba 3 prezintă răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul PID acordat după metoda GMS obținută la variația lui J pentru setul de valori prezentat în rândul 2 din tabelul 2.6 (curba 2 în fig. 2.16, b).■

Exemplul 2.12. Se dă modelul matematic al obiectului cu inerție de ordinul doi cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{k}{a_0s^2+a_1s+a_2} = \frac{2}{(s+2)(s+5)} = \frac{0.2}{0.1s^2+0.7s+1} = \frac{2}{s^2+7s+10} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde coeficientul de transfer $k = 0.2$, constantele de timp $T_1 = 0.5$ s, $T_2 = 0.2$ s, $a_0 = T_1T_2 = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$ s², $a_1 = T_1 + T_2 = 0.5 + 0.2 = 0.7$ s, $a_2 = 1$.

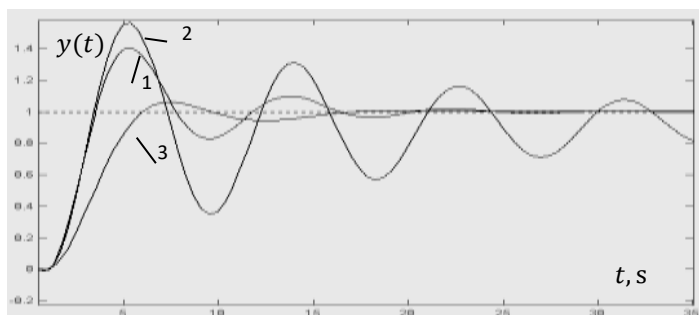


Fig. 2.17. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatorul PID acordat după metodele GMS și ZN

Se cere. 1. Pentru modelul dat al obiectului și performanțele impuse timpul de reglare $t_r \leq 2$ s și suprareglarea $d \leq 10$ % să se acordeze parametrii regulatorului PI și PID prin metoda gradului maximal de stabilitate.

2. Pentru modelul obiectului să se acordeze algoritmul PID după metoda polizerouri.

Soluționare. 1. S-au determinat expresiile de calcul ale parametrilor de acord ai regulatorului PI:

$$k_p = \frac{1}{k}(-3a_0J^2 + 2a_1J - a_2) = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^2}{3a_0} - a_2\right) = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{1}{k}(-2a_0J^3 + a_1J^2) = \frac{1}{k}(a_0J^3 - a_1J^2 + a_2J) + k_pJ = \frac{1}{k} \frac{a_1^3}{27a_0^2} =$$

$$= f_i(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_i(J).$$

2. S-au determinat expresiile de calcul ale parametrilor de acord ai regulatorului PID:

$$k_p = \frac{1}{k}(-3a_0J^2 + 2a_1J - a_2) + 2k_dJ = \frac{1}{k}(3a_0J^2 - a_2) = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{1}{k}(a_0J^3 - a_1J^2 + a_2J) - k_dJ^2 + k_pJ = \frac{a_0}{k}J^3 = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_i(J),$$

$$k_d = \frac{1}{k}(3a_0J - a_1) = f_d(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_d(J).$$

Pentru regulatorul PI s-a variat J și s-au calculat și construit curbele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$ (fig. 2.18, a) și s-a obținut gradul optimal $J_{opt} = 2.3$, iar parametrii au valorile optimale $k_{popt} = 3.17$, $k_{iopt} = 6.35.17 \text{ s}^{-1}$, $T_{iopt} = 0.15$ s. Sistemul cu regulatorul PI s-a simulat și răspunsul este prezentat în fig. 2.19, curba 3. La eroarea de 5 % are performanțele: timpul de creștere și de reglare sunt $t_c = t_r = 1.8$ s.

Pentru regulatorul PID s-a variat J 2.4...3.6 și s-au calculat și construit curbele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_d = f_d(J)$ (fig. 2.18, b). Prin proceduri de iterații J și seturi de valori ale parametrilor de acord k_p , k_i , k_d s-a simulat pe calculator sistemul automat și s-au analizat performanțele sistemului. Pentru gradul maximal $J = 3.6$ și parametrii regulatorului $k_p = 14.4$, $k_i = 23.3$, $T_{iopt} = 0.04$ s, $k_d = 1.9$ s răspunsul indicial se prezintă în fig. 2.19 curba 1, iar performanțele optimale ale sistemului la eroarea de 5 % sunt: timpul de creștere și de reglare sunt $t_c = t_r = 0.3$ s.

3. S-a acordat algoritmul de reglare PID pentru modelul dat după metoda polizerouri. Sistemul cu regulatorul acordat s-a simulat și răspunsul indicial se dă în fig.

2.19, curba 3, iar performanțele cu eroarea 5 % sunt: timpul de creștere $t_c = 0.45$ s, supareglajul $\sigma = 12.46$ %, timpul de reglare $t_r = 1.31$ s.

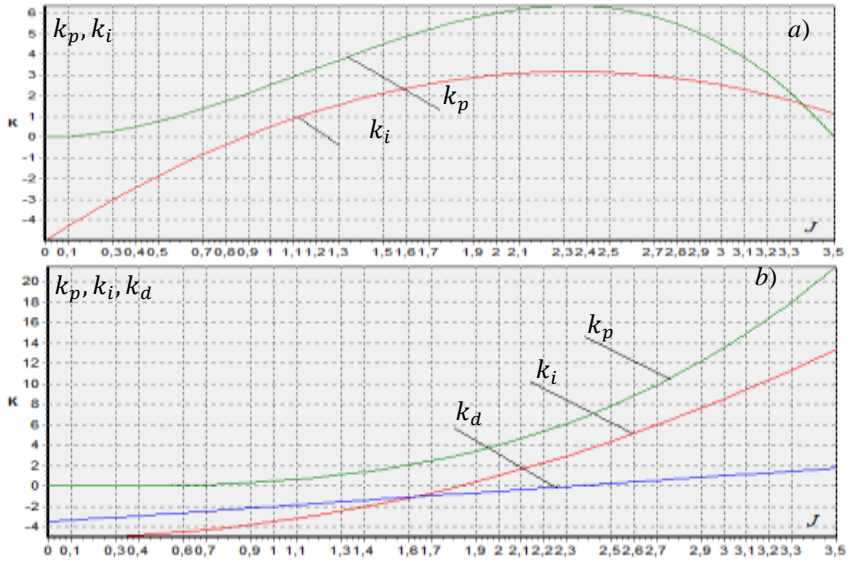


Fig. 2.18. Dependințele $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$

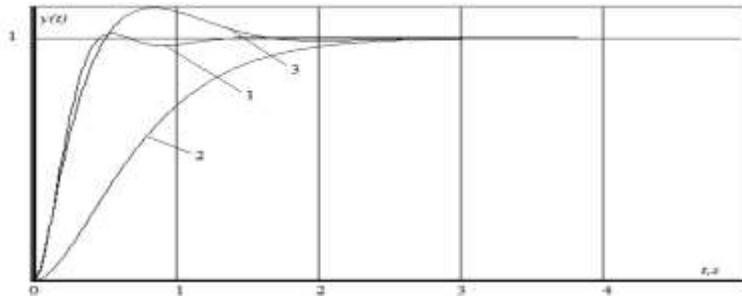


Fig. 2.19. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatorul PI și PID

Din analiza performanțelor sistemelor cu regulatoarele PI și PID acordate după metoda gradului maximal cu iterații și regulatorul PID acordat după metoda poil-zeroori cele mai ridicate performanțe are sistemul cu regulatorul PID acordat după metoda GMS cu iterații cu un răspuns indicial cu timpul de reglare $t_r = 0.3$ s (fig. 2.19, curba 1).

3 STRUCTURI DE SISTEME AUTOMATE PENTRU PROCESE LENTE

3.1 Introducere

Particularitățile proceselor lente și cu componenta timpului mort, care evidențiază o comportare cu fază neminimă, conduc la dificultăți în procedurile de proiectare ale reguletoarelor de tip PID pentru structurile convenționale ale sistemelor automate cu un grad de libertate.

Pentru depășirea acestor dificultăți la proiectarea algoritmilor de reglare se utilizează structuri de reglare cu două grade de libertate cu reguletoare ce conțin modelul intern al semnalului exogen: structuri de reglare cu compensarea directă a perturbațiilor (reglare combinată), structuri de reglare în cascadă și structurile de reglare cu predictor Smith.

3.2 Structura sistemului automat cu două grade de libertate

Utilizarea modelului mărimilor exogene în structura regulatorului asigură rejecția perturbațiilor și urmărirea referinței în regim staționar, dar performanțele în regim tranzitoriu nu pot fi realizate integral în raport cu referința și perturbația.

Răspunsul tranzitoriu al sistemului este influențat de zerourile f.d.t. între punctul de aplicare al referinței sau perturbației și ieșire, de polii f.d.t. între ieșire și punctul de aplicație al referinței și perturbației și ieșire și poziția polilor în buclă închisă. Performanțele sistemului pot fi influențate pe mai multe căi, însă calea cea mai directă rezultă prin modificarea poziției polilor sistemului închis prin schimbarea structurii regulatorului. În cazurile, când referința sau/și perturbația pot fi măsurate, atunci se poate adopta soluția de reglare cu două grade de libertate sau soluția de reglare combinată.

Pentru urmărirea directă a referinței se adoptă structura sistemului cu două grade de libertate din fig. 3.1, în care se folosește prefiltrul (regulatorul) cu f.d.t. $H_r(s)$ pentru a inversa f.d.t. complementară a sensibilității sistemului $T(s)$ la anumite frecvențe, astfel că produsul acestora să fie $H_r(s)T(s) = 1$, care poate exclude folosirea unei amplificări mari în bucla de reacție pentru a aduce $T(a_i)$, unde $a_i, i =$

$= \overline{1, n}$ sunt polii sistemului, la valoarea egală cu unitatea ceea ce ar avea efecte benefice asupra robusteții stabilității sistemului.

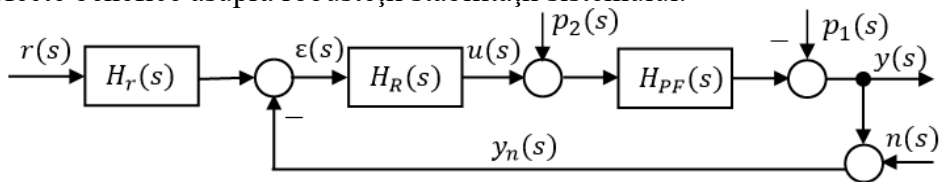


Fig. 3.1. Structura sistemului cu două grade de libertate

În cazul, când se folosește f.d.t. $H_r(s)$ pentru a realiza egalitatea $H_r(s)T(s) = 1$, atunci performanțele pentru procesul real vor fi sensibile la erorile de modelare și $a_i, i = \overline{1, n_r}$ sunt polii modelului de referință.

Performanțele sistemului în raport cu referință se calculează pornind de la relațiile:

$$y(s) = H_r(s)T(s)r(s), \quad (3.1)$$

$$u(s) = H_r(s) \frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_{PPF}(s)} r(s), \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(s) = [1 - H_r(s)T(s)]r(s). \quad (3.3)$$

Din relația (3.3) pentru urmărirea referinței cu eroare staționară $\varepsilon(s) = 0$ f.d.t. a regulatorului –compensator se determină din paranteza pătrată egalând-o cu zero și se obține:

$$1 - H_r(s)T(s) = 0, H_r(s) = \frac{1}{T(s)} = \frac{1+H_R(s)H_{PPF}(s)}{H_R(s)H_{PPF}(s)} = \frac{Q_r(s)}{P_r(s)}. \quad (3.4)$$

Pentru o referință dată se deduc cerințele pentru regulatoarele $H_r(s)$ și $H_R(s)$ astfel ca să fie satisfăcute cerințele impuse pentru urmărirea referinței și rejecția perturbației în regim staționar și tranzitoriu al sistemului.

3.3 Structura sistemului automat de reglare combinată

Se presupune că perturbația $p(t)$ se măsoară, atunci se poate adopta o soluție de reglare directă cu compensarea acțiunii perturbației (fig. 3.2).

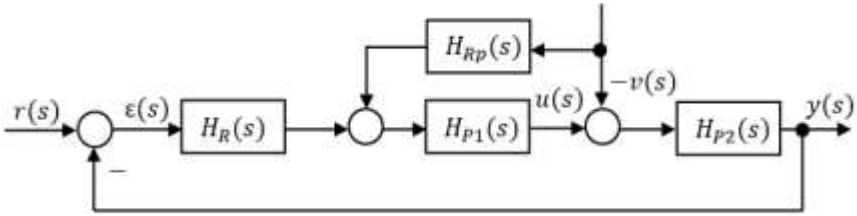


Fig. 3.2. Structura sistemului cu compensare directă a perturbației

Din structura sistemului pentru referința $r(t) = 0$ se obține condiția de invarianță pentru mărimea de ieșire $y_p(s) = 0$ și eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ a sistemului în formă operațională:

$$\begin{aligned} y_p(s) &= S(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_{RV}(s)]p(s) = \\ &= \frac{1}{1+H_{P1}(s)H_{P2}(s)H_R(s)}H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_{Rp}(s)]p(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

și mărimea de reglare se prezintă în formă operațională:

$$\begin{aligned} u_v(s) &= S(s)H_R(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_{RV}(s)]v(s) = \\ &= \frac{1}{1+H_{P1}(s)H_{P2}(s)H_R(s)}H_R(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_{RV}(s)]v(s), \end{aligned} \quad (3.6)$$

unde $S(s)$ este funcția de sensibilitatea sistemului.

Din relația (3.5) se determină f.d.t. a regulatorului-compensator egalând cu zero expresia din paranteza pătrată:

$$1 - H_{P1}(s)H_{RV}(s) = 0, H_{RV}(s) = \frac{1}{H_{P1}(s)} = \frac{Q_{RV}(s)}{P_{RV}(s)}. \quad (3.7)$$

În expresiile (3.4) și (3.7) f.d.t. a regulatorului prezintă elemente derivate ideale deoarece regulatorul $H_{RV}(s)$ și modelul procesului au proprietăți de inerție și integrale. În aceste cazuri f.d.t. a regulatorului-compensator are forma:

$$H_{RV}(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + \dots \quad (3.8)$$

Pentru realizarea relațiilor de forma (3.4) și (3.7) se obțin aproximații care realizează invarianța parțială.

Pentru arhitectura sistemului se cere să posedă următoarele proprietăți:

1. Funcția de transfer a regulatorului-compensator $H_{RV}(s)$ trebuie să fie stabilă și proprie, deoarece acționează în buclă deschisă.

2. Pentru compensarea perturbației se cere ca expresia din paranteza pătrată din (3.3) să fie egală cu zero și se calculează funcția de transfer a regulatorului-compensator cu relația:

$$1 - H_{P1}(s)H_{RV}(s) = 0, H_{RV}(s) = \frac{1}{H_{P1}(s)} = [H_{P1}(s)]^{-1}. \quad (3.9)$$

3. Din (3.9) pentru f.d.t. $H_{P1}(s)$ cu o caracteristică de frecvență trece-jos se obține f.d.t. a regulatorului-compensator cu o caracteristică de frecvență trece-sus.

Utilizarea acestei structuri de sistem asigură rejecția directă a perturbației măsurabile, ceea ce asigură o îmbunătățire a performanțelor sistemului pentru procese lente și foarte lente.

Regulatoroare – compensatoare nu se realizează în două cazuri:

1. Dacă în proces există timp mort pe canalul perturbației τ_0 și în proces τ_p și acestea se raportează $\tau_p > \tau_0$.

Se consideră f.d.t. a procesului și f.d.t. pe canalul perturbației:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} e^{-\tau_p s} \text{ și } H_V(s) = \frac{B_V(s)}{A_V(s)} e^{-\tau_0 s}, \quad (3.10)$$

unde polinoamele procesului au gradele: m_p pentru $B_P(s)$, n_p pentru $A_P(s)$ și m_V pentru $B_V(s)$, n_V pentru $A_V(s)$.

Se calculează f.d.t. a compensatorului și se obține:

$$H_c(s) = \frac{H_V(s)}{H_P(s)} = \frac{A_P(s)B_V(s)e^{-\tau_0 s}}{B_P(s)A_V(s)e^{-\tau_p s}} = \frac{A_P(s)B_V(s)e^{-\tau_0 s}}{B_P(s)A_V(s)e^{-\tau_p s}} e^{s(\tau_p - \tau_0)} = \frac{Q_c(s)}{P_c(s)} e^{s\tau_c}, \quad (3.11)$$

unde timpul mort al compensatorului este cu avans $\tau_c = \tau_p - \tau_0 > 0$ și deci nu poate fi realizat.

2. Dacă numărătorul f.d.t. $H_c(s)$ a compensatorului are gradul mai mare ca la numitor ($m_V + n_P$) $>$ ($n_V + m_P$), atunci acest regulator nu poate fi realizat.

Astfel, condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului-compensator $H_c(s)$ se reduc la impunerea ca timpul mort al procesului să fie egal sau mai mare decât timpul mort pe canalul perturbației și gradul polinomului de la numitor să fie egal sau mai mic ca gradul numitorului regulatorului $H_c(s)$:

$$\tau_0 \geq \tau_p, \quad (3.12)$$

$$(n_V + m_P) \leq (m_V + n_P). \quad (3.13)$$

Exemplul 3.1. Se presupune că este dat modelul procesului descris cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{e^{-2s}}{2s^2 + 3s + 1},$$

care se prezintă prin două subprocesse cu f.d.t.:

$$H_{P1}(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{și} \quad H_{P2}(s) = \frac{e^{-2s}}{2s+1}.$$

Perturbația se prezintă în formă de treaptă unitară.

Se cere să se proiecteze regulatorul-compensator pentru perturbația dată.

Soluționare: Se alege structura regulatorului-compensator cu f.d.t. de forma:

$$H_c(s) = k \frac{s+1}{\alpha s+1},$$

unde α este un parametru care permite realizarea compromisului între eficiența rejecției

și efortul de comandă în bucla de compensare.

Regulatorul $H_R(s)$ de pe canalul direct al sistemului este de tip PID și se acordează astfel în raport cu semnalul referinței treaptă unitară ca suprareglarea să fie $\sigma \leq 5\%$.

Structura sistemului calculată cu semnalele de referință și perturbație de tip treaptă unitară se simulează și variind parametrul $\alpha = 0,1; 0,5; 1; 2$ la valoarea lui $k = 1$ se constată îmbunătățirea performanțelor sistemului. ■

Dacă în structura sistemului cu compensarea perturbației din fig. 3.2 se introduce și prefiltrul cu f.d.t. $H_r(s)$ pentru referință, atunci sistemul prezintă o structură cu trei grade de libertate (fig. 3.3).

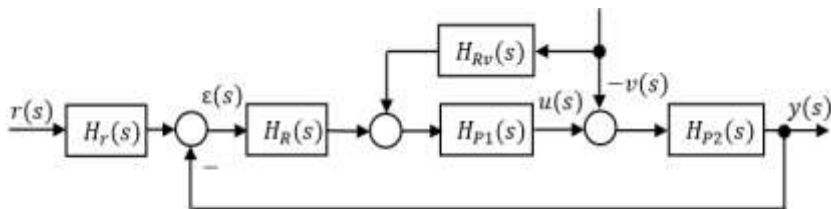


Fig. 3.3. Structura sistemului cu trei grade de libertate

În structura sistemului, blocurile de reglare $H_r(s)$, $H_R(s)$ și $H_{Rv}(s)$ pot fi acordate independent pentru obținerea performanțelor dorite în raport cu semnalele exogene referința $r(s)$ și perturbația $v(s)$.

3.4 Structura sistemului automat de reglare în cascadă

Reglarea în cascadă este utilizată atât în cazul proceselor rapide, cât și pentru procese lente cu componenta cu timp mort. Pentru procese cu un anumit grad de complexitate, f.d.t. $H_p(s)$ a procesului poate conține un număr mare de constante de timp, ceea ce impune pentru compensarea lor utilizarea unor algoritmi de reglare care să conțină mai multe binoame de gradul unu.

Din considerente dificile la realizarea acestor regulatoare și având în vedere efectul negativ pe care-l au componentele derivate asupra răspunsului sistemului (amplificarea zgomotului, creșterea suprareglării) se recomandă utilizarea reglării în cascadă.

Pentru a obține structuri și construcții simple a reguletoarelor pentru conducerea proceselor ce conțin mai mult de două constante de

timp dominante, se adoptă o structură de reglare în cascadă în cadrul căreia se utilizează mai multe blocuri de reglare tipizate.

Principiul reglării în cascadă se bazează pe împărțirea procesului în subprocese prin alegerea unor mărimi intermediare măsurabile care se transmit cauzal de la intrare la ieșire.

În fig. 3.4 se prezintă schema structurală a unui sistem de reglare în cascadă, unde obiectul de reglare OR (dreptunghiul cu linie întreruptă) este descompus în trei subprocese cu f.d.t. $H_{p1}(s) = H_1(s) = H_1$, $H_{p2}(s) = H_2(s) = H_2$, $H_3(s) = H_3(s) = H_3$.

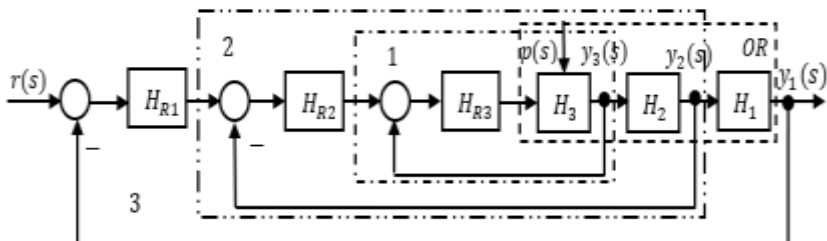


Fig. 3.4. Structura sistemului de reglare în cascadă

În această structură se utilizează trei regulatoare cu f.d.t. $H_{R1}(s) = H_{R1}$, $H_{R2}(s) = H_{R2}$, $H_{R3}(s) = H_{R3}$, care sunt conectate pe canalul direct. Regulatorul $H_{R1}(s)$ este regulatorul principal și reglează mărimea de ieșire $y(t) = y_1(t)$, iar regulatoarele $H_{R3}(s)$, și $H_{R3}(s)$ sunt regulatoare secundare, care reglează mărimile intermediare măsurabile $y_2(t)$ și $y_3(t)$ respectiv.

În structura sistemului sunt indicate trei contururi: conturul 1 (dreptunghiul cu linie întreruptă cu un punct) format din regulatorul $H_{R3}(s)$ și subprocesul $H_3(s)$, conturul 2 (dreptunghiul cu linie întreruptă cu două puncte) format din regulatorul $H_{R2}(s)$, conturul 1 și subprocesul $H_2(s)$ și conturul 3 format din regulatorul $H_{R1}(s)$, conturul 2 și subprocesul $H_1(s)$.

În funcție de complexitatea procesului pot fi structurate în cascadă mai multe regulatoare, care asigură implicit o limitare simultană a mai multor mărimi intermediare din structura sistemului și cea a ieșirii.

Pentru utilizarea eficientă a avantajelor reglării în cascadă se

impune ca variabilele intermediare să se aleagă conform anumitor considerente ca avantaje.

1. Mărimile intermediare să fie ușor accesibile măsurării prin mijloace tehnice simple și fără dificultăți la montarea acestora pentru fiecare mărime.

2. Subprocesele să nu conțină mai mult de două constante de timp, iar valoarea lor să fie cât mai reduse.

3. Rezultă că mărimile intermediare vor avea o viteză de răspuns mai rapidă decât mărimea de ieșire și astfel, se compensează acțiunea perturbațiilor dominate asupra procesului.

Pe lângă avantajele de reglare și limitarea simultană a mai multor mărimi, de reducerea influenței unor perturbații asupra mărimii de ieșire $y(t)$, care determină un grad de invarianță al acestei mărimi în raport cu perturbațiile mult mai ridicat decât în cazul sistemelor convenționale și de creșterea vitezei de răspuns în raport cu modificarea referinței, structura de reglare în cascadă datorită prezenței mai multor reacții negative, are și avantajul unei sensibilități reduse la variația anumitor parametri ai modelului procesului la acțiunea unor perturbații parametrice și rezultă o mai bună robustețe.

Dificultățile în obținerea unor performanțe mai bune, în baza structurilor de reglare în cascadă, depind de alegerea și acordarea optimă a algoritmilor de reglare, având în vedere că regulatoarele buclelor interioare au referința care se fixează extern de către un alt regulator.

În general pentru bucla interioară se recomandă un regulator de tipul P sau PI și foarte rar un regulator PID. Se recomandă ca bucla interioară să aibă o viteză de răspuns mai mare decât bucla principală și se recomandă un regulator P, deși are dezavantajul unei reglări cu eroare. Creșterea coeficientului de transfer în bucla interioară conduce la creșterea vitezei de răspuns și la diminuarea erorii.

Pentru bucla exterioară se recomandă regulatoare de tipul PI sau PID.

Pentru acordarea optimă a regulatoarelor în structurile de reglare în cascadă pentru procese lente se recomandă metode experimentale, metoda gradului maximal. Acordarea se inițiază cu buclele interioare separat deconectând regulatoarele din celelalte bucle, presupunând că

buclele funcționează independent.

Pentru procese rapide, alegerea și acordarea reguletoarelor pot fi folosite criteriul modulului sau criteriul simetriei.

Exemplul 3.2. Se dă structura sistemului de reglare în cascadă dată în fig. 3.4.

Se cere de calculat funcția de transfer a sistemului închis.

Soluționare. Pornind de la structura sistemului de reglare în cascadă cu trei bucle, se prezintă procedura de calcul presupunând că parametrii reguletoarelor se vor determina printr-o oarecare metodă.

Se consideră că s-au calculat parametrii reguletorului $H_{R3}(s)$ și atunci se calculează f.d.t a buclei închise:

$$H_0^3(s) = \frac{H_{R3}(s)H_{p3}(s)}{1+H_{R3}(s)H_{p3}(s)}.$$

Se determină f.d.t. a obiectului echivalent al conturului doi:

$$H'_{p2}(s) = H_0^3(s)H_{p2}(s).$$

Se presupune că s-au calculat parametrii reguletorului $H_{R2}(s)$ și atunci se calculează f.d.t a buclei închise:

$$H_0^2(s) = \frac{H_{R2}(s)H'_{p2}(s)}{1+H_{R2}(s)H'_{p2}(s)}.$$

Se determină f.d.t. a obiectului echivalent al buclei principale:

$$H'_{p1}(s) = H_0^2(s)H_{p1}(s).$$

Se presupune că s-au calculat parametrii reguletorului $H_{R1}(s)$ și atunci se calculează f.d.t a buclei închise a sistemului:

$$H_0(s) = \frac{H_{R1}(s)H'_{p1}(s)}{1+H_{R1}(s)H'_{p1}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \blacksquare$$

3.5 Structura sistemului automat cu predictor Smith

În procese industriale și tehnologice datorită evoluției lente a proceselor fizice și chimice determină apariția timpului mort, ceea ce aduce la dificultăți la conducerea acestor procese. Timpul mort influențează negativ asupra stabilității și performanțelor sistemului.

Același efect se obține și în cazul când obiectele se conduc cu regulatoare numerice.

Dacă se cere ca performanțele sistemului trebuie să fie superioare, atunci se utilizează regulatoare speciale ca *regulatorul cu predicție Smith* sau algoritmi de compensare a timpului mort – utilizarea *reglării cu predicție*, care prezintă structuri de sistem cu scoaterea timpului mort în afara buclei de reglare.

Structura sistemului cu *regulatorul cu predicție Smith* este dată în fig. 3.5.

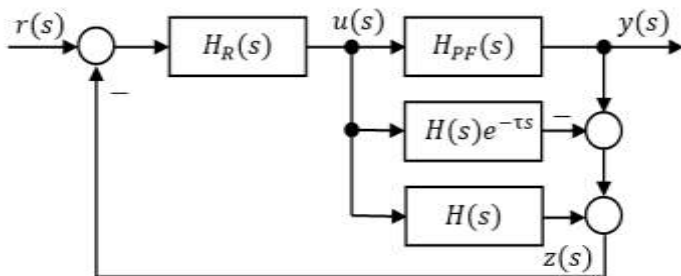


Fig. 3.5. Structura sistemului cu predictor Smith

Utilizarea acestei structuri conduce la construirea unui model paralel cu scopul compensării timpului mort.

Se consideră procesul descris de f.d.t. $H(s)$ stabilă, proprie și cu timp mort de forma:

$$H_{PF}(s) = H(s)e^{-\tau s}. \quad (3.14)$$

Algoritmul de reglare se proiectează pe baza f.d.t. între semnalele $r(s)$ și $z(s)$, care nu conține timpul mort în bucla de reglare:

$$H_{zr}(s) = \frac{H_R(s)H(s)}{1+H_R(s)H(s)}. \quad (3.15)$$

Se determină f.d.t. între mărimile $r(s)$ și $y(s)$ cu relația:

$$H_0(s) = T(s) = \frac{H_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+H_R(s)H(s)} = H_{zr}(s)e^{-\tau s}. \quad (3.16)$$

Relația (3.15) evidențiază modalitatea de alegere și proiectare a regulatorului pe baza modelului fără timp mort și întârzierea procesului cu mărimea τ .

Se consideră modelul aproximat al procesului:

$$\hat{H}_p(s) = \hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}, \quad (3.17)$$

iar al modelului real este de aceeași formă:

$$H_p(s) = H(s)e^{-\tau s}, \quad (3.18)$$

atunci structura de reglare cu predictor Smith are forma dată în fig. 3.6.

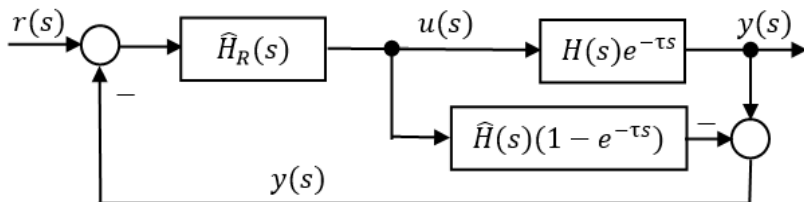


Fig. 3.6. Structura sistemului modificată cu predictor Smith

F.d.t. a regulatorului se determină pe baza modelului fără timp mort, iar regulatorul cu predictor Smith are f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{\hat{H}_R(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\tau s})}. \quad (3.19)$$

F.d.t. a canalului direct este:

$$H_d(s) = H_R(s)H_p(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\tau s})}, \quad (3.20)$$

iar f.d.t. a sistemului închis se calculează cu expresia:

$$\begin{aligned}
H_0(s) &= \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}} = \\
&= \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)(H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s})}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Dacă în (3.21) $\hat{\tau} = \tau$ și $\hat{H}(s) = H(s)$, atunci $H_0(s)$ va avea forma:

$$H_0(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)} e^{-\tau s} = H_{zr}(s)e^{-\tau s}. \tag{3.22}$$

Din relația (3.21) diferența din paranteză evidențiază incertitudinea aditivă exprimată în forma:

$$L_A(s) = H(s)e^{-\tau s} - \hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}, \tag{3.23}$$

iar f.d.t. din (3.21) ia forma:

$$H_0(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)L_A(s)}. \tag{3.24}$$

În aceeași manieră se evidențiază incertitudinile multiplicative exprimate în forma:

$$L_M(s) = \frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}} - 1, \tag{3.25}$$

iar f.d.t. (3.21) va lua forma:

$$\begin{aligned}
H_0(s) &= \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s} \left[\frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}} - 1 \right]} = \\
&= \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}L_M(s)}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Analiza robusteții stabilității și performanțelor sistemului cu regulatorul $\hat{H}_R(s)$ proiectat pe baza modelului fără timp mort poate fi studiată pentru diferite clase de incertitudini structurate și nestructurate pentru $\tau \neq \hat{\tau}$ și $H(s) \neq \hat{H}(s)$.

F.d.t. (3.20) a sistemului deschis cu incertitudini multiplicative se prezintă în forma:

$$H_d(s) = \frac{\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\hat{\tau}s})} \frac{H(s)e^{-\tau s}}{H(s)e^{-\tau s}} = \hat{H}_d(s)[L_M(s) + 1], \quad (3.27)$$

unde $\hat{H}_d(s)$ este f.d.t. a canalului direct pentru cazul când $\tau = \hat{\tau}$ și $H(s) = \hat{H}(s)$.

Exemplul 3.3. Se dă procesul descris cu f.d.t. [1, 2]:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

și un model de aproximare cu f.d.t. de forma:

$$\hat{H}_P(s) = \frac{\hat{k}e^{-\hat{\tau}s}}{\hat{T}s+1}$$

cu valorile parametrilor $\hat{k} = 2$, $\hat{T} = 10$ s, $\hat{\tau} = 4$ s.

Se presupune că parametrii modelelor se exprimă cu relațiile: $\tau \neq \hat{\tau}$, $T \neq \hat{T}$ și $\hat{k} = k$ și se cere analiza efectului parametrilor $\delta = \tau - \hat{\tau}$ și $\Delta = T - \hat{T}$ asupra performanțelor sistemului cu regulator proiectat în baza modelului aproximat.

Soluționare. Se proiectează regulatorul impunând ca răspunsul indicial al sistemului să fie descris de f.d.t. de forma:

$$H_0(s) = \frac{1}{T_0s+1} e^{-\tau s}$$

cu $T_0 = \hat{T}/\hat{k} = 10/1 = 10$ s.

Se determină modelul f.d.t. a sistemului deschis fără timp mort după relația:

$$H_d(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{\frac{1}{T_0s+1}}{1-\frac{1}{T_0s+1}} = \frac{1}{T_0s}.$$

F.d.t. a căii directe se exprimă:

$$H_d(s) = \hat{H}_R(s)H_P(s).$$

Din f.d.t. a sistemului deschis se determină modelul f.d.t. a regulatorului:

$$\hat{H}_R(s) = \frac{H_d(s)}{H_P(s)} = \frac{\hat{T}_0 s + 1}{\hat{T}_0 s} = 1 + \frac{1}{\hat{T}_0 s} = 1 + \frac{\hat{k}}{s} = \frac{8s + 1}{8s},$$

care este un regulator de tipul PI cu parametrii de acord $\hat{k} = 1$, $T_i = \hat{T}_0 = 8$ s, $k_i = \hat{k} = 0,125$ s⁻¹.

Pentru acest caz incertitudinea multiplicativă are forma:

$$L_M(s) = \frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}} - 1 = \frac{H(s)}{\hat{H}(s)} e^{-(\tau - \hat{\tau})s} - 1 = \frac{H(s)}{\hat{H}(s)} e^{-\delta s} - 1 = \frac{\hat{T}s + 1}{Ts + 1} e^{-\delta s} - 1.$$

Dacă constanta de timp a modelului procesului este calculată cu o eroare Δ : $T = \hat{T} \pm \Delta$, atunci se obține pentru incertitudinea multiplicativă:

$$L_M(s) = \frac{\hat{T}s + 1}{(\hat{T} \pm \Delta)s + 1} e^{-\delta s} - 1.$$

Pentru cazul când $\delta \in [0,2 \div 0,6]$ și $\Delta \in [2 \div 4]$ se calculează valoarea constantei de timp a procesului la valoarea erorii mari admisibile $\Delta = 4$ și $T = \hat{T} \pm \Delta = 8 + 4 = 12$ s, $\hat{T} = 8$ s și valoarea timpului procesului cu eroarea minimă admisibilă $\delta = 0,2$, $\delta = \tau - \hat{\tau} = \tau - 4 = 0,2$, $\tau = 4,2$ s. ■

Din analiza răspunsurilor indiciale pentru diferite incertitudini minime $\delta \neq 0$ și $\Delta \neq 0$ rezultă că strategia de reglare cu predictor Smith are o bună robustețe a stabilității și a performanțelor sistemului proiectat [1, 2].

4 MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR NUMERICE DE REGLARE AUTOMATĂ

4.1. Modelarea blocurilor din structura sistemului numeric monovariabil

Structura funcțională uzuală a unui sistem numeric de reglare automată monovariabil este dată în fig. 4.1, unde sunt precizate semnalele procesate de fiecare bloc separat și natura acestor semnale.

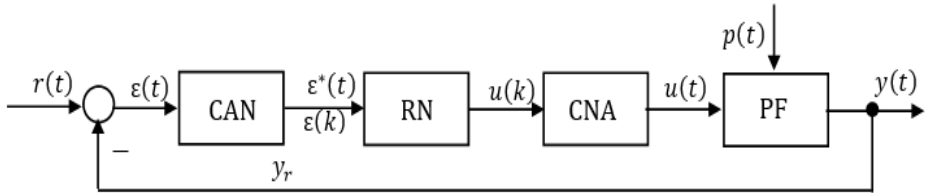


Fig. 4.1. Schema bloc funcțională a sistemului numeric de reglare automată

În structura sistemului sunt utilizate însemnările: CAN este convertorul analogic numeric sau interfața de conversie, RN – regulator numeric, CNA - convertorul numeric analogic sau interfața de conversie, PF – partea fixată (care include elementul de execuție, instalația tehnologică – procesul condus, traductorul), semnalele: $r(kT)$ – referința, $\varepsilon(t), \varepsilon(kT)$ – eroarea continuă și eșantionată a sistemului, $u(kT), u(t)$ – mărimea de reglare (comandă) eșantionată și discret-continuă, $y(t)$ – ieșirea procesului continuă, $p(t)$ – perturbăția.

Se analizează procesarea semnalelor de către fiecare element funcțional în parte ale structurii sistemului.

1. Partea fixată PF este un sistem dinamic continuu, având mărimea

de intrare semnalul continuu cuantificat $u(t)$ și mărimea de ieșire semnalul continuu analogic $y(t)$ și se modelează printr-o funcție de transfer $H_p(s)$ prezentată în forma operațională:

$$y(s) = H_p(s)u(s). \quad (4.1)$$

2. Algoritmul numeric de reglare automată (ANRA) sau regulatorul numeric (RN) prelucrează semnalul erorii:

$$\varepsilon(k) = r(k) - y(k) \quad (4.2)$$

pentru a elabora semnalul numeric al conducerii:

$$u(k) = f(\varepsilon(k)). \quad (4.3)$$

Din punctul de vedere al prelucrării numerice semnalele $r(k)$, $y(k)$ și $u(k)$ se prezintă ca șiruri de valori implicate într-un proces de calcul iterativ.

Algoritmul de reglare se implementează sub forma unei ecuații cu diferențe finite pornind de la ecuația diferențială de forma:

$$\begin{aligned} u^{(s)}(t) + p_{s-1}u^{(s-1)}(t) + \dots + p_1\dot{u}(t) + p_0u(t) = \\ = q_r\varepsilon^r(t) + q_{r-1}\varepsilon^{(r-1)}(t) + \dots + q_1\dot{\varepsilon}(t) + q_0\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

sau cu diferențe finite obținute prin metode de aproximare:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^{(n)}u(k)}{T^n} + p_{n-1}\frac{\Delta^{(n-1)}u(k)}{T^{n-1}} + \dots + p_1\frac{\Delta u(k)}{T} + p_0u(k) = \\ = q_m\frac{\Delta^{(m)}\varepsilon(k)}{T^m} + q_{m-1}\frac{\Delta^{(m-1)}\varepsilon(k)}{T^{m-1}} + \dots + q_1\frac{\Delta\varepsilon(k)}{T} + q_0\varepsilon(k), \end{aligned} \quad (4.5)$$

unde prin Δ se notează diferența înapoi – metoda dreptunghiului cu întârziere: $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, $\Delta\varepsilon(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$.

Ecuția (4.5) corespunde descrierii operaționale în transformata z :

$$u(z) = H_R(z)\varepsilon(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}\varepsilon(z), \quad (4.6)$$

care prezintă f.d.t. a regulatorului:

$$\begin{aligned} H_R(z) &= \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_r z^r + q_{r-1} z^{r-1} + \dots + q_1 z + q_0}{z^s + p_{s-1} z^{s-1} + \dots + p_1 z + p_0} = \\ &= \frac{q_r + q_{r-1} z^{-1} + \dots + q_1 z^{-(r-1)} + q_0 z^{-r}}{1 + p_{s-1} z^{-1} + \dots + p_1 z^{-(r-1)} + p_0 z^{-r}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

1. Convertorul CAN are rolul unui eșantionator care din semnalul continuu $y(t)$ produce semnalul numeric $y(k)$. Eșantionatorul ideal se prezintă ca un element cheie ideală (fig. 4.2, *a*), care produce o succesiune de impulsuri ideali sau impulsuri Dirac:

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (4.8)$$

Elementul CAN se prezintă ca un modulator la ieșirea căruia se obține un proces de modulație în impulsuri Dirac având la intrări semnalele $y(t)$ și $m(t)$ (fig. 4.2, *b*), iar simbolic se prezintă ca în fig. 4. 2, *c* transformare precisă.

Deci eșantionarea este modelată ca un proces neliniar datorită blocului de multiplexare la ieșirea căruia se obține semnalul discretizat:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t - kT). \quad (4.9)$$

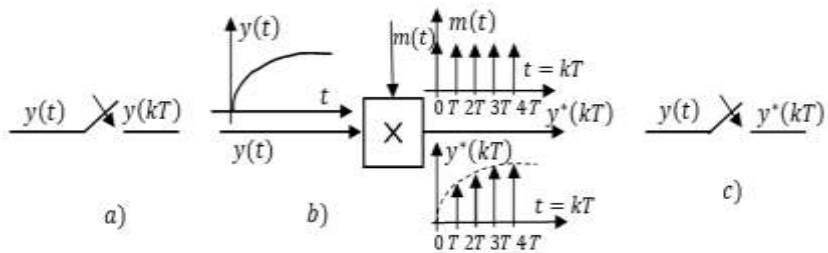


Fig. 4.2. Discretizarea semnalului ieșirii sistemului

Mărimea $y^*(t)$ conține informații asupra valorii numerice a eșantioanelor – ordonatelor reale $y(kT)$, dar într-o reprezentare de tip distribuții δ . Reprezentarea grafică a lui $y(kT)$ din fig. 4.2, *a* se utilizează pentru semnificația fizică, iar aceea din fig. 4.2, *c* prezintă modelarea matematică corectă.

2. Convertorul CNA îndeplinește rolul unui extrapolator de ordin zero sau element de reținere de ordin zero (EROZ) care din semnalul numeric $u(kT)$ produce semnalul continuu cuantificat $u(t)$ dat în fig. 4.3, *a*.

Semnalul $u(kT)$ are consistență fizică și modelarea matematică se prezintă ca semnal idealizat:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT). \quad (4.10)$$

Extrapolarea de ordin zero este modelată ca un proces liniar și dată în formă operațională:

$$u(s) = H_{EROZ}(s)u^*(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts}),$$

$$H_{EROZ}(s) = \frac{u(s)}{u^*(s)} = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts}). \quad (4.11)$$

Formarea impulsurilor dreptunghiulare se dă în fig. 4.3 *b* și realizarea lor fig. 4.3, *c*.

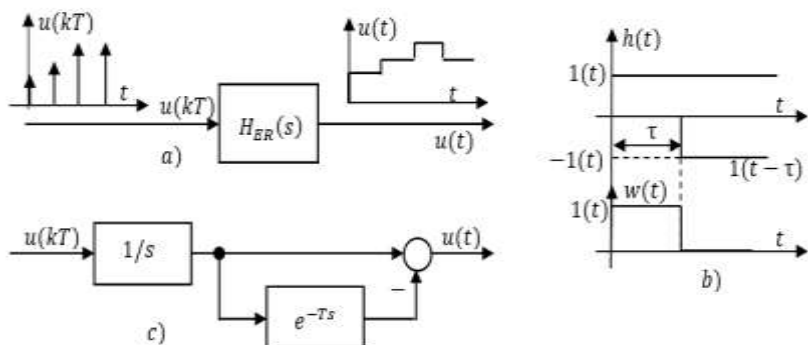


Fig. 4.3. Formarea semnalului de element de reținere

Deoarece funcționarea părții fixate PF este un proces continuu, iar funcționarea regulatorului RN este un proces numeric este necesar de a prezenta descrierea SNRA în circuit închis atât ca model matematic continuu în transformata Laplace s , cât și ca model matematic discret în transformata z .

Astfel, se obține schema structurală a SNRA dată în fig. 4.4

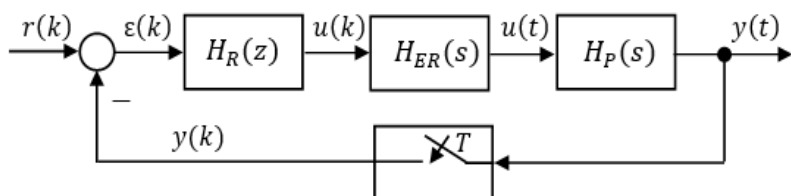


Fig. 4.4. Schema structurală a SNRA

Semnalul fizic $y(kT)$ al convertorului CAN eșantionat în impulsuri Dirac, iar în regulatorul RN ca un șir numeric. Semnalul fizic $u(kT)$ în regulatorul RN se prezintă ca un șir numeric, iar în CNA ca fiind eșantionat cu impulsuri δ . Elementele CAN, RN și CNA funcționează sincronizat.

4.2 Modelarea sistemului numeric ca sistem continuu cu eșantionare

Deoarece mărimea de ieșire $y(t)$ a sistemului este o mărime continuă și performanțele trebuie să fie formulate în termenii evoluției în timp continuu, atunci este necesar de a obține modelul continuu al sistemului.

Pornind de la structura sistemului (fig. 4.4) elementele EROZ și PF sunt înseriate și mărimea de ieșire este:

$$y(s) = H_{ER}(s)H_P(s)u^*(s), \quad (4.12)$$

iar în corespundere cu teoria sistemelor cu eșantionare expresia (4.12) va fi:

$$y^*(s) = [H_{ER}(s)H_P(s)]^*u^*(s), \quad (4.13)$$

unde $y^*(s)$ este transformata Laplace a mărimii $y^*(t)$, care reprezintă idealizarea lui $y(k)$ de la elementul CAN.

Pentru mărimea de ieșire a regulatorul numeric RN în variabila s obținem expresia:

$$u^*(s) = H_R^*(s)\varepsilon^*(s) = H_R^*(s)(r^*(s) - y^*(s)). \quad (4.14)$$

Schema structurală a sistemului ca sistem continuu cu eșantionare se dă în fig. 4.5.

F.d.t. a regulatorului $H_R^*(s)$ nu are sens fizic propriu, doar este un algoritm, care procesează semnalele discrete în regulator și se descrie și în timp continuu cu procesări cu timp morți, multipli perioadei de eșantionare T , deoarece f.d.t. $H_R^*(s)$ este o fracție rațională în operatorii e^{Ts} sau e^{-Ts} .

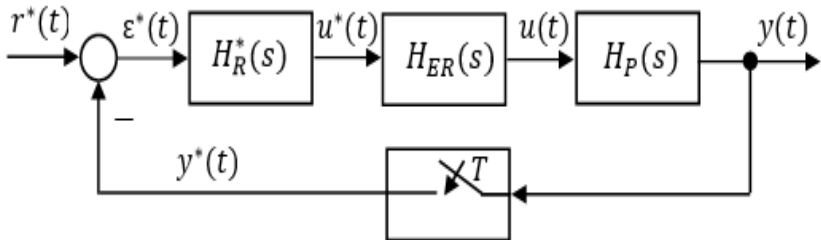


Fig. 4.5. Schema structurală a SNRA

Cunoscând f.d.t. $H_{ER}(s)$, $H_P(s)$ și $H_R^*(s)$, se poate determina imaginea în transformata Laplace a lui $y(t)$:

$$y(s) = H_{ER}(s)H_P(s) \frac{H_R^*(s)}{1+[H_{ER}(s)H_P(s)]^*H_R^*(s)} r^*(s). \quad (4.15)$$

Din analiza expresiei (4.15) rezultă că mărimea $y(s)$ nu este o funcție rațională în s utilizarea acesteia este dificilă.

Dacă se face mutarea eșantionatorului de pe calea de reacție la ieșirea căii directe, atunci se obține schema (fig. 4.6), în care valorile mărimii de ieșire $y(kT)$ a părții fixate PF sunt cunoscute numai la momentele de eșantionare $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

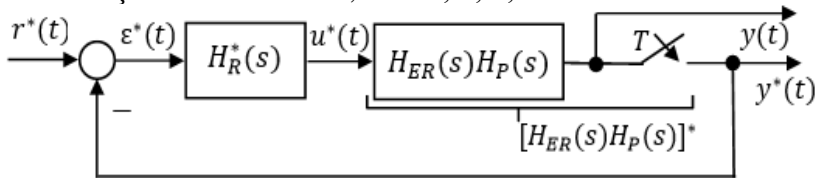


Fig. 4.6. Schema structurală a SNRA cu eșantionarea ieșirii

În acest caz mărimea de ieșire se prezintă în forma operațională:

$$y^*(s) = H_0^*(s)r^*(s) = \frac{[H_{ER}(s)H_P(s)]^*H_R^*(s)}{1+[H_{ER}(s)H_P(s)]^*H_R^*(s)} r^*(s). \quad (4.16)$$

Nici imaginea lui $y^*(s)$ nu este o funcție rațională în s , dar aceste modele de tip continuu vor fi utilizate pentru a caracteriza performanțele sistemului în circuit închis.

4.3 Modelarea sistemului numeric ca sistem discret

Deoarece regulatorul realizează în algoritm discret în baza valorilor discrete ale lui $y(kT)$ apare necesitatea de a obține modelul discret al

sistemului. Analizând sistemul discret obținem pentru partea fixată cu EROZ mărimea ieșirii în formă operațională:

$$y(z) = H_{PE}(z)u(z), \quad (4.17)$$

unde f.d.t. $H_{PE}(z)$ se calculează utilizând tabele după relația, iar transformata $z = e^{Ts}$ este transformata :

$$H_{PE}(z) = Z\{H_{ER}(s)H_p(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{H_p(s)}{s}\right\}. \quad (4.18)$$

Dacă în f.d.t. a părții fixate se conține componenta cu timpul mort:

$$H_p(s) = zH(s), \quad (4.19)$$

unde $H(s)$ este o rațională în s .

Pentru a obține transformata z de la elementul cu timp mort se procedează:

$$Z\{e^{-\tau s}\} = z^{-d}, \quad (4.20)$$

unde $d = \tau/T$, care este un număr întreg de perioade de eșantionare $d = 0, 1, 2, \dots$, iar T este perioade de eșantionare.

Relația (4.18) cu timp mort se prezintă în forma:

$$H_{PE}(z) = Z\{H_{ER}(s)e^{-\tau s}H(s)\} = (1 - z^{-1})z^{-d}Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}. \quad (4.21)$$

Regulatorul se descrie în formă operațională:

$$u(z) = H_R(z)\varepsilon(z). \quad (4.22)$$

Cu relațiile (4.21) și (4.22) structura sistemului discret se prezintă în fig. 4.7.

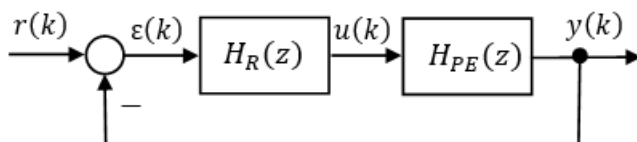


Fig. 4.7. Schema structurală a SNRA discret

Semnalul discret $y(kT)$ în raport cu semnalul discret al referinței $r(kT)$ în formă operațională este:

$$y(z) = H_0(z)r(z) = \frac{H_R(z)H_{PE}(z)}{1+H_R(z)H_{PE}(z)}r(z), \quad (4.23)$$

unde $H_0(z)$ este f.d.t. a sistemului în circuit închis.

Expresia (4.23) este echivalentul discret al descrierii continue realizată prin relația:

$$y^*(s) = H_0^*(s)r^*(s), \quad (4.24)$$

unde se utilizează egalitățile: $r(z)|_{z=e^{-Ts}} = r^*(s)$, $y(z)|_{z=e^{-Ts}} = y^*(s)$, $H_0(z)|_{z=e^{-Ts}} = H_0^*(s)$.

Se consideră că atât f.d.t. $H_0(z)$, cât și $y(z)$ sunt funcții raționale în z , ceea ce prezintă avantaje la utilizarea acestor modele de tip discret ale SNRA.

4.4 Modele discrete ale sistemelor multivariabile

Modelarea sistemelor multivariabile depinde de forma de descriere matematică a părții fixate care poate fi intrare-ieșire sau intrare-stare-ieșire.

1. Se presupune că partea fixată se dă prin matricea de transfer $H_{PE}(s)$. Utilizând cele expuse mai sus, modelul matematic al PF va fi matricea care reprezintă intrarea-ieșirea în forma:

$$H_{PE}(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{H_{PF}(s)}{s} \right\}. \quad (4.25)$$

2. Partea fixată PF continuă este prezentată în forma intrare-stare-ieșire uzual prin notația $S = \Sigma_p(A, B, C, D)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \tag{4.26}$$

În cazul dat pentru (4.26) există două modalități de abordare a modelării structurii de reglare numerică:

Se obține o reprezentare intrare-stare-ieșire de tip discret:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k), \end{aligned} \tag{4.27}$$

unde matricea fundamentală:

$$\Phi = e^{AT}, \Gamma = \left[\int_0^T e^{AT} d\tau \right] B. \tag{4.28}$$

Se obține o reprezentare intrare-ieșire de tip continuu de forma:

$$H_{PE}(s) = C[sI - A]^{-1}B + D, \tag{4.29}$$

care permite de a utiliza ideea de transformare de tip (4.25).

În cazul când matricea A nu are valori proprii nule, adică partea fixată nu conține elemente integratoare, atunci integrala Γ din (4.28) poate fi rescrisă în forma:

$$\Gamma = A^{-1}(e^{AT} - I)B. \tag{4.30}$$

Astfel, se constată că utilizarea modelului (4.27) necesită evaluarea exponențialei matriceale Φ din (4.28).

Modelul discret al PF include extrapolatoarele de ordin zero de pe canalele de intrare $u(t)$, iar schema bloc structurală a SNRA se dă în fig. 4.8.

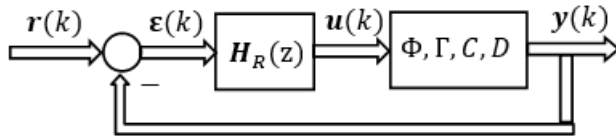


Fig. 4.8. Schema bloc structurală a SNRA multivariabil

Din expresia (4.26) soluția se prezintă pentru intervalul $kT, (k + 1)T$:

$$x((k + 1)T) = e^{A((k+1)T - kT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T - \tau)}Bu(kT) d\tau \quad (4.31)$$

cu calculul părții fixate a lui PF în mod discret:

$$H_{PE}(z) = C[zI - \Phi]^{-1}\Gamma + D. \quad (4.32)$$

Metodele de discretizare exactă a modelelor continue se prezintă în diagrama din fig. 4.9.

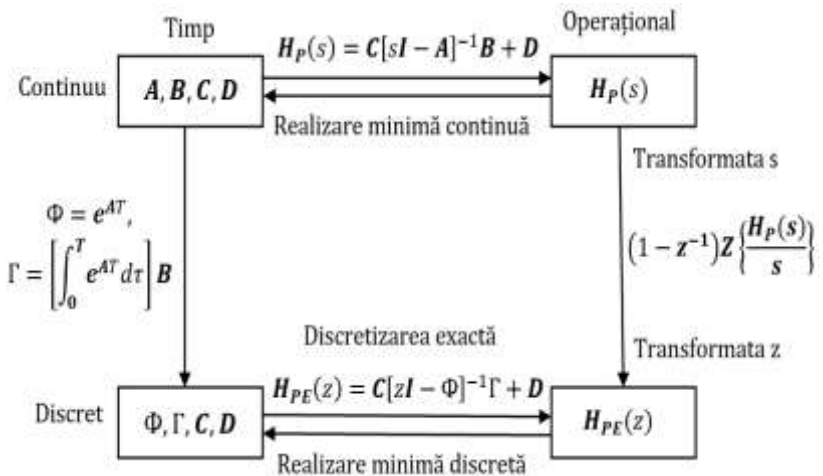


Fig. 4.9. Diagrama discretizării modelului părții fixate

Atenționăm că parcurgerea diagramei plecând de la $H_{PE}(s)$ și ajungând la (Φ, Γ, C, D) pe cele două trasee posibile conduce la modele discrete intrare-stare-ieșire echivalente și nu identice, deoarece construcția realizărilor minimale este arbitrară.

4.5 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-ieșire

Se consideră un sistem automat continuu descris de o f.d.t. rațională de ordinul n și atunci acest sistem poate fi modelat printr-o schemă bloc care conține n integratoare. Fiecare integrator este descris de o ecuație diferențială de forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t), \quad (4.33)$$

care are soluția:

$$y(t) = \int_0^t u(t)dt. \quad (4.34)$$

Expresia (4.34) în formă operațională va fi:

$$y(s) = \frac{1}{s}u(s). \quad (4.35)$$

Se cere să se calculeze aproximativ soluția lui $y(t)$ la momentele de eșantionare, deci se face evoluția aproximativă a lui $y(kT)$, $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Presupunem pentru $u(t)$ o evoluție arbitrară dată în fig. 4.10, a și atunci din soluția (4.34) se obține:

$$y(kT) - y((k-1)T) = \int_{(k-1)T}^{kT} u(\tau)d\tau, \quad (4.36)$$

unde integrala are valoarea ariei hașurate în figură.

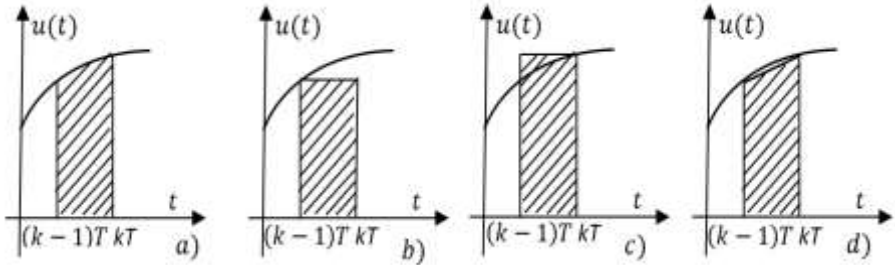


Fig. 4.10. Prezentarea metodelor de discretizare

Cele mai larg utilizate metode de aproximare (discretizare) aproximativă sunt:

1. Metoda dreptunghiului în avans (MDA).
2. Metode dreptunghiului în întârziere (MDÎ).
3. Metoda trapezului (MT) sau metoda transformării biliniare.

Toate metodele se bazează pe evaluarea aproximativă a integralei din (4.36) și care vor fi analizate în paralel. Prin aproximarea integralei, ecuația (4.36) se rescrie pentru fiecare dintre metode:

1. MDA (fig. 4.11, b): $y(kT) - y((k-1)T) \approx Tu((k-1)T)$. (4.37)

2. MDÎ (fig. 4.11, c): $y(kT) - y((k-1)T) \approx Tu(kT)$. (4.38)

3. MT (fig. 4.11, d): $y(kT) - y((k-1)T) \approx T \frac{u((k-1)T) + u(kT)}{2}$. (4.39)

Dacă se aplică transformata z la aproximările (4.37) – (4.39), atunci se obțin relațiile de calcul aproximativ ale f.d.t. continue prin substituirea lui s cu următoarele expresii pentru metodele:

Metoda dreptunghiului în avans:

$$s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}. \quad (4.40)$$

Metode dreptunghiului în întârziere:

$$s \approx \frac{z-1}{Tz} = \frac{1}{T}(1 - z^{-1}). \quad (4.41)$$

Metoda trapezului:

$$s \approx \frac{2z-1}{Tz+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (4.42)$$

Expresiile (4.40) – (4.42) pot fi privite și ca aproximările Pade ale lui $z = e^{Ts}$ pentru variabila complexă date în fig. 4.11. În fig. 4.11, *a* se dă transformarea corectă a semiplanului C^- a planului s în planul z , iar a metodelor de transformarea aproximativă a semiplanului C^- a planului s în planul z se dau în fig. 4.11, *b, c, d*.

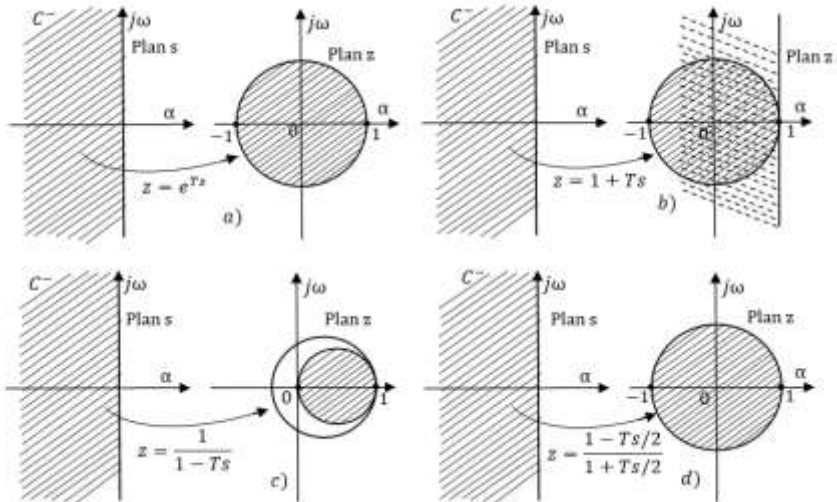


Fig. 4.11. Transformarea planului s în planul z

Metoda dreptunghiului în avans (fig. 4.11, *b*):

$$z = e^{Ts} \approx 1 + Ts. \quad (4.43)$$

Metode dreptunghiului în întârziere (fig. 4.11, *c*):

$$z = e^{Ts} \approx \frac{1}{e^{-Ts}} \approx \frac{1}{1-Ts}. \quad (4.44)$$

Metoda trapezului (fig. 4.11, d):

$$z = e^{Ts} = \frac{e^{(T/2)s}}{e^{-(T/2)s}} \approx \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s}. \quad (4.45)$$

Analizând aproximațiile prin metodele prezentate se constată că discretizarea prin metoda MDA poate transforma o funcție de transfer continuă stabilă într-o f.d.t. discretă instabilă. Există o corelație dintre stabilitatea sistemului cu perioada de eșantionare și regiunii cu polii alocați ai f.d.t. a sistemului. Metodele MDÎ și MT dau rezultate stabile.

Aproximările de tip discret în domeniul timp pentru funcționarea integratorului se realizează utilizând următoarele metode.

Metoda dreptunghiului în avans:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau) d\tau \approx T \sum_{j=1}^k u((j-1)T), \quad (4.46)$$

Metoda dreptunghiului în întârziere:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau) d\tau \approx T \sum_{j=1}^k u(jT), \quad (4.47)$$

Metoda trapezului:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau) d\tau \approx T \sum_{j=1}^k \frac{u((j-1)T) + u(jT)}{2}. \quad (4.48)$$

Pentru ecuația diferențială se utilizează următoarele scheme de integrare cu pas constant:

Metoda dreptunghiului în avans este metoda Euler înainte (predictor sau explicită):

$$y(kT) \approx y((k-1)T) + T\dot{y}((k-1)T). \quad (4.49)$$

Metoda dreptunghiului în întârziere este metoda Euler înapoi (corector sau implicită):

$$y(kT) \approx y((k-1)T) + T\dot{y}(kT). \quad (4.50)$$

Metoda trapezului este metoda Euler modificată (predictor-corrector):

$$y(kT) \approx y((k-1)T) + T \frac{\dot{y}((k-1)T) + \dot{y}(kT)}{2}. \quad (4.51)$$

Metoda Euler înainte poate conduce la instabilitate numerică.

În privința preciziei schemele de integrare înainte și înapoi introduc o eroare locală de ordinul lui T^2 și una globală de ordinul lui T , iar metoda Euler modificată introduce o eroare locală de ordinul T^3 și una globală de ordinul lui T^2 .

Metoda MDA păstrează în modelul discret gradele numărătorului și numitorului din modelul continuu, iar metoda dreptunghiului în întârziere și metoda trapezului conduc în discret la grade egale pentru numărător și numitor. Metoda dreptunghiului în întârziere introduce zerouri suplimentare în $z = 0$, iar metoda trapezului introduce zerouri suplimentare în $z = 1$.

Aceste aproximări sunt larg aplicate pentru modelarea de tip discret atât a părții fixate cât și a algoritmului de reglare. Modelele discrete au o importanță deosebită pentru algoritmul de reglare, care în formă finală se prezintă în ecuații cu diferențe finite necesare la implementarea algoritmului pe microprocesoare.

Dacă este cunoscută ecuația diferențială a algoritmului de reglare, atunci aplicarea metodei dreptunghiului în întârziere poate fi utilizată în domeniul timp ca o transformare directă a ecuației diferențiale în ecuația cu diferențe finite:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) + p_{n-1}u^{n-1}(t) + \dots + p_1\dot{u}(t) + p_0u(t) = \\ = q_m\varepsilon^{(m)}(t) + q_{m-1}\varepsilon^{m-1}(t) + \dots + q_1\dot{\varepsilon}(t) + q_0\varepsilon(t), \quad m \leq n \end{aligned} \quad (4.52)$$

și ecuația cu diferențe finite:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{(n)}u(kT)}{T^n} + p_{n-1} \frac{\Delta^{(n-1)}u(kT)}{T^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{\Delta u(kT)}{T} + p_0 u(kT) = \\ & = q_m \frac{\Delta^{(m)}\varepsilon(kT)}{T^m} + q_{m-1} \frac{\Delta^{(m-1)}\varepsilon(kT)}{T^{m-1}} + \dots + q_1 \frac{\Delta\varepsilon(kT)}{T} + q_0 \varepsilon(kT). \end{aligned} \quad (4.53)$$

În baza acestei metode se efectuează calculul aproximativ al derivatei unei funcții $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} = \frac{\Delta x(kT)}{T} \quad (4.54)$$

și în formă generală:

$$x^{(i)}(t) = \frac{\Delta^{(i)}x(kT)}{T^i}, \quad (4.55)$$

unde Δ este diferența la stânga sau înapoi și $\Delta x(kT) = x(kT) - x((k-1)T)$, care corespunde acțiunii operatorului din planul complex $(1 - z^{-1})$ asupra funcției imagine.

De asemenea ecuațiile diferențiale se aproximează prin utilizarea metodei trapezului.

Aplicarea metodei dreptunghiului în avans conduce la ecuații cu diferențe cu termeni anticipativi, care nu pot fi realizați.

4.6 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-stare-ieșire

Pornind de la modelul ISI în timp continuu în forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t). \end{aligned} \quad (4.56)$$

obținem în transformata s expresia în forma:

$$\begin{aligned}
 s\mathbf{x}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}u(s), \\
 y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}u(s).
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

De la forma (4.57) aplicând metoda de aproximare a dreptunghiului cu avans se obține în transformata z expresia de forma:

$$\begin{aligned}
 z\mathbf{x}(z) &\approx (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\mathbf{x}(z) + T\mathbf{B}u(z), \\
 y(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}u(z),
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

căreia în domeniului timpului îi corespunde următorul model discret aproximativ:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &\approx (\mathbf{I} + AT)x(k) + T\mathbf{B}u(k) \\
 y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k).
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

Modelul exact al expresiei (4.57) în formă discretă este:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\
 y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k),
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

unde $\Phi = e^{AT}$ numită matricea fundamentală, $\Gamma = \left[\int_0^T e^{A\tau} \right] B$.

Matricele Φ și Γ se calculează aproximativ cu relațiile:

$$\Phi \approx \mathbf{I} + A, \quad \Gamma \approx A^{-1}(\mathbf{I} + AT - AT)B.
 \tag{4.61}$$

Dacă se calculează expresia (4.60) cu expresia (4.61) se obține expresia (4.59).

Obținerea modelelor aproximative prin aplicarea metodelor dreptunghiului în întârziere și trapezului de la modele ISI este similară, dar se atenționează că vor conduce la un model discret în care matricele C și D nu se păstrează, dar se obțin alte matrici și modelul în domeniului timpului discret are forma:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \tag{4.62}$$

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k).$$

Discretizarea aproximativă se tratează ca o echivalență între aproximările în domeniul timpului, care se realizează cu scheme de integrare numerică și aproximările în domeniul complex, realizate între variabilele operaționale s și z conform diagramei dată în fig. 4.12.

Pornind de la matricea $H_p(s)$ către (Φ, Γ, H, J) pe cele două trasee posibile, modelele de intrare-stare-ieșire discrete obținute nu mai sunt echivalente ca în cazul discretizării exacte.

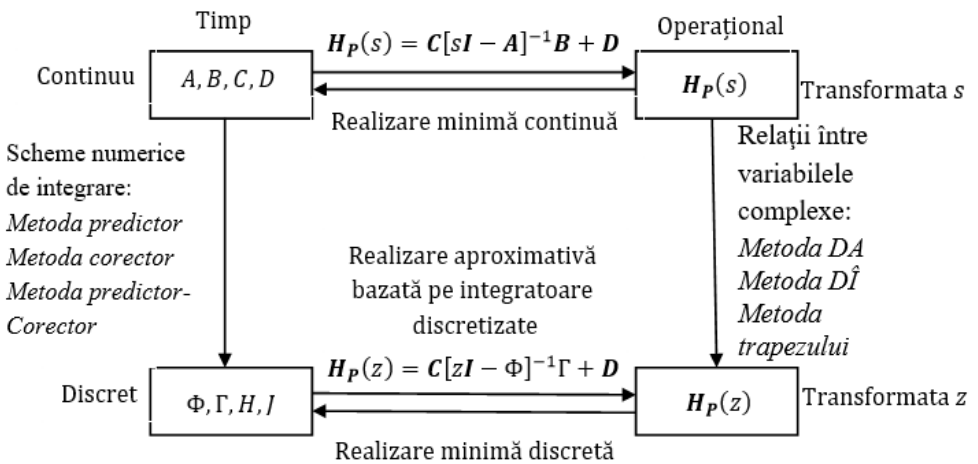


Fig. 4.12. Diagrama de discretizare a modelului ISI

4.7 Criterii de performanță utilizate în reglarea numerică

Criteriile de performanță sau criteriile de calitate ale sistemului automat definesc obiectivele reglării și se clasifică în criterii locale și criterii globale.

Criteriile locale sunt corelate cu natura semnalelor exogene referința și perturbația, care acționează asupra procesului condus.

Criteriile globale sau integrale (numite și sintetice) prezintă formalismul matematic aplicat pentru descrierea procesului condus.

4.7.1 Criteriile locale de performanță

Proiectarea SNRA pe baza criteriilor locale de performanță conduce la obținerea unui anumit răspuns al sistemului studiat când referința este un semnal de tipul treaptă, rampă, parabolă etc. sau perturbația care este definită ca semnal tipic. Caracterizarea cantitativă a unor răspunsuri ale sistemului la semnale de referință sau perturbații cunoscute se exprimă prin mai mulți criterii de performanță: eroarea staționară ε , timpul de reglare t_r , suprareglarea σ , timpul de creștere t_c , timpul primului maxim t_m , gradul de amortizare δ etc.

Utilizând valorile criteriilor se pot compara răspunsul real cu cel considerat ideal pentru sistemul automat studiat.

Pe baza răspunsului indicial al unui sistem de reglare automată se definesc indicii de performanță locali pentru regimul tranzitoriu astfel:

1. Eroarea staționară reprezentată discret este o valoare constantă a semnalului erorii:

$$\varepsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) \quad (4.63)$$

sau în transformata z eroarea este:

$$\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z). \quad (4.64)$$

Pentru un sistem numeric cu structura cunoscută eroarea staționară se calculează cu relația:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= r(z) - y(z) = r(z) - H_d(z)\varepsilon(z) = \\ \frac{1}{1+H_d(z)} r(z) &= (1 - H_0(z))r(z), \end{aligned} \quad (4.65)$$

unde $H_d(z) = H_R(z)H_P(z)$ este f.d.t. a sistemului deschis.

Pentru diverse tipuri de semnale de referință se obțin erorile de regim staționar apelând la teorema valorii finale (4.64). Astfel, pe baza coeficienților erorilor definiți prin relațiile:

1) coeficientul erorii la poziție :

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} H_d(z), \quad (4.66)$$

2) coeficientul erorii la viteză :

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z - 1) H_d(z), \quad (4.67)$$

Se prezintă următoarele expresii pentru calculul erorilor la poziție $\varepsilon_p(z)$ și viteză $\varepsilon_v(z)$:

$$\varepsilon_p(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1}{1 + H_d(z)} = \frac{1}{1 + k_p}, \quad (4.68)$$

$$\varepsilon_v(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \frac{1}{1 + H_d(z)} = \frac{1}{k_v}. \quad (4.69)$$

Se pot stabili relații între coeficientul erorii de viteză și ploi-zero-uri ale sistemului automat în buclă închisă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(z) &= \frac{1}{k_v} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \frac{1}{1 + H_d(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{T}{z - 1} [1 - H_0(z)]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Dacă eroarea staționară pe poziție $\varepsilon_p(z) = 0$, atunci eroarea pe viteză va fi o valoare finită și se obține:

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_0(z) = 1, \quad (4.71)$$

cea ce conduce la o nedeterminare în relația (4.70).

În acest caz la relația (4.70) se aplică regula lui L'Hospital și utilizând (4.71) se obține:

$$\begin{aligned}\varepsilon_v(z) &= \frac{1}{k_v} = \lim_{z \rightarrow 1} (-T) \frac{\frac{d}{dz}(H_0(z))}{\frac{d}{dz}(z-1)} = -T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dz}(H_0(z))}{H_0(z)} = \\ &= -T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (\ln H_0(z)).\end{aligned}\quad (4.72)$$

Dacă se exprimă f.d.t. $H_0(z)$ ca o funcție de poli-zero-uri ale sistemului:

$$H_0(z) = \frac{k_0 \sum_{j=1}^m (z-z_j)}{\sum_{i=1}^n (z-p_i)}, \quad (4.73)$$

atunci eroarea de viteză (4.70) se calculează cu expresia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_v(z) &= \frac{1}{k_v} = -T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [\ln k_0 + \sum_{j=1}^m \ln(z-z_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \ln(z-p_i)] = T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (\ln H_0(z)) = T [\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-z_j}].\end{aligned}\quad (4.74)$$

4.7.2 Criterii globale de performanță

Pentru a caracteriza în mod general comportarea unui SNRA într-un regim de funcționare dat se utilizează eroarea $\varepsilon(k)$ dintre răspunsul ideal dorit - referința $r(k)$ și răspunsul real obținut $y(k)$ al sistemului.

Dacă eroarea staționară $\varepsilon(k) = 0$, atunci se pot utiliza pentru SNRA criterii globale derivate din criteriile integrale folosite în domeniul timpului continuu.

Pentru proiectarea unui SNRA descris printr-un model intrare-ieșire se pot utiliza următoarele tipuri de criterii:

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k) \rightarrow \min. \quad (4.75)$$

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^2(k) \rightarrow \min. \quad (4.76)$$

$$J_3 = \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon(k)| \rightarrow \min. \quad (4.77)$$

$$J_4 = \sum_{k=0}^{\infty} k |\varepsilon(k)| \rightarrow \min. \quad (4.78)$$

$$J_5 = \sum_{k=0}^{\infty} [\varepsilon^2(k) + \alpha u^2(k)] \rightarrow \min. \quad (4.79)$$

Cel mai larg utilizat pentru proiectare este criteriul pătratic J_2 , însă acesta poate conduce la un răspuns puternic oscilant. Folosind criteriile J_3 și J_4 procesul tranzitoriu este mai atenuat.

Dacă este necesar și controlul comenzii $u(k)$, atunci se recomandă aplicarea criteriului J_5 , unde $\alpha \geq 0$ este un coeficient de ponderare care se alege în funcție de aplicație.

În cazul descrierii SNRA prin formalismul intrare-stare-ieșire se pot utiliza criteriile globale.

Pentru sisteme monovariabile criteriul:

$$J_6 = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + \alpha u^2(k)] \rightarrow \min \quad (4.80)$$

și pentru sisteme multivariabile:

$$J_7 = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Pu(k)] \rightarrow \min, \quad (4.81)$$

unde $x(k)$ este starea sistemului, iar $u(k)$ mărimea de comandă.

Dacă pentru sistemul monovariabil se aleg corespunzător elementele matricei de ponderare Q (care va fi simetrică și semipozitiv definită) și a coeficientului de ponderare α , atunci se pot obține răspunsuri dorite și un nivel optim al secvenței de comandă $u(k)$.

Pentru sistemele multivariabile se aleg matricele de ponderare Q și P (simetrică și semipozitiv definită).

Criteriile J_6 și J_7 pot fi determinate și pentru un număr finit N perioade de eșantionare:

$$J_8 = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Pu(k)] \rightarrow \min. \quad (4.82)$$

Utilizarea criteriului J_8 cu matricea simetrică semipozitiv definită S evidențiază necesitatea atingerii unei stări finale $x(N)$ a sistemului optimizat pe un orizont finit.

Existența mai multor criterii impune alegerea lor în funcție de natura semnalelor exogene, de tipul procesului, de modul de descriere a modelului matematic și de metoda de proiectare. Această alegere reprezintă una dintre cele mai dificile sarcini ale proiectantului.

5 ALGORITMI DE REGLARE NUMERICĂ DERIVAȚI DIN LEGI DE REGLARE CONTINUE

5.1 Introducere

Se vor prezenta algoritmi de reglare numerici derivați din legi de reglare continue care stau la baza reglatoarelor clasice din sistemele unificate de automatizare pentru procese industriale. Pentru perioade de eșantionare mici, comportarea algoritmilor de reglare și în general a sistemelor de reglare este cvasicontinuă. În aceste condiții pentru acordarea reglatoarelor pot fi extinse metode de acordare din domeniul sistemelor continue.

Dintre legile neliniare se vor prezenta legea bipozițională și tripozițională datorită domeniilor extinse de utilizare.

Pentru a corecta anumii indici de performanță se utilizează des în sistemele continue elementul de avans-întârziere, care se va da varianta discretă.

Principala lege de reglare tipizată continuă este algoritmul proporțional-integrator-derivativ, care pentru anumite clase de procese

are un caracter de optimalitate. Din acest motiv obținerea unui algoritm PID numeric este o necesitate.

Dacă mărimea reglată este afectată de semnale zgomote cu un spectru în zona frecvențelor relative joase raportate la frecvența de eșantionare se recomandă filtrarea numerică a mărimii măsurate.

Semnalele zgomote de frecvență ridicată vor fi filtrate cu circuite pasive RC plasate pe interfața cu intrări analogice. În mod obișnuit filtrarea numerică se realizează cu varianta discretă a elementului de întârziere de ordinul întâi.

5.2 Filtrarea numerică de întârziere de ordinul întâi

În cazul continuu filtrele elemente de întârziere de ordinul unu au factorul de amplificare unitar și constanta de timp T_1 .

Având mărimea măsurată $y(s)$ ca mărime de intrare și ca mărime de ieșire cea de filtrate $y_f(s)$, modelul filtrului se descrie cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{y_f(s)}{y(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1}. \quad (5.1)$$

Forma discretă a filtrului (5.1) se obține folosind metoda dreptunghiului în întârziere:

$$\frac{T_1}{T} \Delta y_f(k) + y_f(k) = y(k). \quad (5.2)$$

Prin prelucrarea relației (5.2) se ajunge la forma:

$$y_f(k) = \frac{T_1}{T_1 + T} y_f(k - 1) + \frac{T}{T_1 + T} y(k). \quad (5.3)$$

Pentru reducerea timpului de calcul se preferă reducerea numărului de înmulțiri din (5.3) prin adunarea și scăderea în membrul drept al relației a termenului $\frac{T}{T_1 + T} y(k - 1)$ și se obține:

$$y_f(k) = y_f(k - 1) + \frac{T}{T_1 + T} (y(k) - y_f(k - 1)). \quad (5.4)$$

Evident sunt și alte posibilități de filtrare numerică a zgomotelor prin utilizarea filtrelor cu bandă constantă, cu bandă adaptivă sau a filtrului cu mediere.

5.3 Algoritm de avans-întârziere numeric

Elementul avans-întârziere continuu este modelat cu f.d.t. de forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}. \quad (5.5)$$

În funcție de constantele de timp T_1 , T_2 acțiunea elementului poate fi de tipul:

1. De avans dacă $T_1 > T_2$.
2. De proporționalitate pentru $T_1 = T_2$.
3. De întârziere dacă $T_1 < T_2$.

Modelul discret se obține din (5.5) folosind metoda dreptunghiului în întârziere și se obține ecuația cu diferențe finite:

$$\frac{T_2}{T} \Delta y(k) + y(k) = \frac{T_1}{T} \Delta u(k) + u(k) \quad (5.6)$$

sau

$$y(k) = \frac{T_2}{T_2 + T} y(k - 1) + \frac{T_1 + T}{T_2 + T} u(k) - \frac{T_1}{T_2 + T} u(k - 1). \quad (5.7)$$

Pentru reducerea timpului de calcul se preferă reducerea numărului de înmulțiri de la 3 la 2 și atunci se adună și se scade în membrul drept al relației a termenului $\frac{T}{T_2 + T} y(k - 1)$ și se obține expresia:

$$y(k) = y(k - 1) + \frac{T}{T_2 + T} (u(k) - y(k - 1)) +$$

$$+ \frac{T_1}{T_2+T} (u(k) - u(k-1)). \quad (5.8)$$

5.4 Algoritmii bipoziționali și tripoziționali

Algoritmii bipoziționali și tripoziționali se realizează cu regulatoare cu caracteristica neliniară de tipul bipozițională și tripozițională care sunt utilizate în aplicațiile industriale datorită simplității lor. Caracteristica de tip releu a acestor algoritmi permite aplicarea procesului a puterii totale într-un timp scurt și, în rezultat, se obține o comandă optimală după rapiditate în timp. Însă, în general, performanțele obținute pentru sistem sunt inferioare sistemelor cu regulatoare liniare.

5.4.1 Algoritmul bipozițional

Algoritmul bipozițional formează o comandă $u(k)$ binară, executabilă prin comutarea unui contact al interfeței de ieșiri numerice a regulatorului. Pe baza caracteristicii de reglare bipoziționale dată în fig. 5.1, a dependența funcțională a comenzii în raport cu eroarea de reglare $\varepsilon(k)$ se poate exprima sub forma:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \varepsilon(k) \leq -\Delta, \\ 1 & \text{pentru } \varepsilon(k) \geq \Delta, \\ u(k-1) & \text{pentru } |\varepsilon(k)| < \Delta, \end{cases} \quad (5.9)$$

unde Δ este semihisterezisul caracteristicii bipoziționale. Cele două comenzi ale regulatorului codificate cu 0 și 1 conduc la un singur parametru de acord Δ .

Algoritmul bipozițional presupune efectuarea la momentul curent de eșantionare kT a următorilor pași:

1. Achiziția mărimii măsurate prin interfața de intrări analogice.
2. Prelucrarea primară a datei citite (filtrare numerică).
3. Calculul erorii de reglare $\varepsilon(k) = r(k) - y(k)$.
4. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \geq \Delta$ se transmite interfeței de ieșiri numerice comanda de poziționare pe 1 a contactului releului și salt la pasul 7.

5. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \leq -\Delta$ se transmite interfeței de ieșiri numerice comanda de poziționare pe 0 a contactului releului și salt la pasul 7.

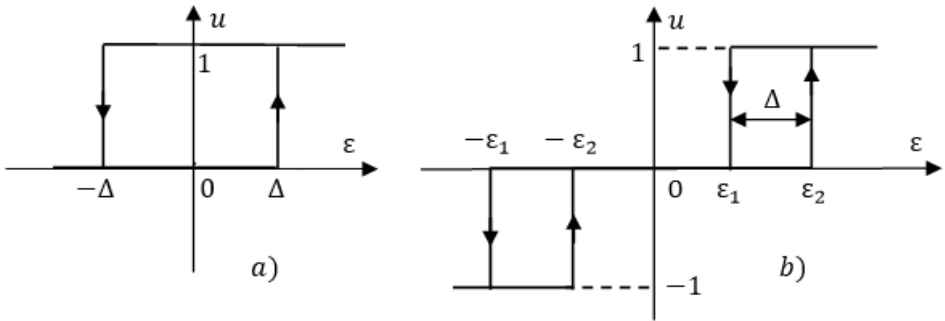


Fig. 2.1. Caracteristica statică bipozițională *a*) și tripozițională *b*)

6. Dacă eroarea $|\varepsilon(k)| < 0$, atunci se păstrează poziția contactului din momentul de eșantionare precedent.

7. Actualizarea comenzii precedente $u(k - 1) = u(k)$.

Pentru a se evita calculul efectiv al erorii de reglare $\varepsilon(k)$ se calculează o singură mărime, care exprimă suma sau diferența dintre semnalul referinței și histerezis notând-le:

$$r_1 = r + \Delta \text{ și } r_2 = r - \Delta, \quad (5.10)$$

care permit exprimarea dependenței (5.10) sub forma:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } y(k) \geq r_1, \\ 1 & \text{pentru } y(k) \leq r_2, \\ u(k - 1) & \text{pentru } r_2 < y(k) < r_1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Pentru acest caz valorile lui r_1 și r_2 se calculează de către operator la oricare modificare a referinței sau a histerezisului caracteristicii bipoziționale.

5.4.2 Algoritmul tripozițional

Algoritmul tripozițional se utilizează pentru comanda servomotoarelor electrice cu viteză constantă care se utilizează ca elemente de acționare a elementelor de execuție. Cele trei comenzi care le furnizează algoritmul tripozițional se codifică cu 1, 0 și -1, corespunzător celor trei stări ale servomotorului: acționarea într-un sens, repaus și acționare în sens opus a organului de reglare. Realizarea acestor comenzi se realizează cu două contacte de releu ale interfeței de ieșiri numerice care sunt acționate conform caracteristicii de reglare dată în fig. 5.1, *b*.

În acest caz dependența funcțională a comenzii în raport cu eroarea de reglare $\varepsilon(k)$ se poate exprima sub forma:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \varepsilon(k) \geq \varepsilon_2(k), \\ 0 & \text{pentru } |\varepsilon(k)| < \varepsilon_1(k), \\ -1 & \text{pentru } \varepsilon(k) \leq -\varepsilon_2(k), \\ u(k-1) & \text{pentru } \varepsilon_1 < |\varepsilon(k)| < \varepsilon_2(k). \end{cases} \quad (5.12)$$

Se constată că algoritmul are doi parametri de acord $\varepsilon_1(k)$ și $\varepsilon_2(k)$, care sunt funcții de forma zonei de insensibilitate:

$$z = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad (5.13)$$

sau a lățimii ciclului de histerezis:

$$\Delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \quad (5.14)$$

Astfel, utilizarea algoritmului tripozițional pentru comanda elementelor de acționare, asigură eficiența dacă perioada de eșantionare este mult mai mică decât timpul necesar parcurgerii întregii curse a organului de reglare.

Algoritmul tripozițional presupune efectuarea la momentul curent de eșantionare kT a următorilor pași:

1. Achiziția mărimii măsurate prin interfața de intrări analogice.
2. Prelucrarea primară a datei citite (filtrare numerică).
3. Calculul erorii de reglare $\varepsilon(k) = r(k) - y(k)$.

4. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \geq \Delta$ se transmite interfeței de ieșiri numerice comanda de poziționare pe 1 a contactului releului și salt la pasul 7.

5. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \leq -\Delta$ se transmite interfeței de ieșiri numerice comanda de poziționare pe 0 a contactului releului și salt la pasul 7.

6. Dacă eroarea $|\varepsilon(k)| \leq \Delta$ se păstrează poziția contactului din momentul de eșantionare precedent.

7. Actualizarea comenzii precedente $u(k-1) = u(k)$.

5.5 Algoritmi numerici de reglare

5.5.1 Algoritmul PID numeric de poziție și incremental

Pentru legile de reglare continue de tip PID f.d.t. se dă de relația:

$$\begin{aligned} H_R(s) &= \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = \\ &= k_p \left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

unde k_p este coeficientul de proporționalitate sau parametrul de acord, T_i – constanta de timp de integrare, T_d – constanta de timp de derivare, iar $k_i = \frac{1}{k_p T_i}$ – coeficientul integral, $k_d = \frac{T_d}{k_p}$ – coeficientul derivativ.

Algoritmul PID se poate prezenta și în forma:

$$H_{PID}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s + 1}{T_f s + 1} \right).$$

Din (5.15) se obține ecuația diferențială a algoritmului PID ideal:

$$u(t) = k_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right). \quad (5.16)$$

Pentru perioade mici de eșantionare T relația (5.16) poate fi transformată într-o ecuație cu diferențe, aplicând expresiei (5.16) metoda dreptunghiului în întârziere de discretizare aproximativă și se obține:

$$u(k) = k_p \left(\varepsilon(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=1}^k \varepsilon(j) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) \right). \quad (5.17)$$

Deoarece acest algoritm oferă valoarea totală a comenzii $u(k)$ care definește poziția elementului de execuție se numește *algoritm de poziție*. Acest algoritm de reglare nu este recursiv și este mai puțin adecvat pentru programe.

Pentru a calcula comanda la pasul curent al algoritmului de poziție este necesară cunoașterea valorii integralei până la momentul $k-1$, deci algoritmul trebuie inițializat.

Dacă elementul de execuție este de tip proporțional, atunci utilizarea algoritmilor de poziție asigură controlul ieșirii sau poziției elementului de execuție.

Pentru a obține un algoritm recursiv se calculează mărimea $u(k-1)$ cu un pas înapoi:

$$u(k-1) = k_p \left(\varepsilon(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon(j) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2)) \right) \quad (5.18)$$

și scăzând expresia (5.18) din (5.17) se obține relația:

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = u(k) - u(k-1) &= k_p [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) + \\ &+ \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - 2\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2))]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

După unele transformări expresia (5.19) se prezintă ca o ecuație recursivă a mărimii de comandă $u(k)$ prin $u(k-1)$ și parametrii regulatorului PID numeric de forma:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 \varepsilon(k) + q_1 \varepsilon(k-1) + q_2 \varepsilon(k-2) \quad (5.20)$$

sau în forma:

$$u(k) = u(k - 1) + \sum_{i=0}^2 q_i \varepsilon(k - i), \quad (5.21)$$

unde parametrii de acord numerici q_0, q_1, q_2 sunt descriși prin parametrii algoritmului PID continuu k_p, T_i, T_d și a perioadei T de eșantionare în forma:

$$\begin{aligned} q_0 &= k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right), \\ q_1 &= -k_p \left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right), \\ q_2 &= k_p \frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pentru forma discretă a algoritmului PID (5.20) funcția de transfer discretă este:

$$H_R(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z - 1} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P_1(z^{-1})}. \quad (5.23)$$

În acest algoritm se determină incrementul comenzii $\Delta u(k)$ în momentul de eșantionare kT și algoritmul este numit *algoritm incremental sau algoritm de viteză*.

Din analiza relației (5.20) se constată că algoritmul este de tip PDD2 incremental deoarece incrementul $\Delta u(k)$ are componente proporționale cu eroarea $\varepsilon(k)$, cu diferența finită $\Delta \varepsilon(k)$ – care este echivalentă unei derivări discrete și cu diferența de ordinul doi $\Delta^2 \varepsilon(k)$ – echivalentă cu derivata a doua.

Pentru a obține un algoritm PID elementul de execuție trebuie să fie de tip integrator, ce asigură controlul vitezei medii sau momentane a comenzii elementului de execuție, care prin integrare devine increment de poziție.

În acest caz algoritmul nu mai trebuie inițializat fiindcă comanda se generează sub forma unui increment $\Delta u(k)$, iar amplitudinea

incrementului poate fi controlată prin valorile parametrilor q_0, q_1, q_2 și k_p, T_i, T_d și perioada de eșantionare T .

O altă posibilitate o constituie determinarea domeniilor de variație ale parametrilor q_0, q_1, q_2 , astfel încât răspunsul indicial să fie apropiat de al unui algoritm PID continuu.

Pentru aceasta se consideră treapta unitară aplicată la intrare:

$$\varepsilon(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k \geq 0, \\ 0 & \text{pentru } k < 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

și pe baza relației de recurență (5.20) se obține răspunsul indicial:

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0, \\ u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = q_0 + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\ u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 2q_0 + q_1 + q_0 + q_1 + q_2 = \\ &= 3q_0 + 2q_1 + q_2, \\ &\dots\dots\dots \\ u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pentru a obține un răspuns indicial apropiat de al unui regulator PID continuu se impun următoarele condiții:

$$\begin{aligned} u(1) &< u(0), \\ u(k) &> u(k-1) \text{ pentru } k \geq 2, \end{aligned} \quad (5.26)$$

care se transformă pentru parametrii regulatorului cu $q_0 > 0$ în relațiile:

$$\begin{aligned} 2q_0 + q_1 &< q_0 \text{ sau } q_1 < -q_0, \\ q_0 + q_1 + q_2 &> 0 \text{ sau } q_2 > -(q_0 + q_1). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Din (5.27) va rezulta un coeficient de proporționalitate pozitiv dacă este satisfăcută relația coeficienților $q_0 > q_2$.

Astfel, între parametrii de acord ai algoritmului PID discret se stabilesc relațiile de inegalități:

$$q_0 > 0, q_1 < -q_0, -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0. \quad (5.28)$$

Răspunsul indicial al algoritmului PID numeric este dat în fig. 5.2, a.

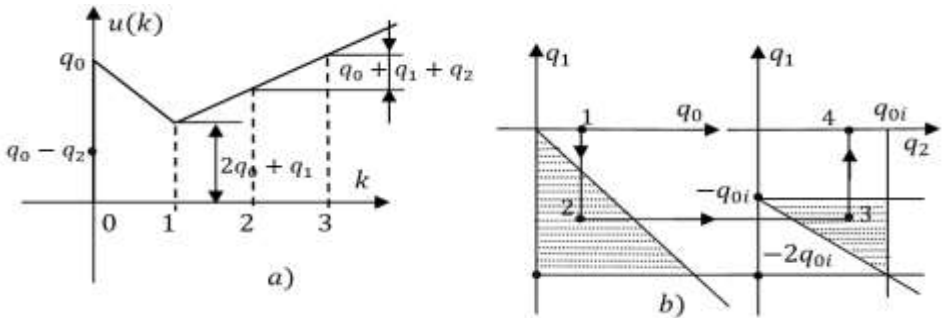


Fig. 5.2. Răspunsul indicial a) și domeniile de variație ale parametrilor algoritmului PID numeric b)

Din relațiile (5.28) rezultă domeniile de variație ale parametrilor de acord care sunt reprezentate în fig. 5.2, b). Pentru o valoare fixată q_{0i} , parametrii q_0, q_1, q_2 trebuie plasați în zonele punctate pe traseul 1-2-3-4.

Prin anularea componentei cu ajutorul parametrilor k_p, T_i, T_d din (5.22) se pot obține variantele discrete ale algoritmilor P, I, PI, PD.

Algoritmul incremental, datorită formei recursive, prezintă avantajul trecerii de la regimul manual la cel automat fără șocuri deoarece se transmit elementului de execuție incremente $\Delta u(k)$ care determină deplasări mici succesive.

Alt avantaj constă în lipsa sumei din (5.18) care conduce la eliminarea pericolului atingerii rapide a valorii de saturație a comenzii $u(k)$.

Algoritmii PID numerici pot fi obținuți aplicând metoda trapezului de discretizare la expresia (5.16) și obținem f.d.t. discretă în forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 + p_1 z + p_2} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P_1(z^{-1})}, \quad (5.29)$$

unde parametrii q_i și p_j se dau cu relațiile:

$$\begin{aligned} q_0 &= k_p \left(1 + \frac{T}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T}\right), \\ q_1 &= k_p \left(\frac{T}{T_i} - 4\frac{T_d}{T}\right), \\ q_2 &= k_p \left(-1 + \frac{T}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T}\right), \\ p_1 &= -2, \quad p_2 = 1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Algoritmul obținut este un algoritm recurent de ordinul doi a cărei ecuație cu diferențe finite are forma (prin operatorul de deplasare q^{-1}):

$$u(k) = \frac{q_0 + q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}}{1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}} \varepsilon(k),$$

$$u(k)(1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}) = \varepsilon(k)(q_0 + q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}),$$

$$u(k) + p_1 q^{-1} u(k) + p_2 q^{-2} u(k) = \varepsilon(k) q_0 + q_1 q^{-1} \varepsilon(k) + q_2 q^{-2} \varepsilon(k) \quad (5.31)$$

sau în forma:

$$\begin{aligned} u(k) + p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) &= \\ &= q_0 \varepsilon(k) + q_1 \varepsilon(k-1) + q_2 \varepsilon(k-2), \end{aligned}$$

$$u(k) = -p_1 u(k-1) - p_2 u(k-2) +$$

$$+q_0\varepsilon(k) + q_1\varepsilon(k-1) + q_2\varepsilon(k-2). \quad (5.32)$$

Ecuțiile cu diferențe finite pentru algoritmi PID pot fi obținute direct din ecuațiile diferențiale sau din funcțiile de transfer, aplicând metodele respective de discretizare.

Pentru alegerea metodei de discretizare se iau în considerație următorii factori:

1. Precizia de aproximare a algoritmului continuu.
2. Complexitatea relațiilor de calcul ale parametrilor algoritmului obținut.
3. Posibilitățile de structurare (optimizare) a algoritmului pentru implementarea lui cu flexibilitate ridicată.

Exemplul 5.1. Pentru a obține f.d.t. a algoritmului PID numeric se utilizează f.d.t. a algoritmului PID continuu, în care se utilizează substituția lui s cu z cu metoda aleasă conform variantei (de *exemplu* metoda trapezului) și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned} H_{PID}(z) &= \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = k_P + \frac{1}{T_I \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} + T_D \frac{2(z-1)}{T(z+1)} = \\ &= \frac{2k_P T_I T (z^2-1) + T^2 (z+1)^2 + 4T_I T_D (z-1)^2}{2T_I T (z^2-1)} = \\ &= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{p_1 z^2 - p_2} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_1 - p_2 z^{-2}} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \end{aligned}$$

unde coeficienții q_0, q_1, q_2, p_1, p_2 sunt parametrii regulatorului PID numeric, care se calculează prin parametrii regulatorului PID continuu k_P, T_I, T_D și perioada de eșantionare T .

Expresia de mai sus se aduce la forma standard împărțind toți termenii de la numărător și numitor la p_1 și z^2 obținându-se f.d.t. a regulatorului:

$$H_{PID}(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{\frac{q_0}{p_1} z^2 + \frac{q_1}{p_1} z + \frac{q_2}{p_1}}{z^2 - \frac{p_2}{p_1}} = \frac{\frac{q_0}{p_1} + \frac{q_1}{p_1} z^{-1} + \frac{q_2}{p_1} z^{-2}}{1 - \frac{p_2}{p_1} z^{-2}} = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

5.5.2 Algoritmul PID cu filtrare

În scopul evitării șocurilor în multe aplicații componenta derivativă D nu se introduce în canalul erorii $\varepsilon(k)$, dar se introduce în canalul măsurii $y(k)$.

$$u(s) = k_p(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i} \frac{\varepsilon(s)}{s} - T_d s y(s)). \quad (5.33)$$

Pentru a fi satisfăcută condiția de realizabilitate fizică a regulatorului și evitării șocurilor în multe aplicații componenta derivativă D se filtrează cu un element de ordinul unu având constanta de timp $T_f = \alpha T_d = (0,1 \dots 0,125)T_d$ și nu se introduce în canalul erorii $\varepsilon(k)$, dar se introduce în canalul măsurii $y(k)$. Astfel, pentru algoritmul PID continuu se obține expresia în forma f.d.t.:

$$\begin{aligned} u(s) &= k_p \left(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i} \frac{\varepsilon(s)}{s} - \frac{T_d s y(s)}{\alpha T_d s + 1} \right) = \\ &= k_p \left(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i} \frac{\varepsilon(s)}{s} - T_d s \frac{1}{\alpha T_d s + 1} y(s) \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Această filtrare elimină componentele tip zgomot din măsura lui $y(k)$ care ar fi amplificate prin derivare.

Mărimea măsurată filtrată este:

$$y_f(s) = \frac{1}{\alpha T_d s + 1} y(s). \quad (5.35)$$

Varianta incrementală a algoritmului PID obținută prin aplicarea metodei dreptunghiului în întârziere de discretizare are forma:

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) = k_p [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) - \\ &- \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{T} ((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2))]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dacă se presupune că și componenta proporțională P prelucrează măsura filtrată $y_f(k)$ se obține algoritmul PID modificat de forma:

$$u(k) = u(k-1) + k_p[-(y_f(k) - y_f(k-1)) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{T} ((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2)))] \quad (5.37)$$

Astfel, pot fi obținute forme discrete și pentru alți algoritmi PID, cum ar fi cei cu interinfluență.

Algoritmii PID numerici pot fi obținuți aplicând metoda trapezului de discretizare la forma serie continuă:

$$H_R(s) = k_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \left(\frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1}\right) \quad (5.38)$$

sau în formă operațională:

$$u(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \left(\frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1}\right) \varepsilon(s). \quad (5.39)$$

Efectuând discretizarea (5.39) prin metoda dreptunghiului în întârziere se obține un algoritm recursiv de ordinul doi de forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}, \quad (5.40)$$

unde parametrii q_i și p_j se determină cu relațiile:

$$q_0 = \frac{k_p(T-T_i)(T-T_d)}{T_i(\alpha T_d - T)}, \quad q_1 = \frac{k_p T(T_i + T_d) - 2k_p T_i T_d}{T_i(\alpha T_d - T)}, \quad q_2 = \frac{k_p T_d}{\alpha T_d - T},$$

$$p_1 = \frac{T - 2\alpha T_d}{\alpha T_d - T}, \quad p_2 = \frac{2\alpha T_d}{\alpha T_d - T}. \quad (5.41)$$

O formă generală a algoritmului recurent de ordinul n are forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_{n-1} z + q_n}{z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n-1} z^{n-1} + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + p_n z^{-n}} \quad (5.42)$$

sau în forma:

$$u(k) = \sum_{i=0}^n q_i \varepsilon(k - i) - \sum_{j=1}^n p_j u(k - j). \quad (5.43)$$

Pentru simplificarea procedurilor de implementare a algoritmilor PID cu filtrare acestea se structurează sub forma unor module standard P, I și PD cu filtrare (fig. 5.3).

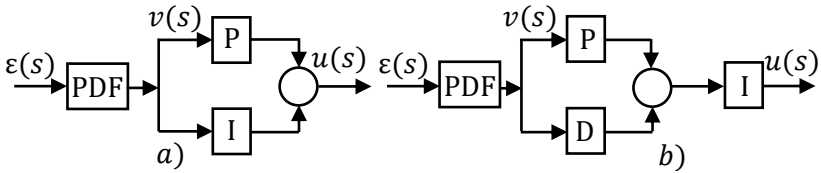


Fig. 5.3. Algoritmul PID modular cu filtrare

Utilizarea structurilor modulare permite obținerea unui algoritm numeric ușor de implementat pe cale numerică cu fiabilitate ridicată și posibilități de realizare a diferitor regimuri de funcționare. În aceste cazuri se obține comanda discretă pentru fiecare modul și se configurează structura necesară a algoritmului.

Se prezintă algoritmi discreți pentru fiecare modul P, I (fig. 5.3, a) și PD (fig. 5.3, b).

Componenta proporțională-derivativă cu filtrare PDF (fig. 5.3) se descrie cu ecuația diferențială:

$$\alpha T_d \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t), \quad (5.44)$$

iar echivalentul discret (5.44) ca element cu anticipație-întârziere prin utilizarea metodei dreptunghiului în întârziere are forma:

$$\alpha T_d \frac{v(k) - v(k-1)}{T} + v(k) = T_d \frac{\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)}{T} + \varepsilon(k). \quad (5.45)$$

După unele transformări în (5.45) se obține mărimea de ieșire a modulului PFD:

$$v(k) = \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d + T} v(k-1) + \frac{T_d + T}{\alpha T_d + T} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{\alpha T_d + T} \varepsilon(k-1). \quad (5.46)$$

Pentru componenta proporțională se obține:

$$u_p(k) = k_p v(k), \quad (5.47)$$

iar pentru integrală prin aplicarea metodei dreptunghiului de discretizare se obține expresia:

$$u_i(k) = u_i(k-1) + k_p \frac{T}{T_i} v(k). \quad (5.48)$$

Astfel, la ieșirea sumatorului se obține semnalul:

$$u(k) = u_p(k) + u_i(k). \quad (5.49)$$

5.5.3 Algoritmul PID modificat

Se utilizează câteva variante de structuri de algoritmi de tipul PID modificate: PI-D, I-PD și PID cu două grade de libertate, care prelucrează diferit variabilele de intrare în regulator: referința, eroarea și mărimea măsurată a procesului.

Se analizează algoritmul modificat PI-D. Structura sistemului cu algoritmul modificat se prezintă în fig. 5.4. În acest caz algoritmul PI se plasează pe canalul direct, iar componenta derivativă D se plasează pe calea de reacție și va prelucra semnalul măsurii eliminând semnalele zgomot și mărimea de comandă se obține în forma operațională în s :

$$\begin{aligned} u(s) &= k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) r(s) - k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right) y(s) = \\ &= H_{PI}(s)r(s) - H_D(s)y(s). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Pentru algoritmi PI și D se pot obține formele numerice aplicând metoda dreptunghiului în întârziere sau metoda trapezului.

Pentru componenta PI se obține:

$$H_{PI}(z^{-1}) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \frac{q_0 - q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.51)$$

iar pentru componenta derivativă:

$$\begin{aligned} H_{PID}(z^{-1}) &= k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{\alpha T_d + \frac{T}{1-z^{-1}}} \right) = \\ &= k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d(1-z^{-1})}{\alpha T_d(1-z^{-1}) + T} \right) = \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_0 - p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

După efectuarea unor calcule expresia (5.50) cu (5.51) – (5.55) mărimea de comandă se exprimă în forma de structură de regulator RST:

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k) \quad (5.53)$$

sau în forma:

$$u(k) = \sum_{i=0}^2 t_i r(k-i) - \sum_{i=0}^2 s_n y(k-n) - \sum_{i=1}^2 r_j u(k-j)$$

unde polinoamele $T(q^{-1})$, $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ se obțin din expresiile (5.51) și (5.52) și în domeniul timpului discret sunt:

$$\begin{aligned} T(q^{-1}) &= t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2}, \\ R(q^{-1}) &= r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2}, \\ S(q^{-1}) &= s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

unde coeficienții ca parametrii regulatorului se calculează în funcție de parametrii k_p , T_i , T_d și perioada de eșantionare T .

Structura comenzii din (5.50) prezintă în algoritm cu două grade de libertate sau forma canonică de regulator RST.

Utilizarea diverselor variante de algoritmi PID modificate pentru care se obțin forme echivalente discrete, în toate cazurile conduc la o structură standard de regulator (5.53) cu două grade de libertate cu diferite polinoame $T(q^{-1})$, $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$.

5.6 Optimizarea parametrilor de acord ai regulatorului

Parametrii de acord ai unui algoritm PID numeric pot fi optimizați folosind una din următoarele metode:

1. Pe baza unui model al procesului se pot obține parametrii optimi minimizând un criteriu de performanță al sistemului.

1. Dacă se cunoaște modelul procesului se determină parametrii de acord ai regulatorului printr-o metodă de alocare poli-zero-uri.

2. Se folosesc reguli de acordare a regulatorului pe baza unor caracteristici obținute din răspunsul indicial sau din oscilațiile rezultate la limită de stabilitate al sistemului închis, de unde se pot calcula parametrii de acord.

5.6.1 Optimizarea parametrilor regulatorului utilizând un model al procesului

Această metodă utilizează un criteriu de performanță pătratică de forma:

$$J = \sum_{k=0}^M (\varepsilon^2(k) + \gamma k_p^2 \Delta u^2(k)), \quad (5.55)$$

unde incrementul se determină:

$$\Delta u(k) = u(k) - \bar{u} \quad (5.56)$$

este deviația comenzii de la:

- valoarea de regim staționar a comenzii $\bar{u} = u(\infty)$ pentru perturbații de tip treaptă,

- dispersia $\bar{u} = D\{u(k)\}$ pentru perturbații stocastice,
- γ este un factor de ponderare, iar k_p este coeficientul de transfer de regim staționar al procesului:

$$k_p = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}. \quad (5.57)$$

Minimizarea criteriului (5.55) se poate realiza prin metode numerice de optimizare.

5.6.2 Optimizarea pe baza ecuației caracteristice a sistemului închis

Metodele din această categorie pornesc de la ecuația caracteristică a sistemului numeric închis:

$$A(z) = 1 + H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}) = 0, \quad (5.58)$$

pentru care pe baza performanțelor se impun rădăcinile ecuației caracteristice.

Astfel, dacă se consideră cunoscută partea fixată:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + q_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}, \quad m < n \quad (5.59)$$

și algoritmul incremental:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 - q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.60)$$

atunci ecuația caracteristică a sistemului este:

$$A(z) = 1 + H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}) + a_nz^{-n} + (q_0 - q_1z^{-1} + q_2z^{-2})(b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + q_mz^{-m}) = 0. \quad (5.61)$$

Deoarece raportul dintre gradele polinoamelor părții fixate din (5.59) este $n \leq m$, atunci rezultă pentru polinomul caracteristic gradul $m + 2$.

Se consideră polinomul caracteristic dorit de forma:

$$P_d(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m+2} z^{-(m+2)}, \quad (5.62)$$

coeficienții căruia pot fi determinați prin alocare de poli pe baza performanțelor impuse sistemului.

Fiindcă regulatorul PID are numai 3 parametri de acord va exista o soluție unică numai dacă $m + 2 = 3$. Dacă această condiție nu este satisfăcută, atunci se alege pentru algoritmul PID următoarea formă:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1}) \prod_{i=1}^p (1 + \gamma_i z^{-1})}, \quad (5.63)$$

astfel ca să se respecte egalitatea:

$$m + 2 = 3 + p. \quad (5.64)$$

Exemplul 5.1 [AA]. Se consideră partea fixată descrisă cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k_p(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{(1 - 4s)}{(1 + 4s)(1 + 10s)}$$

cu parametrii $k_p = 1$, $T_1 = 4$ s, $T_2 = 10$ s.

Se cere de calculat:

1. Să se determine modelele discrete ale părții fixate pentru perioada de eșantionare $T = 1$ și 5 s folosind pentru discretizare metoda dreptunghiului în avans.

2. Să se calculeze parametrii de acord ai unui regulator PID pentru cele două perioade de eșantionare astfel încât sistemul numeric închis să aibă polii $z_1 = 0,125$, $z_2 = 0,375$, $z_{3,4} = 0,25 \pm j0,375$.

Rezolvare. 1. Se determină ecuația diferențială a părții fixate pentru f.d.t. cunoscută:

$$H_P(s) = \frac{k_p(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

sau în forma operațională și forma ecuației diferențiale:

$$y(s)(1 + T_1s)(1 + T_2s) = u(s)k_p(1 - T_1s),$$

$$T_1T_2s^2y(s) + (T_1+T_2)sy(s) + y(s) = -k_pT_1su(s) + u(s)k_p,$$

$$T_1T_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (T_1+T_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -k_pT_1 \frac{du(t)}{dt} + k_pu(t).$$

La ecuația diferențială se aplică metoda de discretizare a dreptunghiului în avans și se obține forma discretă:

$$\frac{T_1T_2}{T^2} \Delta^2 y(k) + \frac{T_1+T_2}{T} \Delta y(k) + y(k) = k_pu(k) - k_pT_1 \Delta u(k),$$

unde $\Delta^2 y(k) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)$, $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$, $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$.

Efectuând calculele asupra ecuației cu diferențe se obține ecuația recurentă de forma:

$$\begin{aligned} \frac{T_1T_2}{T^2} y(k+2) + \left(\frac{T_1+T_2}{T} - 2 \frac{T_1T_2}{T^2} \right) y(k+1) + \left(\frac{T_1T_2}{T^2} - \frac{T_1+T_2}{T} + 1 \right) y(k) = \\ = - \frac{k_pT_1}{T} u(k+1) + \left(k_p + \frac{k_pT_1}{T} \right) u(k). \end{aligned}$$

Ultima relație se împarte la termenul $\frac{T_1T_2}{T^2}$ și introducând datele numerice ale parametrilor modelului părții fixate k_p, T_1, T_2 se obține ecuația recursivă:

$$\begin{aligned} y(k+2) + (0,35T - 2)y(k+1) + (1 - 0,35T + 0,025T^2)y(k) = \\ = -0,1Tu(k+1) + (0,025T^2 + 0,1T)u(k). \end{aligned}$$

Din ecuația recursivă se obține f.d.t. discretă de ordinul $m = 2$ cu coeficienții necunoscuți:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}.$$

Coefficienții f.d.t. se calculează în funcție de perioada de eșantionare și se dau în tabelul 5.1:

Tabelul 5.1. Coeficienții f.d.t. a modelului procesului

Coeficienții f.d.t.	Perioada de eșantionare T	
	$T = 1 \text{ s}$	$T = 5 \text{ s}$

b_1	-0,1	-0,5
b_2	0,125	1,125
a_1	-1,65	-0,25
a_2	0,675	-0,125

2. Pe baza polilor impuși modelului sistemului se construiește ecuația caracteristică dorită:

$$\begin{aligned}
 A(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = \\
 &= z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_3z_4 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4))z^2 - \\
 &\quad - (z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4(z_1 + z_2))z + z_1z_2z_3z_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Se calculează polinomul caracteristic cu datele numerice ale polilor și se obține:

$$P_d(z^{-1}) = 1 - z^{-1} + 0,5z^{-2} - 0,125z^{-3} + 0,0095z^{-4}.$$

Deoarece ordinul sistemului proiectat este egal cu 4, iar a modelului procesului este egal cu 2, atunci este necesar ca să fie îndeplinită condiția (5.64) $m + 2 = 3 + p$, care implică adăugarea unui pol suplimentar în f.d.t. discretă a regulatorului, și aceasta va avea forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

Pe baza modelelor discrete ale regulatorului și părții fixate se construiește polinomul caracteristic al sistemului închis de forma:

$$\begin{aligned}
 P_{d0}(z^{-1}) &= (1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) + \\
 &\quad + (q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2})(b_1z^{-1} + b_2z^{-2}).
 \end{aligned}$$

Pentru determinarea valorilor numerice ale parametrilor regulatorului numeric se identifică coeficienții polinomului P_d și polinomului P_{d0} și se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned}
 \gamma + q_0b_1 &= -1 - a_1 + 1, \\
 \gamma(a_1 - 1) + q_0b_2 + q_1b_1 &= 0,5 - a_2 + a_1, \\
 \gamma(a_2 - a_1) + q_1b_2 + q_2b_1 &= -0,125 + a_2, \\
 -\gamma a_2 + q_2b_2 &= 0,0095,
 \end{aligned}$$

care se rezolvă utilizând forma matriceală:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & b_2 & b_1 & 0 \\ a_2 - a_1 & 0 & b_2 & b_1 \\ -a_2 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}}_q = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 \\ 0,5 - a_2 + a_1 \\ -0,125 + a_2 \\ 0,0095 \end{bmatrix}}_A$$

sau în forma:

$$q = B^{-1}A.$$

Se calculează parametrii regulatorului pentru cele două perioade de eşantionare, care sunt prezentate în tabelul 5.2:

Tabelul 5.2. Parametrii regulatorului

Parametrii regulatorului	Perioada de eşantionare T	
	$T = 1$ s	$T = 5$ s
γ	131,9093	0,7667
q_0	277,6357	1,0335
q_1	-344,165	-0,341525
q_2	131,9093	-0,0767

Astfel, funcția de transfer discretă a regulatorului cu parametrii de acord calculați pentru perioada de eşantionare $T = 1$ s este:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{277,6357 - 344,165z^{-1} + 131,9093z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 131,9093z^{-1})}. \blacksquare$$

5.6.3 Pe baza unor reguli de acordare

Aceste reguli permit determinarea cu aproximație pe cale experimentală a valorilor optime ale parametrilor de acord ai algoritmului selectat de tipul PID. Dacă perioada de eşantionare este suficient de mică, atunci comportarea regulatorului de tipul PID discret este cuasicontinuu și, deci, este apropiată de răspunsul regulatorului continuu.

Pentru aceste cazuri se aplică regulile clasice de acordare a reguletoarelor aplicând metoda Ziegler-Nichols etc., care permit de a

determina parametrii regulatorului pentru procese lente cu răspunsul indicial aproximat cu modele cu inerție de ordinul unu cu timp mort cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_0s+1}. \quad (5.65)$$

Deoarece în sistemul numeric există elementul de reținere de ordinul zero, timpul mort echivalent al părții fixate se modifică. Pornind de la f.d.t. a elementul de reținere de ordinul zero:

$$H_{ER}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}, \quad (5.66)$$

care în domeniul frecvențelor se prezintă:

$$\begin{aligned} H_{ER}(j\omega) &= \frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} = \frac{1-\cos\omega T+j\sin\omega T}{j\omega} = \\ &= T \frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} = T \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} e^{-j\omega T/2}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

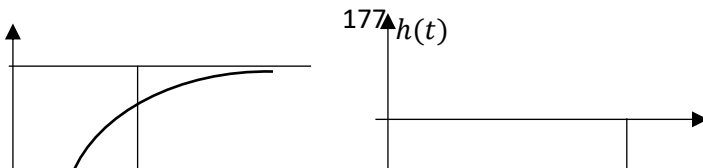
care se caracterizează printr-un element de atenuare $T \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} e^{-j\omega T/2}$ și un timp mort egal cu $T/2$.

Prezența elementului de reținere de ordin zero în structura părții fixate conduce la modificarea timpului mort echivalent:

$$\tau_e = \tau + \frac{T}{2}. \quad (5.68)$$

Pentru aceste cazuri se aplică regulile clasice de acordare a reguletoarelor aplicând metoda Ziegler-Nichols etc. Timpul mort τ_e echivalent din (5.68) se utilizează pentru acordarea regulatorului în funcție de rezultatele identificării experimentale.

Există metode elaborate special pentru acordarea reguletoarelor numerice bazate pe răspunsul indicial al sistemului în circuit închis (fig. 5.4, *a*) sau pe caracteristicile oscilațiilor întreținute la limita de stabilitate (fig. 5.4, *b*), pentru care s-au obținut expresii empirice pentru algoritmi P, PI, PID (PID modificat) care sunt date în tabelele 5.3 și 5.4.



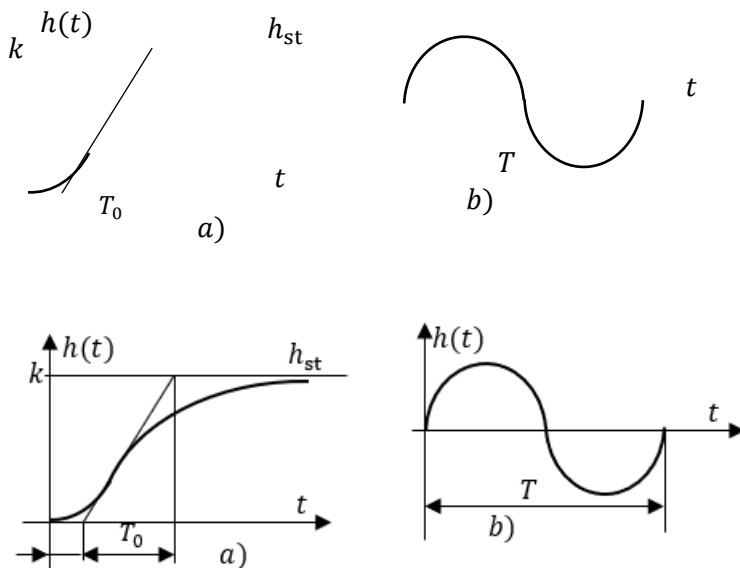


Fig. 5.4. Răspunsul indicial al procesului (a) și oscilații întreținute în sistem (b)

Tabelul 5.3. Acordarea pe baza răspunsului indicial

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T/T_i	T_d/T
P	$\frac{T_0}{\tau_e + T}$	—	—
PI	$\frac{0,9T_0}{\tau_e} - \frac{0,135T_0T}{\tau_e^2}$	$\frac{0,27T_0T}{k_p\tau_e^2}$	—
PID	$\frac{1,2T_0}{\tau + T} - \frac{0,3T_0T}{\tau_e^2}$	$\frac{0,6T_0T}{k_p\tau_e^2}$	$\frac{0,5T_0}{k_pT}$

Notă: Expresiile se aplică pentru $\tau/T \rightarrow 0$.

Tabelul 5.4. Acordarea pe baza regimului critic al sistemului (k_{cr}, T_p)

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T/T_i	T_d/T
P	$0,5k_{cr}$	–	–
PI	$0,45k_{cr} - 0,27k_{cr} \frac{T}{T_0}$	$0,54 \frac{k_{cr} T}{k_p T_0}$	–
PID	$0,6k_{cr} - 0,6k_{cr} \frac{T}{T_0}$	$1,2 \frac{k_{cr} T}{k_p T_0}$	$\frac{3}{40} \frac{k_{cr} T}{k_p T_0}$

Notă: Expresiile se aplică pentru $T \leq 2T_0$.

Relațiile din tabelele 5.3 și 5.4 sunt valabile pentru condițiile când $T \leq 2\tau$ și nu sunt recomandate pentru condiția când $T \approx 4\tau$.

5.7 Alegerea optimă a perioadei de eșantionare

Pentru regulatoarele numerice perioada de eșantionare T este însă un parametru de acord.

Algoritmii numerici de reglare obținuți prin discretizarea algoritmilor continui au performanțe mai reduse datorită aproximării componentelor integrală I și derivativă D, ca rezultat a pierderii de informație la etapele de cuantizare și eșantionare. Pentru alegerea perioadei de eșantionare sunt recomandate relații experimentale care determină raportul între perioada de eșantionare T și constanta de timp derivare T_d [AAA].

La valori foarte mici ale perioadei de eșantionare T (deci frecvențe mari de eșantionate) ca avantaj se obține o bună aproximare a algoritmului de conducere, dar dezavantajul acestui algoritm este volumul mare de calcule, ceea ce conduce la costuri ridicate ale interfeței de proces și numărul buclelor de reglare realizate cu un singur regulator este redus etc.

Dacă perioada de eșantionare T este mare, atunci pierderea de informație în procesul de eșantionare conduce la o precizie redusă în evoluția sistemului și la acțiunea perturbațiilor starea sistemului ne este controlabilă între momentele de eșantionare.

Cerințele de performanță impuse sistemului la urmărirea referinței și rejectia perturbațiilor sunt factorii principali la alegerea perioadei de eșantionare. Cunoașterea performanțelor elementelor de execuție și a traductoarelor, cât și clasa de perturbații care acționează asupra sistemului impun cerințele de bază la alegerea perioadei de eșantionare.

Alegerea și optimizarea perioadei de eșantionare poate fi realizată utilizând diferite criterii cum ar fi [AAA].

1. Performanțele impuse sistemului numeric de reglare.
2. Dinamica procesului.
3. Spectrul de frecvență al perturbațiilor.
4. Tipul elementului de execuție.
5. Echipamentul de măsură.
6. Modelul procesului identificat.
7. Eficiența economică a SNRA.

Pornind de la performanțele impuse sistemului, pe baza lărgimii de bandă $\omega_B = 2\pi f_B$ a sistemului în buclă închisă perioada de eșantionare se alege din condiția:

$$T \approx \left(\frac{1}{8} \cdots \frac{1}{16}\right) \frac{1}{f_B}. \quad (5.69)$$

În funcție de dinamica procesului există posibilități de alegere a perioadei de eșantionare. Astfel, dacă timpul mort τ al procesului este dominant, atunci se recomandă relația:

$$T \approx \left(\frac{1}{4} \cdots \frac{1}{8}\right) \tau. \quad (5.70)$$

Pentru cazurile când constanta de timp determinată după tangenta punctului de inflexiune cu model de ordinul unu cu timp mort perioada de eșantionare este funcție de raportul τ/T_0 și se alege în forma:

$$T \approx (1,2 \dots 0,35)\tau \text{ dacă raportul } 0,1 \leq \tau/T_0 \leq 1, \quad (5.71)$$

$$T \approx (0,35 \dots 0,22)\tau \text{ dacă raportul } 1 \leq \tau/T_0 \leq 10. \quad (5.72)$$

Dacă spectrul perturbațiilor este limitat la ω_{\max} , atunci pe baza teoremei lui Shannon se alege perioada de eșantionare în forma:

$$T \approx \frac{\pi}{\omega_{\max}}. \quad (5.73)$$

Se identifică modelul procesului pe baza răspunsului indicial și perioada de eșantionare se alege după timpul de creștere t_c în forma:

$$T \approx \left(\frac{1}{6} \dots \frac{1}{12}\right)t_c. \quad (5.74)$$

Pentru a conduce mai multe bucle de reglare se folosesc perioade de eșantionare mai mici. Se recomandă în acest caz perioade de eșantionare în funcție de variabila de reglare. În tabelul 5.5 sunt prezentate recomandările de alegere a perioadei de eșantionare pentru variabile care caracterizează câteva din cele mai larg utilizate procese.

Tabelul 5.5. Parametrii regulatorului

Variabila reglată	Perioada de eșantionare T, s
Debit	1... 3
Nivel	5... 10
Presiune	1... 5
Temperatura	10... 20

Reglatoarele numerice comerciale care deserveșc mai multe bucle de reglare folosesc o perioadă de eșantionare fixă de ordinul a 200 ms. Aceasta implică funcționarea cuazicontunuă a regulatorului și, deci, posibilitatea de a aplica legile de acordare specifice sistemelor continue.

De remarcat faptul că alegerea perioadei de eșantionare T presupune o analiză atentă a mai multor factori pentru care efectul lor este contradictoriu.

5.8 Funcții suplimentare ale regulatorului PID numeric

5.8.1 Metode antisaturație

Un regulator cu componenta integrală I care comandă un element de execuție poate intra în saturație și produce deteriorarea performanțelor SRA. Astfel, dacă eroarea sistemului $\varepsilon(t)$ are valori mari, integratorul I determină intrarea în saturație a elementului de execuție și SRA rămâne deschis chiar dacă mărimea de ieșire $y(t)$ se va modifica. În acest timp componenta I va crește la valori mari. Când valoarea erorii $\varepsilon(t)$ se va reduce, micșorarea componentei I la valori normale se va produce într-un interval de timp mare.

Acest efect se numește *antisaturație*, iar metodele pentru evitarea lui metode antisaturație.

1. Una din metode antisaturație este oprirea acțiunii componentei integrale la intrarea în saturație a elementului de execuție.

Dacă algoritmul de reglare este programat pe baza relației (5.20):

$$u(k) = u(k - 1) + q_0\varepsilon(k) - q_1\varepsilon(k - 1) + q_2\varepsilon(k - 2), \quad (5.75)$$

atunci termenul integral se poate anula prin:

$$\varepsilon(k - 1) = 0, \text{ dacă } u_{\min} \geq u(k) \geq u_{\max} \quad (5.76)$$

sau dacă $|\varepsilon(k)| < \varepsilon_{\max}(k)$.

2. A doua metodă antisaturație este prezentată în fig. 5.6. în acest caz se folosește o reacție suplimentară care prelucrează eroarea cu relația:

$$\varepsilon_s(k) = m(k) - u(k) \quad (5.77)$$

dintre ieșirea $m(k)$ a elementului de execuție și comanda $u(k)$ regulatorului. Această eroare este ponderată cu coeficientul $1/T_u$, unde

T_u este constanta de timp de urmărire și aplicată componentei I. Eroarea $\varepsilon_s(k)$ este zero, dacă elementul de execuție nu este saturat. La intrarea în saturație eroarea $\varepsilon_s(k)$ devine diferit de zero, dar reacția suplimentară va tinde să anuleze eroarea suplimentară. Astfel, integratorul I este resetat în așa mod încât ieșirea regulatorului se menține la limita de saturație.

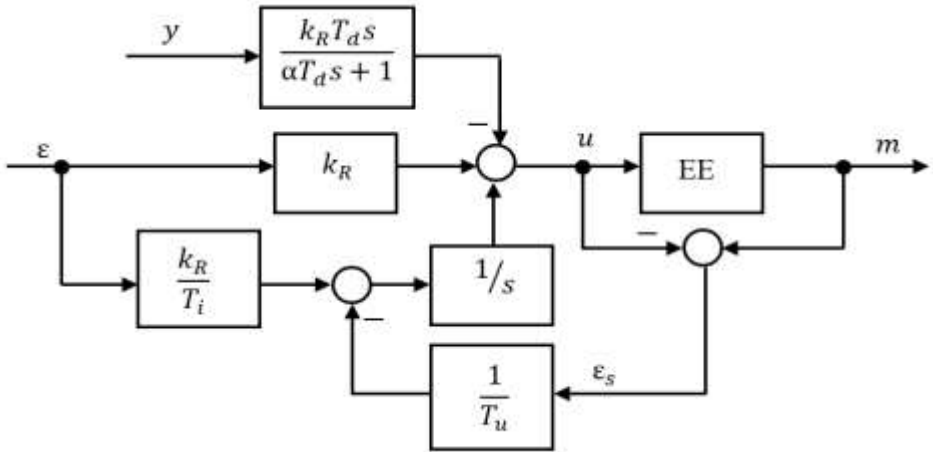


Fig. 5.6. Structura unui regulatorul PID cu desaturare

5.8.2 Comutarea manual – automat

Regulatele PID pot funcționa în mod MANUAL (M) și AUTOMAT (A). În modul MANUAL, ieșirea regulatorului $u(t)$ se generează de un operator prin acțiuni de creștere sau scădere. Regulatele pot funcționa în cascadă (CASC) cu alte regulate sau cu alte elemente neliniare multiplicatoare sau selectoare, care pot funcționa în regim CALCULATOR cu fixarea referinței de la nivelul ierarhic superior sau comanda este calculată la nivelul superior și este transmisă elementului de execuție. În modul de funcționare MANUAL regulatorul PID este în regim de rezervă sau este defect.

În timpul funcționării regulatorului PID se pot acorda parametrii de acord.

Pentru evitarea șocurilor de trecere de pe MANUAL pe AUTOMAT și invers care pot afecta funcționarea procesului se includ

funcții de echilibrare a comenzii. În cazurile de comutare se verifică valoarea mărimii de ieșire a integratorului care trebuie să fie corectă.

Deoarece regulatorul este un sistem dinamic sunt necesare măsuri de echivalare a comenzii pentru a nu provoca șocuri atunci când se schimbă modul de operare de pe *manual* (M) pe *automat* (A). La trecerea de pe manual M la automat A se verifică dacă valoarea de ieșire a integratorului este corectă în momentul comutării, care prezintă transfer fără șocuri (fig. 5.7, a-c). Transferul fără șocuri este ușor de obținut pentru regulatorul PID incremental. Integratorul este prevăzut cu un comutator C (fig. 7, a), care permite alegerea incrementului comenzii $\Delta u(k)$ fie de la blocul manual de elaborare a comenzii BMC, fie de la regulatorul PID incremental. Deoarece comutatorul C manipulează numai incremente nu vor exista variații mari la schimbarea regimului de funcționare. Funcționarea integratorului se aproximează cu relația:

$$u(k) = \frac{T}{1-z^{-1}} \varepsilon(k) = \frac{T}{1-q^{-1}} \varepsilon(k).$$

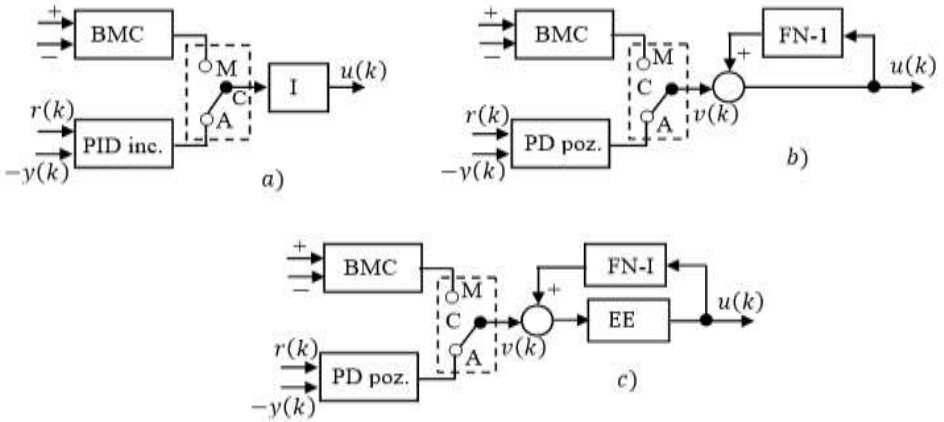


Fig. 5.7. Scheme de comutare manual (M) – automat (A)

Pentru algoritmul PID de poziție comutarea se va face după schema din fig. 5.7, b). Componenta integrală se implementează cu ajutorul unui filtru numeric FN-I de tip întârziere de ordinul unu care

este plasat într-o buclă cu reacție pozitivă și funcția de transfer a canalului intrarea $v(k)$ – ieșirea $u(k)$ se prezintă:

$$H_I(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+T_i s}} = \frac{1+T_i s}{T_i s}, \quad (5.78)$$

ceea ce evidențiază că ieșirea pe manual este incrementată. Constanta de timp T_i este constanta de timp a filtrului.

Pentru a realiza protecția antisaturație se recomandă schema din fig. 5.7, c în care pe cale directă s-a inclus o caracteristică statică de tip saturație a elementului de execuție EE.

Dacă se consideră algoritmul PID modificat:

$$u(k) = u(k-1) + k_p [-(y_f(k) - y_f(k-1)) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{T} ((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2)))] \quad (5.79)$$

În acest caz structura care asigură transferul fără șocuri de pe manual M pe automat A, cât și proprietatea antisaturație este prezentată în fig. 5.8.

Constanta de timp T_m fixează viteza de variație a comenzii în regim manual și se alege în funcție de tipul elementului de execuție. Pentru constanta de timp T_u se recomandă două variante de alegere:

$$T_u = T_i \quad (5.80)$$

sau în forma:

$$T_u = (0,1 \dots 0,5) T_i \quad (5.81)$$

în funcție de tipul procesului.

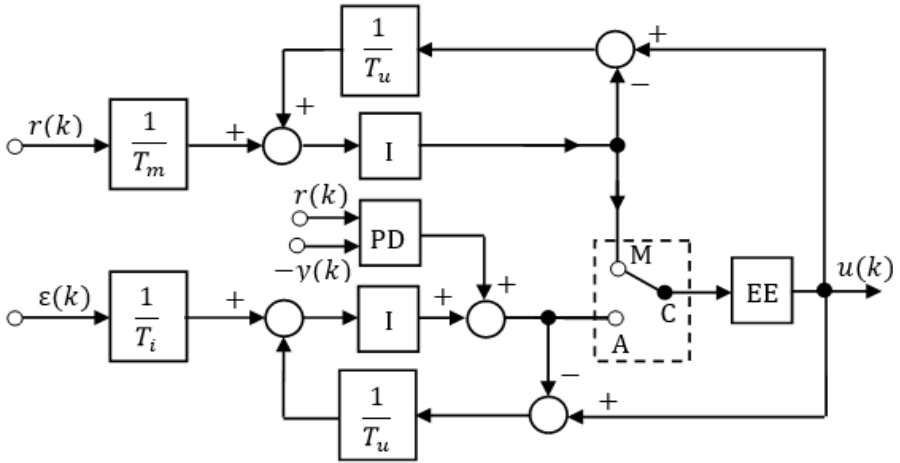


Fig. 5.8. Regulator PID cu comutare M–A și dispozitiv antisaturație

Când mărimea de ieșire $v(t)$ a elementului de execuție nu este posibil de măsurat, atunci acesta poate fi modelată și care generează un semnal echivalent utilizat pentru calculul erorii ε_s .

Efectul saturației integrale poate fi redus, urmărind starea elementului de acționare, care intră în saturație și compensând semnalul aplicat la intrarea integratorului (fig. 5.9).

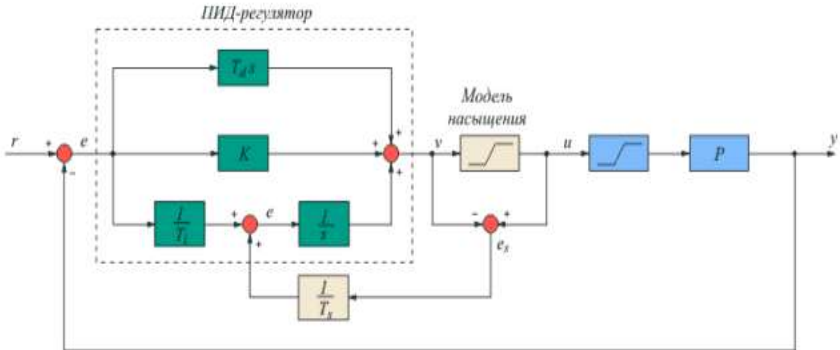


Fig. 5.9. Compensarea saturației componentei integrale (P – procesul)

5.9 Autoacordarea reguletoarelor PID

5.9.1 Preliminarii

În reglarea numerică a proceselor se păstrează utilizarea algoritmului PID datorită bunei cunoașteri a acestora atât de către proiectanți cât și de cei din exploatare.

Obținerea unor performanțe satisfăcătoare necesită însă o reabordare în timp real a regulatorului PID. Printre cele mai larg utilizate procedee de acordare se numără și cele bazate pe caracteristicile oscilațiilor ce se instalează la limita de stabilitate. Efectuarea experimentelor presupune însă atingerea limitei de stabilitate, proces care poate dura uneori nepermis de mult, sau poate însemna funcționarea instalației într-un regim nefavorabil.

Din aceste motive s-au dezvoltat metode specifice, cele mai răspândite procedee de autoacordare se bazează pe răspunsul indicial și pe caracteristicile oscilațiilor obținute într-o buclă de reglare cu rețeu.

5.9.2 Metode bazate pe răspunsul indicial

Pentru clasa de procese lente și foarte lente cu timp mort, determinarea răspunsului indicial la semnal treaptă unitară și caracterizarea acestuia prin parametrii coeficientul de transfer k , constanta de timp T_0 și timpul mort τ (fig. 5.10, a), iar f.d.t. se prezintă:

$$H_p(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_0s+1} \quad (5.81)$$

permit calculul parametrilor regulatorului conform datelor din tabelul 5.6, unde coeficientul $a = k\tau/T_0$.

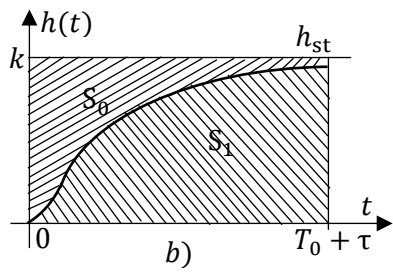
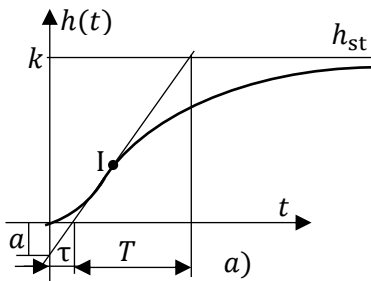
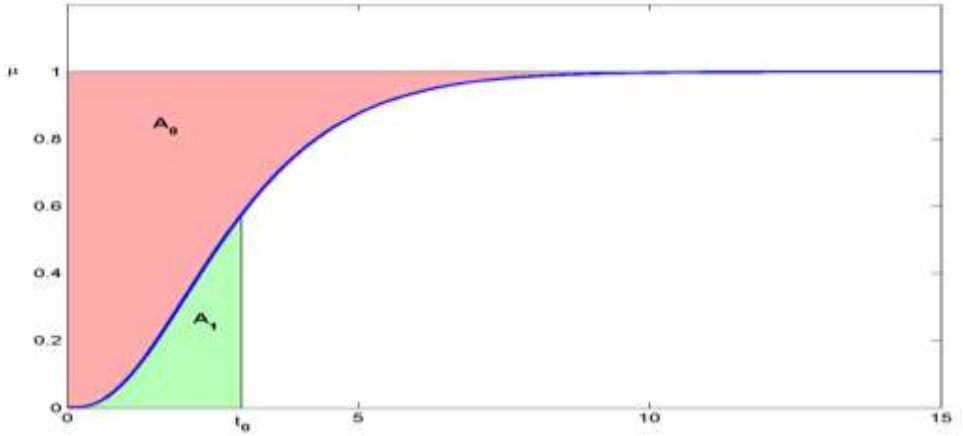
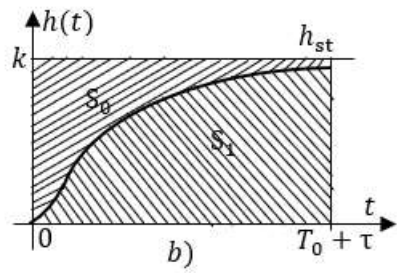
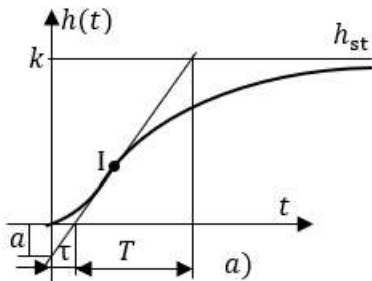


Fig. 5.10. Răspunsul experimental al procesului industrial *a)* și ariile procesului *b)*



Tabelul 5.6. Acordarea pe baza regimului critic al sistemului (k_{cr}, T_p)

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T_i	T_d
P	$1/a$	—	—
PI	$0,9/a$	3τ	—
PID	$1,2/a$	2τ	$0,5\tau$

Această procedură este dificilă de automatizat pentru a obține punctul de inflexiune I pe panta maximă a răspunsului sistemului și deci determinarea parametrilor a , τ și k .

Altă metodă de determinare a parametrilor procesului k , T_0 și τ se bazează pe calculul unor arii S_0 , S_1 (fig. 5.10, *b*). Procedura constă în ridicarea răspunsului procesului și determinarea coeficientului de transfer lui k se calculează aria S_0 deasupra curbei și cu ajutorul ariei S_0 ce găsește suma $T_0 + \tau$ cu relația:

$$T_0 + \tau = \frac{S_0}{k}. \quad (5.82)$$

Se determină aria S_1 sub răspunsul procesului până la momentul de timp $T_0 + \tau$ și se calculează valoarea constantei de timp după relația:

$$T_0 = \frac{eS_1}{k}, \quad (5.83)$$

unde e este baza logaritmului natural.

5.9.3 Metode bazate pe caracteristicile oscilațiilor la limita de stabilitate

Procedeul de autoacordare bazat pe răspunsul la semnal treaptă este sensibil la perturbații fiindcă necesită experimente în sistemul deschis. Depășirea acestui impediment se realizează prin utilizarea metodei cu releu, bazată pe caracteristicile oscilațiilor la limita de stabilitate ale sistemului închis.

În sistemul închis cu procesul studiat și cu un releu pot să se instaleze oscilații întreținute, care prezintă un sistem neliniar cu ciclu-limită (fig. 5.11). Parametrii ciclului-limită oferă informații despre dinamica procesului și acestea pot fi utilizate pentru acordarea parametrilor reguletoarelor de tipul PID.

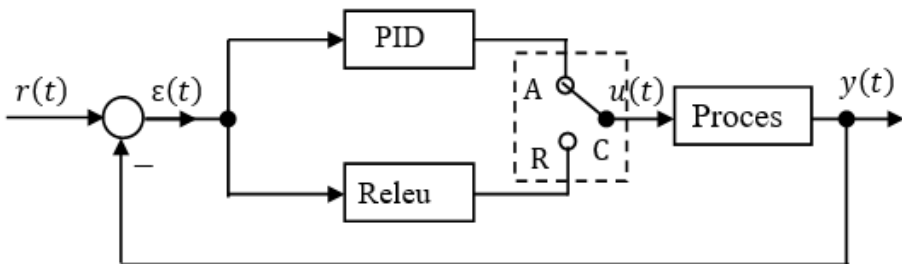


Fig. 5.11. Structura sistemului de autoacordare cu releu

Pentru acordarea regulatorului PID comutatorul C se trece pe poziția R – acordare și astfel se introduce în bucla de reglare un releu bipozițional care înlocuiește regulatorul PID și în sistem se instalează oscilații stabile, iar pe baza parametrilor oscilațiilor se acordează parametrii regulatorului PID și se introduce în bucle de reglare.

Pentru determinarea parametrilor oscilațiilor sistemul neliniar format din partea liniară – modelul procesului cu f.d.t. $H_p(s)$ și neliniaritatea este releul bipozițional se aplică metoda funcției de descriere.

Se presupune că există un ciclu cu perioada T_p și pulsația $\omega_0 = 2\pi/T_p$ astfel încât ieșirea $u(t)$ a releului este o formă de undă dreptunghiulară simetrică și periodică, descrisă de relația:

$$u(t) = \begin{cases} b & \text{pentru } \varepsilon > 0, \\ -b & \text{pentru } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (5.84)$$

Funcția $u(t)$ este o funcție periodică și poate fi descompusă în serie Fourier de forma:

$$u(t) = \frac{4b}{\pi} (\cos\omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots), \quad (5.85)$$

care pune în evidență amplitudinea fundamentală egală cu $4b/\pi$. Partea liniară se consideră ca un filtru trece-jos și la ieșirea acesteia va fi numai prima armonică. Astfel, amplitudinea erorii a_ε poate fi exprimată prin relația:

$$a_\varepsilon = \frac{4b}{\pi} |H_p(j\omega_0)|. \quad (5.86)$$

Pentru ca să existe oscilațiile de pulsație ω_0 este necesar ca locul de transfer al părții liniare $H_p(j\omega_0)$ să intersecteze semiaxa reală negativă ce reprezintă locul de transfer al releului ideal (fig. 5.8). Condiția de intersecție a celor două locuri de transfer se exprimă prin relațiile:

$$\arg H_p(j\omega_0) = -\pi, \quad (5.87)$$

$$k_{cr} = \frac{1}{|H_p(j\omega_0)|} = \frac{4b}{\pi a_\varepsilon}, \quad (5.88)$$

unde k_{cr} este factorul de amplificare echivalent al releului pentru transmisia semnalului sinusoidal cu amplitudinea a_ε .

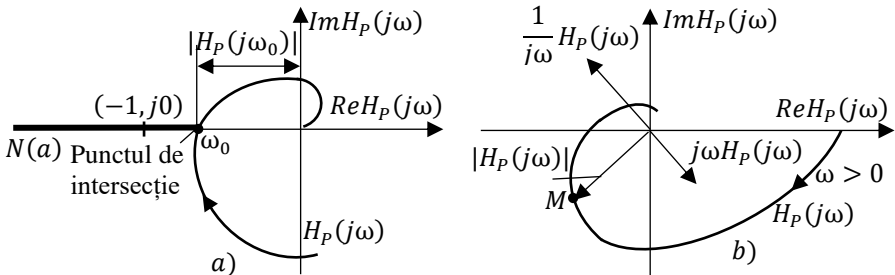
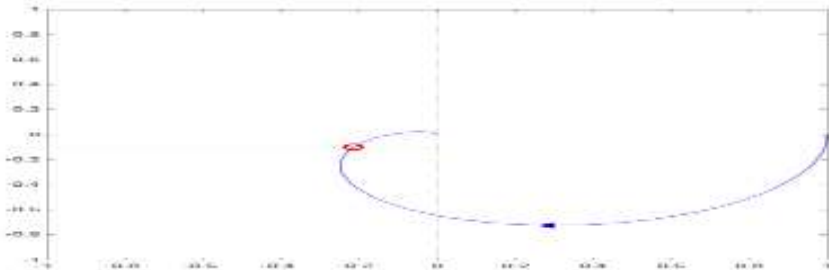
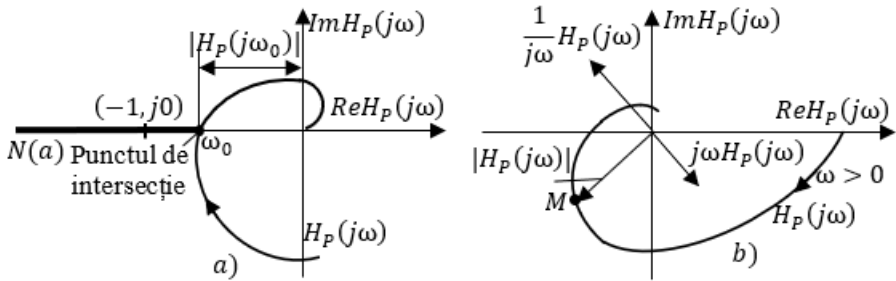


Fig. 5.12. Locurile de transfer ale părții fixate $H_p(j\omega)$ și a releului $N(a)$ a) și modificarea lui $|H_p(j\omega)|$ cu componentele I și D ale regulatorului PID b)



Astfel, un experiment cu releu în sistemul închis permite măsurarea amplitudinii oscilațiilor a_ε , a perioadei acestora T_p și utilizând expresia (5.88) se calculează valoarea lui k_{cr} la amplitudinea b cunoscută a releului. Mărimea k_{cr} este coeficientul critic al sistemului la limita de stabilitate cu reglare proporțională.

În metoda Ziegler-Nichols regimul critic se instalează aplicând regulatorul proporțional, iar în metoda utilizării releului modelul părții liniare trebuie să posede un defazaj în modul cel puțin π în zona frecvențelor înalte.

Dacă mărimile k_{cr} și T_p ai fost determinate, atunci pot fi folosite diferite metode de acordare a parametrilor regloatoarelor.

5.9.4 Acordarea cu metoda Ziegler-Nichols

Acordarea regulatorului de tipul PID pe baza parametrilor k_{cr} și T_p prin metoda Ziegler-Nichols se obțin relațiile prezentate în tabelul 5.6.

Tabelul 5.6. Acordarea pe baza regimului

critic al sistemului (k_{cr}, T_p)

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T_i	T_d
P	$0,5k_{cr}$	–	–
PI	$0,45k_{cr}$	$0,8T_p$	–
PID	$0,6k_{cr}$	$0,5T_p$	$0,125T_p$

În urma acordării regulatorului în sistemul automat rezultă amortizări slabe, iar pentru îmbunătățirea performanțelor se recomandă modificarea euristică a parametrilor k_p , T_i și T_d ai regulatorului PID.

5.9.5 Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate

Metoda rezervei de stabilitate, pe lângă parametrii critici k_{cr} și T_p , utilizează și performanțele corelate cu rezerva de stabilitate în amplitudine A_m și fază φ_m .

1. Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate în amplitudine A_m . Această metodă poate fi realizată cu un regulator proporțional cu parametrul de acord calculat cu relația:

$$k_p = \frac{k_{cr}}{A_m}. \quad (5.89)$$

Pentru a rezolva problema reglării se utilizează regulatorul PI sau PID. Parametrii de acord ai algoritmului PID pot fi acordați utilizând expresia locului de transfer:

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d \right) = \\ &= k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} (1 - \omega^2 T_i T_d) \right). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Rezerva de stabilitate în amplitudine se va obține, dacă parametrul de acord va avea valoarea din (5.89) și impunând condiția în (5.90):

$$1 - \omega^2 T_i T_d = 0, \quad (5.91)$$

de unde calculând parametrul de acord al componentei integrale:

$$T_i = \frac{1}{\omega^2 T_d}. \quad (5.92)$$

Timpul de derivare se alege euristic sau se impune un raport a parametrilor $T_d = \alpha T_i$ care din practică automatizărilor se recomandă $\alpha \leq 0,25$ (la acordarea optimă a parametrilor regulatorului PID valoarea optimă a lui $\alpha > 0,25$, dar care se limitează la valoarea $\alpha = 0,25$):

$$T_d = \alpha T_i = \frac{1}{4} T_i = 0,25 T_i, \quad (5.93)$$

iar timpul de integrare din (5.90) cu (5.92) se calculează cu relația:

$$T_i^2 = \frac{1}{\alpha \omega^2} = \frac{4}{\omega^2} \text{ sau } T_i = \frac{2}{\omega}. \quad (5.94)$$

2. Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate în fază φ_m . Se construiește locul de transfer $H_p(j\omega)$ al părții fixate care se dă în fig. 5.12, *b*. Se consideră punctul A pe curbă, care poate fi deplasat în planul complex prin intermediul unor algoritmi de reglare PI, PD și PID prin modificarea parametrilor de acord. Punctul M poate fi mișcat în direcția lui $H_p(j\omega)$ prin modificarea parametrului k_p al algoritmului P și pe direcții ortogonale prin modificarea componentelor I și D. Procedura de acordare constă în modificarea locului de transfer $H_p(j\omega)$ cu modificarea componentelor P, I și D până se obține rezerva de stabilitate în fază.

Se construiește locul de transfer al sistemului deschis $H_d(j\omega)$ (fig. 5.12, *b*) modificând frecvența $\omega = 0 \cdots \infty$ după expresia:

$$\begin{aligned}
 H_d(j\omega) &= H_R(j\omega)H_p(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d\right) H_p(j\omega) = \\
 &= k_p \left(1 + j\left(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i}\right)\right) H_p(j\omega). \tag{5.95}
 \end{aligned}$$

Se determină intersecția lui $H_d(j\omega)$ cu semiaxa reală negativă pentru pulsația $\omega = \omega_0$ și impunând o rezervă de stabilitate în fază, atunci argumentul lui $H_d(j\omega_0)$ va fi:

$$\arg H_d(j\omega_0) = -\pi + \varphi_m. \tag{5.96}$$

În aceste condiții rezultă că rezerva de stabilitate se determină din (5.95) cu relația din paranteza din interior:

$$\omega_0 T_d - \frac{1}{\omega_0 T_i} = \operatorname{tg}\varphi_m. \tag{5.97}$$

Cunoscând rezerva de fază φ_m , relația (5.97) cu (5.76) se transformă în ecuație algebrică de ordinul doi cu necunoscuta parametrului T_i și valoarea acesteia se exprimă:

$$\begin{aligned}
 \omega_0 \alpha T_i - \frac{1}{\omega_0 T_i} &= \operatorname{tg}\varphi_m, \\
 \omega_0^2 \alpha T_i^2 - \operatorname{tg}\varphi_m \omega_0 T_i - 1 &= 0, \\
 T_i &= \frac{\operatorname{tg}\varphi_m \omega_0 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_m \omega_0^2 + 4\omega_0^2 \alpha}}{2\omega_0^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_m + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_m + 4\alpha}}{2\omega_0 \alpha}. \tag{5.98}
 \end{aligned}$$

În continuare, se determină valoarea parametrului $T_d = \alpha T_i$. Parametrul se determină din condiția:

$$\begin{aligned}
 |H_d(j\omega_0)| &= \left| k_p \left(1 + j\left(\omega_0 T_d - \frac{1}{\omega_0 T_i}\right)\right) H_p(j\omega_0) \right| = \\
 &= |k_p (1 + j\operatorname{tg}\varphi_m) H_p(j\omega_0)| = 1, \tag{5.99}
 \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$k_p = \frac{\cos\varphi_m}{|H_p(j\omega_0)|} = k_{cr}\cos\varphi_m. \quad (5.100)$$

Cunoscând parametrii regimului critic k_{cr} , ω_0 și impunând valoarea rezervei de stabilitate în fază φ_m și alegând valoarea lui α se calculează parametrii de acord ai algoritmului PID k_p, T_i, T_d .

6 PROIECTAREA SISTEMULUI NUMERIC DUPĂ METODA INTRARE-IEȘIRE

6.1 Preliminarii

Algoritmii derivați din legile de reglare continuă se obțin prin discretizarea algoritmilor continui. În cazul algoritmilor netipizați proiectarea pe baza modelelor intrare – ieșire pornește de la performanțele impuse sistemului numeric și de la modelul procesului cu extrapolatorul și are ca obiectiv obținerea unui regulator numeric și a ecuației recursive pentru mărimea de conducere $u(k)$.

Există metodologii de proiectare corelate cu cazul continuu și tehnici fără corelare cu cazul continuu. În prima categorie intră metodele de proiectare prin metode de alocare a polilor și zerourilor în planul complex z . În a doua categorie metodele de proiectare directă în

domeniul timp, bazate pe impunerea unui răspuns dorit, care conduce la un model al SNRA închis.

6.2 Proiectarea sistemelor numerice monovariabile prin metoda alocării poli-zerouri

Se admite structura sistemului automat alcătuită din regulator cu f.d.t. discretă $H_R(z)$ și partea fixată cu elementul de reținere de ordin zero cu f.d.t. discretă $H_P(z)$ dată în fig. 6.1.

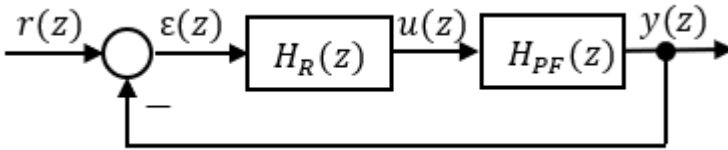


Fig. 6.1. Structura SNRA

Modelul matematic a părții fixate se prezintă cu f.d.t. discretă de forma:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}}. \quad (6.1)$$

Modelul matematic al algoritmului netipizat se descrie cu f.d.t. discretă:

$$H_R(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n_Q} z^{-n_Q}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_P} z^{-n_P}}. \quad (6.2)$$

Pornind de la modelul părții fixate (6.1) și performanțele impuse sistemului metoda de alocare permite construirea f.d.t. discretă a regulatorului $H_R(z)$. Pe baza performanțelor impuse se determină polii f.d.t. discretă a sistemului automat închis și se calculează polinomul caracteristic dorit. Proprietățile sistemului închis se specifică în mod direct prin impunerea unui răspuns dorit la semnal de referință treaptă unitară discretă:

$$r(t) = 1(t) = 1(kT) = 1(k) \quad (6.3)$$

dat de polinomul caracteristic în variabila s de forma:

$$P_{d2}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (6.4)$$

sau în formă discretă:

$$P_{d2}(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \quad (6.5)$$

cu coeficienții:

$$\alpha_1 = -2e^{-\xi\omega_n T} \cos(\omega_n T \sqrt{1 - \xi^2}), \quad \alpha_2 = e^{-2\xi\omega_n T}. \quad (6.6)$$

Pentru sistemul numeric fără suprareglare, dinamica dominantă poate fi determinată de un element de ordinul unu cu f.d.t. discretă de forma:

$$P_{d1}(z) = z - \alpha$$

cu $\alpha = e^{-T/T_0}$, (6.7)

unde T_0 este constanta de timp dorită a sistemului proiectat. De asemenea elementul de ordinul unu se poate utiliza împreună cu cel de ordinul doi, atunci când nu este îndeplinită condiția de realizabilitate fizică. Deci, în cazul cel mai general, polinomul caracteristic va avea forma:

$$P_c(z) = P_{d2}(z) \prod_{i=3}^m P_{di}(z) = (z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2) \prod_{i=3}^m (z - \alpha_i) =$$

$$= 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_r z^{-r}. \quad (6.8)$$

Pentru a determina parametrii regulatorului $H_R(z)$ (6.2) se calculează polinomul caracteristic al sistemului numeric cu structura din fig. 6.1 și se identifică coeficienții cu cei ai polinomului (6.8).

Astfel, se calculează f.d.t. discretă a sistemului automat închis care va fi:

$$H_0(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{H_R(z)H_P(z)}{1 + H_R(z)H_P(z)} =$$

$$= \frac{Q(z^{-1})B(z^{-1})}{P(z^{-1})A(z^{-1})+Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}} z^{-d} = \frac{Q(z^{-1})}{P_{c0}(z^{-1})}, \quad (6.9)$$

unde componenta z^{-d} prezintă timpul mort din proces.

Polinomul caracteristic din (6.9) are forma:

$$\begin{aligned} P_{c0}(z^{-1}) &= P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} = \\ &= (1 + p_1z^{-1} + \dots + p_{n_P}z^{-n_P})(1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_A}z^{-n_A}) + \\ &+ (q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_{n_Q}z^{-n_Q})(b_1z^{-1} + \dots + b_{n_B}z^{-n_B})z^{-d}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

care are gradul:

$$n_c = n_Q = \max(n_P + n, n_Q + n + d). \quad (6.11)$$

Pentru eliminarea erorii de poziție $\varepsilon = 0$ se impune condiția ca f.d.t. $H_0(z) = 1$ și din (6.9) rezultă condiția $P(1)A(1) = 0$, care este, în general, satisfăcută pentru suma coeficienților din (6.2):

$$\sum_{i=1}^{n_P} p_i = -1. \quad (6.12)$$

Deoarece sunt $n_c + 1$ ecuații, atunci pentru obținerea unei soluții unice pentru cei $n_P + n_Q + 1$ parametri ai regulatorului se impune egalitatea:

$$n_c + 1 = n_P + n_Q + 1. \quad (6.13)$$

Din condiția (6.11) rezultă următoarele două cazuri de determinare a gradelor polinomului caracteristic:

$$\begin{aligned} 1) \quad n_P &\geq n_Q + d, \Rightarrow n_c = n_P + n, \\ n_Q &= n, \Rightarrow n_P \geq n + d, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$2) \quad n_P \leq n_Q + d, \Rightarrow n_c = n_Q + n + d,$$

$$n_p = n + d, \Rightarrow n_Q > d. \quad (6.15)$$

Alegând cele mai mici grade pentru polinoamele regulatorului se obține:

$$n_Q = n \text{ și } n_p = n + d. \quad (6.16)$$

Pornind de la condiția îndeplinită în relația (6.16), rezultă că determinarea parametrilor de acord implică rezolvarea ecuației diofantice (6.10) de gradul $2n + d$:

$$P_{c0}(z^{-1}) = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}. \quad (6.17)$$

Polinomul (6.17) împreună cu condiția (6.12), poate fi pusă sub forma matricială:

$$Q_R = R^{-1}\beta. \quad (6.18)$$

Datorită condiției (6.16) zerourile procesului vor apare în f.d.t. a sistemului $H_0(z)$ influențând performanțele impuse prin alocare. Pentru a elimina acest dezavantaj atunci când procesul are zerouri se recomandă o metodă de alocare a polilor și zerourilor f.d.t. $H_0(z)$, care pornește de la alocarea poli – zerouri pentru in sistem de ordinul doi de forma:

$$H_0(z) = \frac{k_0(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}. \quad (6.19)$$

Impunând condiția de anulare a erorii de poziție $\varepsilon = 0$, se impune condiția ca f.d.t. $H_0(z) = 1$ și din (6.19) rezultă:

$$k_0 = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-z_1}, \quad (6.20)$$

iar pe baza unor criterii locale ε , t_r , σ de performanță impuse se determină poziția zeroului z_1 și a polilor p_1 , p_2 în planul complex al rădăcinilor.

Dacă performanțele sistemului sunt satisfăcute, atunci se verifică și condiția de realizabilitate prin excesul de poli – zerouri ai f.d.t. a sistemului închis și a procesului:

$$(p - z)_{H_0} \geq (p - z)_{H_p}. \quad (6.21)$$

În cazul când condiția din (6.19) nu satisface relația (6.21), atunci se adaugă poli suplimentari în așa mod plasați în planul z , astfel încât să nu influențeze performanțele determinate de poli dominanți p_1 , p_2 .

Dacă s-a determinat f.d.t. discretă $H_0(z)$, atunci se calculează f.d.t. discretă a sistemului deschis cu relația:

$$H_d(z) = \frac{H_0(z)}{1 - H_0(z)} = H_R(z)H_P(z), \quad (6.22)$$

din care se definește f.d.t. discretă a algoritmului de reglare:

$$H_R(z) = \frac{1}{H_P(z)} H_d(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \quad (6.23)$$

Procedura de proiectare a algoritmilor de reglare numerică pe baza alocării poli – zerouri a f.d.t. discretă $H_0(z)$ a sistemului presupune efectuarea următoarelor etape.

1. Se construiește f.d.t. $H_0(z)$ de forma (6.19) pe baza unor criterii locale de performanță (t_r , σ) și se testează asigurarea acestora. Dacă nu sunt satisfăcute unele criterii, atunci se introduc poli și zerouri suplimentari până când sunt satisfăcute toate performanțele reglării.

2. Se verifică condiția de realizabilitate fizică (6.21). Dacă nu este îndeplinită, atunci se reia procesul introducerii unor poli - zerouri verificându-se atât performanțele sistemului cât și realizabilitatea algoritmului proiectat.

3. Se calculează f.d.t. discretă $H_R(z)$ a algoritmului de reglare cu relațiile (6.22) și (6.23).

Exemplul 6.1. Se dă structura sistemului de reglare numerică a temperaturii în cuptorul termic (fig.6.2). Elementele funcționale ale sistemului sunt: traductor Tr de temperatură – termocuplu, adaptor Ad, regulator numeric RN cu convertoarele analog numeric CAN și numeric analog CNA, elementul de execuție EE. Încălzirea se efectuează cu energie electrică alimentând elementul de încălzire EÎ.

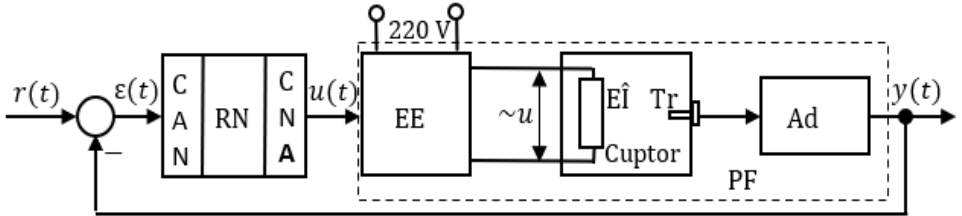


Fig. 6.2. Structura sistemului de reglare numerică a temperaturii în cuptor industrial

Date inițiale: Este cunoscută f.d.t. continuă a ansamblului de elemente ca partea fixată PF cu intrarea $u(t)$ și ieșirea adaptorului $y(t)$:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1s+1} = \frac{2e^{-10s}}{50s+1} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Se cere: 1. Să se determine modelul discret al părții fixate alegând perioada T de eșantionare în funcție de dinamica procesului.

2. Să se proiecteze un algoritmul numeric care să asigure performanțele: timpul de reglare $t_r \leq 10$ s și suprareglarea $\sigma \leq 4.3$ %.

Rezolvare: 1. Se determină raportul $\frac{\tau}{T_1} = \frac{10}{50} = 0.2$ și perioada T de eșantionare se alege din condiția:

$$T \approx (1.2 \dots 0.35)\tau. \text{ Se alege } T = 5 \text{ s.}$$

Se calculează modelul discret al f.d.t. a părții fixate fără timp mort

$$H_{P1}(s) = \frac{2}{50s+1} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

utilizând metoda dreptunghiului în avans și se obține:

$$\frac{50}{5} [y(k+1) - y(k)] + y(k) = 2u(k),$$

$$10y(k+1) - 10y(k) + y(k) = 2u(k),$$

$$y(k+1) - y(k) + 0.1y(k) = 0.2u(k),$$

$$y(k+1) - 0.9y(k) = 0.2u(k).$$

F.d.t. discretă este:

$$H(z^{-1}) = \frac{0.2z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}.$$

Se determină transformata z a componentei timpului mort:

$$d = \frac{\tau}{T} = \frac{10}{5} = 2.$$

Modelul discret al părții fixate cu timp mort va fi:

$$H(z^{-1}) = \frac{0.2z^{-1}}{1-0.9z^{-1}} z^{-2}.$$

2. Se construiește polinomul caracteristic dorit pentru performanțele impuse: $\sigma \leq 4.3\%$, $\xi = 0.7071$.

Pentru $t_r \leq 10$ s, se utilizează relația:

$$\frac{4}{\xi\omega_n} \leq 10, \omega_n \geq \frac{4}{10\xi} = \frac{4}{10 \cdot 0.7071} = 0.5657 \text{ s}^{-1}.$$

Se calculează polinomul dorit de ordinul doi:

$$P_{d2}(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

unde coeficienții se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -2e^{-\xi\omega_n T} \cos(\omega_n T \sqrt{1-\xi^2}) = \\ &= -2e^{-0.7071 \cdot 0.5657 \cdot 5} \cos(0.5657 \cdot 5 \sqrt{1-0.7071^2}) = -0.27, \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = e^{-2\xi\omega_n T} = e^{-2 \cdot 0.707 \cdot 0.56 \cdot 5} = 0.0183.$$

Deoarece gradul polinomului caracteristic trebuie să fie $n_c = 2n + d$ rezultă necesitatea de a mai introduce doi poli situați în planul s la distanțe mai mari decât ale polilor dominanți.

Se aleg polii $p_3 = 0,8$ și $p_4 = 0,9$ și polinomul caracteristic dorit are forma:

$$P_c(z) = P_{d2}(z)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4),$$

cu $\alpha_3 = e^{-p_3 T} = e^{-0.8 \cdot 5} = 0.0183$, $\alpha_4 = e^{-p_4 T} = e^{-0.9 \cdot 5} = 0.0111$.

$$\begin{aligned} P_c(z) &= (z^2 - 0.27z + 0.02)(z - 0.018)(z - 0.01) = \\ &= (z^2 - 0.27z + 0.02)(z^2 - 0.028z + 0.00018) = \\ &= z^4 - 0.298z^3 + 0.02774z^2 - 0.001z + 0.000036. \end{aligned}$$

Rezultă polinomul caracteristic dorit:

$$P_c(z^{-1}) = 1 - 0.298z^{-1} + 0.029z^{-2} - 0.001z^{-3} + 0.000036z^{-4},$$

iar coeficienții sunt: $\beta_1 = -0.298$, $\beta_2 = 0.029$, $\beta_3 = -0.001$, $\beta_4 = 0.0000036$.
Deoarece $n = 1$ și $d = 2$ se va alege un regulator cu gradul:

$n_Q = n = 1$ și $n_P = n + d = 1 + 2 = 3$ de forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}}.$$

Se alcătuieste egalitatea polinoamelor:

$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_3 z^{-3} + \beta_4 z^{-4} &= \\ = (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3})(1 + a_1 z^{-1}) + b_1 z^{-1}(q_0 + q_1 z^{-1})z^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_3 z^{-3} + \beta_4 z^{-4} &= \\ = 1 + (p_1 + a_1)z^{-1} + (a_1 p_1 + p_2)z^{-2} + (a_1 p_2 + p_3 + b_1 q_0)z^{-3} + \\ + (a_1 p_3 + b_1 q_1)z^{-4}. \end{aligned}$$

Prin compararea coeficienților rezultă sistemul de ecuații algebrice. Pentru determinarea valorilor numerice ale parametrilor regulatorului numeric se identifică coeficienții polinomului rădăcinilor P_d și polinomul P_{d0} și se obține sistemul de 4 ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} z^0: 1 &= 1, \\ z^{-1}: \beta_1 &= a_1 + p_1, \\ z^{-2}: \beta_2 &= a_1 p_1 + p_2, \\ z^{-3}: \beta_3 &= a_1 p_2 + p_3 + b_1 q_0, \\ z^{-4}: \beta_4 &= a_1 p_3 + b_1 q_1, \end{aligned}$$

la care se adaugă condiția de anulare a erorii $\varepsilon = 0$:

$$-1 = p_1 + p_2 + p_3.$$

Cele cinci ecuații se pun sub formă matricială, care se rezolvă utilizând forma matriceală:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{q}_R} = \overbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\beta}}$$

sau în forma:

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Se calculează parametrii regulatorului:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{q}_R} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0.602 \\ 0.029 \\ -0.001 \\ 0.0000036 \\ -1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Se obține soluția:

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\beta} = [0.602 \quad 0.5708 \quad -2.1728 \quad 13.4276 \quad 4.5]$$

cu parametrii regulatorului:

$$p_1 = 0.602, \quad p_2 = 0.5708, \quad p_3 = -2.1728, \quad q_0 = 13.4276, \quad q_1 = 4.5.$$

Funcția de transfer a regulatorului proiectat are forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}} = \frac{13.4276 + 4.5z^{-1}}{1 + 0.602z^{-1} + 0.5708z^{-2} - 2.1728z^{-3}}.$$

7 PROIECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE REGLARE ÎN DOMENIUL TIMPULUI

7.1 Introducere

Algoritmii de reglare obținuți prin discretizarea algoritmilor continui au în general performanțe reduse datorită aproximării componentelor integrală și derivativă și ca urmare a pierderii de informație în procesul de eșantionare și cuantificare.

Proiectarea algoritmilor numerici în domeniul timpului utilizează mai multe metode, dintre care evidențiem metodele timpului finit și metoda timpului minim, care vor fi expuse în continuare. Acești algoritmi se bazează pe răspunsul sistemului fără suprareglare (în limba engleză *dead – beat*). Algoritmii de reglare se proiectează pe baza unui model discret al părții fixate și prin impunerea unui răspuns dorit al sistemului de reglare automată.

7.2 Metoda timpului finit

Metoda timpului finit folosește conceptul de impunerea unui anumit răspuns indicial al mărimii reglate la semnalul de referință treaptă unitară, care prezintă răspunsul impus fără suprareglare numit *algoritm normal* (AN) sau dacă se fixează și evoluția conducerii prezintă *algoritm extins* (AE).

7.2.1 Metoda răspunsului impus - algoritmul normal

Se consideră schema structurală a sistemului de reglare automată cu regulator numeric cu f.d.t. discretă $H_R(z)$ și cu procesul continuu descris de f.d.t. $H_P(s)$ și elementul de reținere de ordin zero cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ este prezentată în figura 7.1.

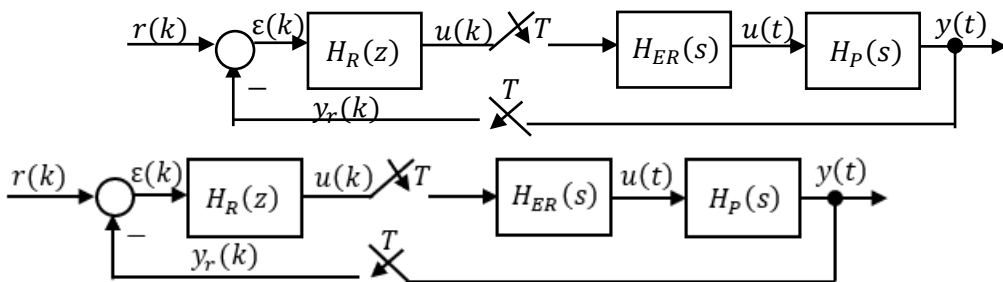


Fig. 7.1. Schema structurală a sistemului numeric

Se presupune că asupra sistemului acționează referința de tip treaptă unitară discretă dată de relația:

$$r(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{pentru } k < 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

și se impune un anumit răspuns mărimii de reglare $y(k)$ astfel ca să fie asigurate toate performanțele sistemului automat în regim tranzitoriu și staționar. Se impune ca regimul staționar să se stabilizeze în m perioade de eșantionare, care va fi numit *timp finit*:

$$y(k) = r(k) = 1(k), \quad (7.2)$$

iar mărimea de comandă după m perioade de eșantionare va fi:

$$u(k) = u(m) = \cos nt, \quad \text{pentru } k \geq m. \quad (7.3)$$

Astfel, se presupune că partea fixată se descrie cu f.d.t. discretă de gradul m în forma:

$$H_p(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})}. \quad (7.4)$$

Mărimea răspunsului impus (dorit) în formă operațională discretă a lui $y_d(z^{-1})$ se dă de relația:

$$y_d(z^{-1}) = \underbrace{y(1)z^{-1} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)}}_{\text{regimul tranzitoriu}} + \underbrace{y(m)z^{-m} + y(m+1)z^{-(m+1)} + \dots}_{\text{regimul staționar}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)}}_{\text{regimul tranzitoriu}} + \\
&+ \underbrace{y(m)z^{-m}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)}_{\text{regimul sta\u021bionar}} = \\
&= \underbrace{y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)}}_{\text{regimul tranzitoriu}} + \\
&+ \underbrace{y(m)z^{-m} \frac{1}{1-z^{-1}}}_{\text{regimul sta\u021bionar}}, \tag{7.5}
\end{aligned}$$

unde componenta regimului sta\u021bionar este dat\u0103 \u00een forma $z^{-m}1(z^{-1}) = z^{-m} \frac{1}{1-z^{-1}}$, iar m\u0103rimea de conducere \u00een form\u0103 opera\u021bional\u0103 discret\u0103 este:

$$\begin{aligned}
u(z^{-1}) &= u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + \\
&+ u(m)z^{-m} + u(m+1)z^{-(m+1)} + \dots = \\
&= u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + z^{-m} \frac{1}{1-z^{-1}}, \tag{7.6}
\end{aligned}$$

\u00een care nu se cunosc valorile $u(k)$ p\u00e2n\u0103 la valoarea $u(m-1)$, iar $u(m) = u(m+1) = 1$ - prezint\u0103 regimul sta\u021bionar unitar. Valoarea comenzii \u00een regim sta\u021bionar se poate determina din condi\u021bia ca sistemul numeric s\u0103 ating\u0103 regimul sta\u021bionar o valoare a r\u0103spunsului $y_{st} = 1$.

Pornind de la r\u0103spunsul sistemului dat de rela\u021bia:

$$y(k) = H_P(z^{-1})u(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k), \tag{7.7}$$

din care se exprim\u0103 m\u0103rimea comenzii:

$$u(k) = y(k) \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{1 + \sum_{i=1}^m a_i}{1 + \sum_{j=1}^m a_j} = \frac{1}{k_0}, \tag{7.8}$$

unde $k_0 = \lim_{z \rightarrow 1} H_p(z^{-1})$ reprezintă coeficientul de transfer al procesului.

Deoarece cunoscând răspunsul sistemului din expresia (7.5) și admițând că la intrarea sistemului acționează semnalul treaptă unitară discretă $r(z^{-1}) = 1(z^{-1}) = 1/(1 - z^{-1})$, se determină f.d.t. discretă dorită a sistemului închis în forma:

$$\begin{aligned}
 H_{0d}(z^{-1}) &= \frac{y_d(z^{-1})}{r(z^{-1})} = y_d(z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \\
 &= (1 - z^{-1})[y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\
 &\quad + z^{-m} \frac{1}{1 - z^{-1}}] = \\
 &= y(1)z^{-1} + (y(2) - y(1))z^{-2} + \dots + (y(m-1) - \\
 &\quad - y(m-2))z^{-(m+1)} + (1 - y(m-1))z^{-m}, \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

unde valoarea componentelor $y(m) = y(m+1) = \dots = 1$, iar timpul de reglare $t_r = m$ perioade de eșantionare.

În expresia (7.9) se introduc notațiile:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= y(1), \\
 p_2 &= y(2) - y(1), \\
 p_3 &= y(3) - y(2), \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_m &= 1 - y(m-1)
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

și va avea forma:

$$H_{0d}(z^{-1}) = P(z^{-1}) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m}. \tag{7.11}$$

Din expresia (7.10) după unele transformări rezultă condiția:

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad (7.12)$$

care impune ca algoritmul cu răspunsul fără suprareglare să conțină componenta integrativă.

Din (7.11) se constată ecuația caracteristică a sistemului închis care este de forma:

$$z^m = z + z^2 + \dots + z^m = 0. \quad (7.13)$$

Valorile coeficienților p_i din (7.10) se calculează după eșantioanele $y(k)$. Sistemul automat este cu un grad de libertate și f.d.t. se exprimă:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{H_R(z^{-1})H_P(z^{-1})}{1+H_R(z^{-1})H_P(z^{-1})} = \frac{H_d(z^{-1})}{1+H_d(z^{-1})}, \quad (7.14)$$

de unde se determină f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(z^{-1}) = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})} = H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}). \quad (7.15)$$

Deoarece f.d.t. $H_d(z^{-1})$ se determină din f.d.t. $H_0(z^{-1})$ a sistemului închis, iar a procesului este cunoscută, atunci din (7.15) se calculează f.d.t. a regulatorului:

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= H_d(z^{-1}) \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \\ &= \frac{P(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \\ &= \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\dots+q_mz^{-m}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-\dots-p_mz^{-m}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Relația (7.16) prezintă un algoritm recursiv de ordinul $2m$, fizic realizabil.

Algoritmul obținut (7.16) poate fi simplificat utilizând polinomul $Q(z^{-1})$ de forma:

$$\begin{aligned}
 Q(z^{-1}) &= \frac{u(z^{-1})}{r(z^{-1})} = (1 - z^{-1})[u(0) + u(1)z^{-1} \\
 &+ \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + u(m)z^{-m} \frac{1}{1-z^{-1}}] = \\
 &= q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_mz^{-m},
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

unde se utilizează notațiile:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= u(0), \\
 q_1 &= u(1) - u(0), \\
 q_2 &= u(2) - u(1), \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 q_m &= u(m) - u(m-1).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Din relația (7.19) după unele transformări se obține:

$$\sum_{i=0}^m q_i = q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_m = u(m). \tag{7.20}$$

În relația (7.4) se aplică (7.18) și se obține f.d.t. discretă a procesului în forma:

$$\begin{aligned}
 H_P(z^{-1}) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})r(z^{-1})}{Q(z^{-1})r(z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \\
 &= \frac{p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m}}{q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_mz^{-m}}.
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Funcția de transfer a regulatorului din (7.16) se calculează cu f.d.t. a părții fixate exprimă prin (7.21) și se obține:

$$\begin{aligned}
 H_R(z^{-1}) &= H_d(z^{-1}) \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{P(z^{-1}) Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1}) P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \\
 &= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}. \tag{7.22}
 \end{aligned}$$

În acest caz algoritmul de reglare obținut din (7.22) este fizic realizabil de ordinul m a părții fixate.

Pentru calculul parametrilor se utilizează relația (7.4) și (7.21) în forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} &= \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \text{ sau } \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \\
 &= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}. \tag{7.23}
 \end{aligned}$$

Dacă se impune coeficientul $q_0 = 1$ din (7.23), atunci și în acest scop toți termenii din partea dreaptă a relației (7.23) se împart la q_0 și se obține:

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} &= \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1} + \frac{p_2}{q_0} z^{-2} + \dots + \frac{p_m}{q_0} z^{-m}}{\frac{q_0}{q_0} + \frac{q_1}{q_0} z^{-1} + \dots + \frac{q_m}{q_0} z^{-m}} = \\
 &= \frac{p'_1 z^{-1} + p'_2 z^{-2} + \dots + p'_m z^{-m}}{1 + q'_1 z^{-1} + \dots + q'_m z^{-m}}. \tag{7.24}
 \end{aligned}$$

Din echivalența expresiei (7.24) egalând coeficienții de pe lângă z^{-1} de aceleași puteri din partea stângă și partea dreaptă de la numitor și respectiv de la numărător se obțin expresiile de calcul ai parametrilor algoritmului de reglare în forma:

$$q_i = a_i q_0, \quad i = \overline{1, m} \quad \text{și} \quad p_j = b_j q_0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.25}$$

În relațiile (7.25) parametrii q_i , p_j depind de valoarea lui $q_0 = u(0)$, care prezintă valoarea comenzii inițiale și care poate depăși limitele admisibile pentru elementul de execuție, de unde rezultă, că regulatorul atinge nivelul de saturație al comenzii.

Pentru calculul parametrului q_0 se utilizează expresia (7.24) cu $p_j = b_j q_0$ din (7.25) se obține:

$$\sum_{j=1}^m p_j = \sum_{j=1}^m b_j q_0 = 1, \quad (7.26)$$

de unde parametrul q_0 se exprimă:

$$q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}. \quad (7.27)$$

Valoarea inițială a comenzii din (7.24) este:

$$u(0) = q_0 = \frac{p_1}{b_1},$$

unde valoarea lui p_1 caracterizează viteza de răspuns a sistemului și prin alegerea acestui coeficient se poate limita valoarea comenzii inițiale.

Dacă se impune o viteză mare de răspuns p_1 rezultă timp de creștere t_c mare și atunci comanda inițială $u(0)$ este mai mare pentru un coeficient b_1 dat, care este funcție de perioada de eșantionare.

Astfel, polinoamele din f.d.t. (7.22) a algoritmului de reglare cu relațiile (7.25) se exprimă prin parametrii părții fixate și parametrul q_0 în forma:

$$Q(z^{-1}) = q_0 A(z^{-1}) \text{ și } P(z^{-1}) = q_0 B(z^{-1}). \quad (7.28)$$

În final, f.d.t. (7.22) a algoritmului de reglare va avea forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1-q_0 B(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}. \quad (7.29)$$

Algoritmul sintetizat în domeniul timpului discret $u(kT)$ obținut prin această procedură este un algoritm recurent și cauzal și se prezintă în forma de realizare:

$$u(kT) = q_0 \varepsilon(kT) + \sum_{i=1}^n q_i \varepsilon((k-i)T) - \sum_{j=1}^n p_j u((k-j)T). \quad (7.30)$$

În cazul când modelul procesului conține componenta timpului mort:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}, \quad (7.31)$$

unde $d \geq 0$, $d \in N$ care reprezintă timpul mort al procesului, atunci algoritmul de reglare se prezintă de relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d}} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})}. \quad (7.32)$$

Concluzii: 1. Acest algoritm s-a obținut din f.d.t. discretă a sistemului închis cu m poli în origine (7.11), ceea ce presupune o sensibilitate ridicată a sistemului automat la variația parametrilor.

2. Deoarece valoarea inițială a comenzii $u(0) = q_0$ se determină de $\sum_{j=1}^m b_j$ ai modelului discret al părții fixate, atunci pentru sume mici ale coeficienților b_j se obțin valori mari ale comenzii $u(0)$, care pot determina intrarea în saturație a componentei integrale I a regulatorului și, respectiv, a elementului de execuție.

Procedura de proiectare a algoritmului de reglare:

1. Se determină perioada de eșantionare.
2. Se calculează f.d.t. discretă a părții fixate cu perioada de eșantionare aleasă.
3. Se calculează valoarea lui $u(0)$ și se verifică încadrarea în limitele admisibile ale comenzii.
4. Se calculează parametrii regulatorului cu relațiile (7.25)

5. Se determină f.d.t. discretă $H_R(z^{-1})$ a algoritmului de reglare după relația (7.29).

6. Se verifică prin simulare performanțele sistemului proiectat.

7. Dacă sunt satisfăcute toate performanțele sistemului, atunci procedura de proiectare

este încheiată, iar dacă nu sunt asigurate toate performanțele, urmează de recalculat modelul părții fixate cu altă valoare a perioadei de eșantionare și de repetat procedura de proiectare.

Exemplul 7.1. Se dă modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s, $\tau = 1.0$ s descris cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1} = \frac{y(s)}{u(s)}.$$

Se cere de efectuat:

1. Să se determine perioada de eșantionare.

2. Să se calculeze funcția de transfer discretă a modelului părții fixate.

3. Să se sintetizeze algoritmul de conducere după metoda răspunsului impus – algoritmul normal.

Rezolvare.

Schema structurală a sistemului de reglare automată cu regulator numeric cu procesul continuu descris de f.d.t. (1) este prezentată în figura 7.1.

Se cere de elaborat algoritmul de reglare – algoritmul normal.

Soluționare. Se efectuează următoarele etape.

1. Se determină perioada de eșantionare cu relația:

$$\frac{T}{T_1+T_2} \geq 0.36, T = 0.36(T_1 + T_2) = 0.36(2 + 5) = 2.52 \approx 3 \text{ s.}$$

2. Se introduce transformata:

$$z = e^{Ts}.$$

3. Se determină componenta discretă a timpului mort în transformata z :

$$Z\{e^{-\tau s}\} = z^{-d}, d = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{3} = 0.3333 \approx 0, z^{-d} = z^{-0} = 0.$$

3. Se determină f.d.t. echivalentă a conexiunii serie a elementului de reținere cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și a părții fixate cu f.d.t. $H_P(s)$:

$$H(s) = H_{ER}(s)H_p(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{ke^{-\tau s}}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1} = (1-e^{-Ts}) \frac{ke^{-\tau s}}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}.$$

5. Utilizând perioada de eșantionare T (2), se determină modelul discret al f.d.t. echivalente (5) aplicând metoda trapezului de aproximare, care se aduce la forma standard împărțind termenii de la numărător și numitor la d_0z^3 și se obține forma:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-d}(1-z^{-1})Z\left\{\frac{k}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}\right\} = \\ &= z^{-d}(1-z^{-1}) \frac{k}{T_1T_2\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^3 + (T_1+T_2)\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^2 + \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \\ &= z^{-d} \frac{z^{-1}}{z} \frac{kT^3(z+1)^3}{T_1T_28(z-1)^3+4T(T_1+T_2)(z+1)(z-1)^2+2T^2(z+1)^2(z-1)} = \\ &= z^{-d} \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})}. \end{aligned}$$

6. Se calculează coeficienții modelului discret aproximativ:

$$b_0 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5 \cdot 3^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 0.0742,$$

$$b_1 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3 \cdot 0.5 \cdot 3^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 0.2225,$$

$$b_2 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3 \cdot 0.5 \cdot 3^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 0.2225,$$

$$b_3 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5 \cdot 3^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 0.0742,$$

$$a_1 = \frac{16T_1T_2+4T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{16T_1T_2+4T^2}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 1.0769,$$

$$a_2 = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3(2+5) + 2 \cdot 3^2} = 0.0769.$$

Funcția de transfer discretă aproximată a modelului obiectului de ordinul $m = 2$ ($d = 0$) este:

$$H_p(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} =$$

$$= \frac{0.0742 + 0.2225z^{-1} + 0.2225z^{-2} + 0.0742z^{-3}}{1 - 1.0769z^{-1} + 0.0769z^{-2}}.$$

8. Se determină algoritmul normal de reglare cu modelul obiectului discret de ordinul $m = 2$ și perioada de eșantionare T din (2) prezentat cu funcția de transfer de forma:

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 z^{-d} B(z^{-1})} = \\ &= \frac{q_0(1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}{1 - q_0(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3})} = \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_0 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})}. \end{aligned}$$

9. Se determină parametrul q_0 care prezintă comanda $u(0)$ la momentul inițial de timp cu relația:

$$q_0 = u(0) = \frac{1}{b_0 + b_1 + b_2 + b_3} = \frac{1}{0.0742 + 0.2225 + 0.2225 + 0.0742} = 1.6852,$$

10. Se determină parametrii $q_1, q_2, p_0, p_1, p_2, p_3$ algoritmului normal după relațiile:

$$q_1 = q_0 a_1 = 1.6852 \cdot 1.0769 = 1.8148,$$

$$q_2 = q_0 a_2 = 1.6852 \cdot 0.0769 = 0.1296,$$

$$p_0 = q_0 b_0 = 1.6852 \cdot 0.0742 = 0.1250,$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 1.6852 \cdot 0.2225 = 0.3749,$$

$$p_2 = q_0 b_2 = 1.6852 \cdot 0.2225 = 0.3749,$$

$$p_3 = q_0 b_3 = 1.6852 \cdot 0.0742 = 0.1250.$$

11. Se prezintă funcția de transfer a algoritmului normal calculat:

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_0 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \\ &= \frac{1.6852 - 1.8148z^{-1} + 0.1296z^{-2}}{1 - 0.1250 - 0.3730z^{-1} - 0.3730z^{-2} - 0.1250z^{-3}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}. \end{aligned}$$

12. Mărimea comenzii din (9) se prezintă în forma operațională în z și în domeniul timpului discret:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1})(1 - p_0 - p_1z^{-1} - p_2z^{-2} - p_3z^{-3}) = \varepsilon(z^{-1})(q_0 - q_1z^{-1} + q_2z^{-2}),$$

$$\begin{aligned} u(z^{-1}) - p_0u(z^{-1}) - p_1z^{-1}u(z^{-1}) - p_2z^{-2}u(z^{-1}) - p_3z^{-3}u(z^{-1}) &= \\ = q_0\varepsilon(z^{-1}) - q_1z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) + q_2z^{-2}\varepsilon(z^{-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(kT) &= p_0u(kT) + p_1u((k-1)T) + p_2u((k-2)T) + p_3u((k-3)T) + \\ &+ q_0\varepsilon(kT) - q_1\varepsilon((k-1)T) + q_2\varepsilon((k-2)T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(kT) &= 0.1250u(kT) + 0.3749u((k-1)T) + 0.3749u((k-2)T) + \\ &+ 0.1250u((k-3)T) + 1.6852\varepsilon(kT) - 1.8148\varepsilon((k-1)T) + \\ &+ 0.1296\varepsilon((k-2)T). \blacksquare \end{aligned}$$

7.2.2 Metoda răspunsului impus - algoritmul extins

Pentru a avea posibilitatea de a controla valoarea inițială $u(0)$ a comenzii și a evita intrarea în saturație a regulatorului, se extinde durata regimului tranzitoriu al sistemului cu o perioadă și timpul de reglare va fi $t_r = m + 1$ perioade de eșantionare.

În cazul dat polinoamele $Q(z^{-1})$ și $P(z^{-1})$ din (7.22) se vor prezenta în forma:

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots + q_{m+1}z^{-(m+1)}, \quad (7.33)$$

$$P(z^{-1}) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_{m+1}z^{-(m+1)}. \quad (7.34)$$

În scopul identificării parametrilor de acord ai algoritmului de reglare q_i și p_j ca funcții de parametrii părții fixate cu relațiile (7.25):

$$q_i = a_i q_0, i = \overline{1, m} \text{ și } p_j = b_j q_0, j = \overline{1, m}, \quad (7.35)$$

se folosește o rădăcină comună $(\alpha z - 1) = (\alpha - z^{-1}) = 0$ și $z = 1/\alpha$ în polinoamele (7.33) și (7.34) și care se prezintă ca raportul acestor

polinoame în forma:

$$\begin{aligned} \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} &= \frac{(p'_1 z^{-1} + p'_1 z^{-2} + \dots + p'_{m+1} z^{-(m+1)})(\alpha - z^{-1})}{q'_0 + q'_1 z^{-1} + q'_2 z^{-2} + \dots + q'_{m+1} z^{-(m+1)}(\alpha - z^{-1})} = \\ &= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Din echivalența expresiei (7.36) egalând coeficienții de pe lângă z^{-1} de aceleași puteri din partea stângă și partea dreaptă de la numitor și respectiv de la numărător se obțin expresiile de calcul ai parametrilor algoritmului extins de reglare în forma:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha q'_0, & p_1 &= \alpha p'_1, \\ q_1 &= \alpha q'_1 - q'_0, & p_2 &= \alpha p'_2 - p'_1, \\ q_2 &= \alpha q'_2 - q'_1, & p_3 &= \alpha p'_3 - p'_2, \\ \dots & & \dots & \\ q_m &= \alpha q'_m - q'_{m-1}, & p_m &= \alpha p'_m - p'_{m-1}, \\ q_{m+1} &= -q'_m, & p_{m+1} &= -p'_m. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Din expresiile (7.37) valoarea inițială a comenzii se calculează cu relația:

$$u(0) = q_0 = \alpha q'_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}. \quad (7.38)$$

Pentru calculul parametrului q'_0 se utilizează suma relației (7.12) și (7.37) în forma:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_{m+1} &= \alpha p'_1 + (\alpha p'_1 - p'_1) + \dots + \\ &+ (\alpha p'_m - p'_{m-1}) - p'_m = \\ &= (\alpha - 1) \sum_{j=1}^m p_j = (\alpha - 1) \sum_{j=1}^m b_j q'_0 = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{q_0}{q'_0} - 1\right) q'_0 \sum_{j=1}^m b_j = (q_0 - q'_0) \sum_{j=1}^m b_j = 1. \quad (7.39)$$

Din expresia (7.39) se calculează parametrul:

$$q'_0 = q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}. \quad (7.40)$$

Parametrul $q_0 = u(0)$ se alege în funcție de limitările impuse conducerii, iar următorii parametri ai algoritmului de reglare se determină după relațiile:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}, & p_1 &= q_0 b_1, \\ q_2 &= q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=1}^m b_j}, & p_2 &= q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum_{j=1}^m b_j}, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ q_m &= q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum_{j=1}^m b_j}, & p_m &= q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum_{j=1}^m b_j}, \\ q_{m+1} &= -a_m \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j} \right), & p_{m+1} &= -b_m \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j} \right). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Funcția de transfer a algoritmului de reglare cu coeficienții din (7.41) are forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_{m+1} z^{-(m+1)}}. \quad (7.42)$$

Valoarea inițială $u(0)$ a conducerii se alege din condiția $u(1) \leq u(0)$ și aceste mărimi se calculează:

$$u(1) = q_1 + q_0 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}, \quad (7.43)$$

$$u(0) = q_0 \geq \frac{1}{1-a_1} \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j}. \quad (7.44)$$

Pentru modele discrete ale proceselor cu timp mort algoritmul numeric de reglare se prezintă cu relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 A(z^{-1})(\alpha - z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})z^{-d}(\alpha - z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})}. \quad (7.45)$$

Algoritmul extins de reglare obținut este cauzal de dimensiunea $(m + 1)$.

Funcția de transfer $H_0(z)$ a sistemului numeric închis conține $(m + 1)$ poli în origine, care conduce la un răspuns rapid, dar sistemul are o sensibilitate ridicată în raport cu variațiile parametrilor modelului obiectului de reglare.

Procedura de proiectare a algoritmului extins de reglare:

1. Se determină perioada de eșantionare.
2. Se calculează f.d.t. discretă a părții fixate cu perioada de eșantionare aleasă.
3. Se calculează valoarea lui $u(0) = q_0$ și se verifică încadrarea în limitele admisibile ale

comenzii.

4. Se calculează parametrii regulatorului cu relațiile (7.41)
5. Se determină f.d.t. discretă $H_R(z^{-1})$ a algoritmului de reglare după relația (7.42).
6. Se verifică prin simulare performanțele sistemului proiectat.
7. Dacă sunt satisfăcute toate performanțele sistemului automat, atunci procedura de

proiectare este încheiată, iar dacă nu sunt asigurate toate performanțele, urmează de recalculat modelul părții fixate cu altă valoare a perioadei de eșantionare și altă valoare inițială a conducerii și de repetat procedura de proiectare.

Exemplul 7.2. Se dă modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s, $\tau = 1.0$ s și este aproximat cu metoda trapezului cu f.d.t. din exemplul 7.1:

$$H_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

unde coeficienții se prezintă prin relațiile:

$$b_0 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2}, b_1 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2},$$

$$b_2 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2}, b_3 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2},$$

$$a_1 = \frac{16T_1T_2+4T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2}, a_2 = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2}.$$

unde T este perioada de eșantionare, ordinul modelului $m = 2$, d - numărul de perioade de eșantionare a timpului mort.

Se cere de elaborat algoritmul de reglare – algoritmul extins.

Soluționare. Se efectuează următoarele etape.

1. Se determină perioada de eșantionare cu relația:

$$\frac{T}{T_1+T_2} \geq 0.22, T = 0.22(T_1 + T_2) = 0.22(2 + 5) = 1.54 \approx 2 \text{ s.}$$

2. Se determină componenta timpului mort după relația:

$$d = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \approx 1, z^{-d} = z^{-1}.$$

3. Se calculează coeficienții modelului discret (1) cu perioada de eșantionare $T = 2$ s:

$$b_0 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5 \cdot 2^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 0.0278,$$

$$b_1 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3 \cdot 0.5 \cdot 2^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 0.0833,$$

$$b_2 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3 \cdot 0.5 \cdot 2^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 0.0833,$$

$$b_3 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5 \cdot 2^3}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 0.0278,$$

$$a_1 = \frac{16T_1T_2+4T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2^2}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 1.2222,$$

$$a_2 = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2}{8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2(2+5) + 2 \cdot 2^2} = 0.2222.$$

Funcția de transfer discretă a modelului obiectului aproximat de ordinul $m = 2$

este:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} =$$

$$= \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3} + b_3 z^{-4}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0.0278z^{-1} + 0.0833z^{-2} + 0.0833z^{-3} + 0.0278z^{-4}}{1 - 1.2222z^{-1} + 0.2222z^{-2}}.$$

4. Se determină algoritmul extins de reglare cu o perioadă T de eșantionare din de ordinul $m + 1 + d = 2 + 1 + 0 = 3$ de forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - z^{-1}P(z^{-1})} = \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})},$$

5. Se determină parametrul $q_0 = u(0)$ care prezintă comanda la momentul inițial de timp cu relația:

$$q_0 = \frac{1}{b_0 + b_1 + b_2 + b_3} = \frac{1}{0.0278 + 0.0833 + 0.0833 + 0.0278} = 4.5005.$$

Se verifică realizarea condiției (7.44):

$$u(0) = q_0 \geq \frac{1}{1 - a_1 \sum_{j=0}^3 b_j} = \frac{1}{1 + 1.2222 \cdot 0.0278 + 0.0833 + 0.0833 + 0.0278} = 2.0252,$$

care este respectată.

6. Se determină parametrii algoritmului extins de reglare după relațiile (7.41):

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum_{j=0}^3 b_j} = 4.5005(-1.2222 - 1) + \frac{1}{0.2222} = -5.5005,$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=0}^3 b_j} = 4.5005(0.2222 + 1.2222) - \frac{1.2222}{0.2222} = 1.0000,$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum_{j=0}^3 b_j} = 4.5005(0 - 0.2222) + \frac{0.2222}{0.2222} = 0,$$

$$q_4 = -a_2 \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=0}^3 b_j} \right) = -0.2222 \left(4.5005 - \frac{1}{0.2222} \right) = 0,$$

$$p_1 = q_0 b_0 = 4.5005 \cdot 0.0278 = 0.1251,$$

$$p_2 = q_0(b_1 - b_0) + \frac{b_0}{\sum_{j=0}^3 b_j} = 4.5005(0.0833 - 0.0278) + \frac{0.0278}{0.2222} = 0.3749,$$

$$p_3 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum_{j=0}^3 b_j} = 4.5005(0.0833 - 0.0833) + \frac{0.0833}{0.2222} = 0.3749,$$

$$p_4 = -b_3 \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=0}^3 b_j} \right) = -0.0278 \left(4.5005 - \frac{1}{0.2222} \right) = 0.$$

7. Se prezintă funcția de transfer a algoritmului extins calculat:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}} = \frac{4.5005 - 5.5005 z^{-1} + 1.0000 z^{-2}}{1 - 0.1251 z^{-1} - 0.3749 z^{-2} - 0.3749 z^{-3}}.$$

8. Mărimea comenzii din (6) se prezintă în forma operațională și în domeniul timpului discret:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1})(1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}) = \varepsilon(z^{-1})(q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}),$$

$$u(z^{-1}) = p_1 z^{-1} u(z^{-1}) + p_2 z^{-2} u(z^{-1}) + p_3 z^{-3} u(z^{-1}) + \\ + q_0 \varepsilon(z^{-1}) - q_1 z^{-1} \varepsilon(z^{-1}) + q_2 z^{-2} \varepsilon(z^{-1}).$$

Comanda în domeniul timpului discret este:

$$u(kT) = p_1 u((k-1)T) + p_2 u((k-2)T) + p_3 u((k-3)T) + \\ + q_0 \varepsilon(kT) - q_1 \varepsilon((k-1)T) + q_2 \varepsilon((k-2)T) = \\ = 0.1251 u((k-1)T) + 0.3749 u((k-2)T) + 0.3749 u((k-3)T) + \\ + 4.5005 \varepsilon(kT) - 5.5005 \varepsilon((k-1)T) + 1.0000 \varepsilon((k-2)T).$$

Mărimile membrului din dreapta a expresiei prezintă amplitudinile comenzii la momentul de eșantionare $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ■

7.2.3 Alegerea perioadei de eșantionare

În cazul dat pentru asigurarea unei comportări calitative a sistemului cu algoritmul normal a răspunsului impus se impune condiția de alegere optimă a perioadei de eșantionare. Din analiza algoritmilor expuși rezultă că valoarea inițială a conducerii $u(0)$ este invers proporțională cu suma coeficienților b_j a părții fixate. Însă, valorile coeficienților b_j este funcție de perioada de eșantionare și cu creșterea

acesteia valorile lor cresc și rezultă că pentru reducerea valorii inițiale a lui $u(0)$ prin mărirea perioadei de eșantionare.

Pentru *algoritm normal* (7.32) al răspunsului impus sistemului automat se recomandă alegerea perioadei de eșantionare T ca funcție de proprietățile dinamice ale procesului – constantele de timp ale părții fixate sau de timpul de creștere al răspunsului procesului dată de relațiile [13]:

$$\frac{T}{T_{\Sigma}} \geq 0,36 \text{ sau } \frac{T}{T_{95}} \geq 0,18, \quad (7.46)$$

iar pentru *algoritm extins* (7.45) al răspunsului impus sistemului automat se recomandă alegerea perioadei de eșantionare T în forma:

$$\frac{T}{T_{\Sigma}} \geq 0,22 \text{ sau } \frac{T}{T_{95}} \geq 0,11, \quad (7.47)$$

unde în aceste relații T_{Σ} este suma constantelor de timp ale f.d.t. continue a părții fixate, iar mărirea $T_{95} = t_c$ care este timpul de creștere al răspunsului procesului până la 95 % din valoarea staționară.

7.2.4 Metoda răspunsului timpului minim

Pentru obținerea unui algoritm de dimensiune redusă se presupune a construi f.d.t. discretă a sistemului numeric deschis $H_d(z^{-1})$ de dimensiuni reduse. Forma minimă a f.d.t. $H_d(z^{-1})$ a sistemului deschis se definește pentru semnale tipice treaptă și rampă.

În acest caz sistemului automat numeric se impun satisfacerea următoarelor performanțe.

1. Eroarea staționară ε a sistemului automat să fie nulă pentru momentele de eșantionare pentru intrările polinomiale de un grad anumit.

2. Răspunsul tranzitoriu al sistemului să fie cât mai rapid posibil și cu timpul de reglare definit de un număr minim de perioade de eșantionare.

Se consideră cazul general când semnalul discret al referinței este aplicat la intrarea sistemului numeric se descrie în forma:

$$r(z^{-1}) = \frac{M(z^{-1})}{(1-z^{-1})^N}, \quad (7.48)$$

unde $M(z^{-1})$ este un polinom fără zerouri în $z = 1$, iar $N = 1, 2, 3, \dots$ este un număr întreg pozitiv natural.

Pentru forme particulare ale polinomului $M(z^{-1})$ și anumite valori ale lui N se obțin semnalele tipice.

1. Dacă polinomul $M(z^{-1}) = 1$ și numărul $N = 1$, atunci se obține semnalul treaptă:

$$r(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (7.49)$$

2. Dacă polinomul $M(z^{-1}) = Tz^{-1}$ și numărul $N = 2$, atunci se obține semnalul rampă:

$$r(z^{-1}) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}. \quad (7.50)$$

Proiectarea sistemului numeric prin metoda timpului minim se bazează pe impunerea performanțelor sistemului:

1. Eroarea staționară a sistemului automat să fie nulă pentru momentele de eșantionare pentru intrările polinomiale de un grad anumit.

2. Răspunsul tranzitoriu al sistemului să fie cât mai rapid posibil și cu timpul de reglare definit de un număr minim de perioade de eșantionare.

3. Realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare.

Pentru satisfacerea performanței de eroare staționară $\varepsilon = 0$ se consideră structura standard a unui sistem numeric pentru care transformata z a erorii se dă de relația:

$$\varepsilon(z) = r(z) - y(z) = r(z) - H_0(z)r(z) = r(z)(1 - H_0(z)), \quad (7.51)$$

unde $H_0(z)$ este f.d.t. discretă a sistemului automat închis.

Utilizând teorema valorii finale a transformatei z se calculează expresia erorii staționare $\varepsilon(z)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})r(z)(1 - H_0(z^{-1})) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{M(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^N} (1 - H_0(z^{-1})).\end{aligned}\quad (7.52)$$

Deoarece polinomul $M(z^{-1})$ nu are zerouri în $z = 1$, condiția necesară pentru eroare staționară nulă este:

$$1 - H_0(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^N F(z^{-1}),\quad (7.53)$$

unde $F(z^{-1})$ este un polinom în z^{-1} , care nu are zerouri la $z = 1$. Din expresia (7.53) se calculează f.d.t. discretă a sistemului închis cu relația:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{z^N - (z^{-1})^N F(z^{-1})}{z^N}.\quad (7.54)$$

Ecuția caracteristică a sistemului numeric obținut cu algoritmul răspunsului impus este:

$$z^p = 0, \text{ pentru } p \geq N,\quad (7.55)$$

unde p este un număr pozitiv întreg.

Astfel, dacă ecuația caracteristică a unui sistem numeric are forma (7.55) și are rădăcini numai în $z = 0$, atunci eroarea staționară a sistemului va tinde la zero într-un număr finit de perioade de eșantionare, iar răspunsul sistemului este aperiodic.

Se verifică condiția de realizabilitate fizică a regulatorului cu relația:

$$(p - z)_{H_0} = (p - z)_{H_P},\quad (7.56)$$

care dacă nu este îndeplinită, atunci se utilizează polinomul $F(z^{-1})$.

Pentru diferite tipuri de semnale de intrare expresia (7.53) va lua forme particulare ca:

1. Pentru semnal de referință treaptă unitară discretă $r(k) = 1(k)$ și $N = 1$ se obține:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}). \quad (7.57)$$

2. Pentru semnal de referință rampă unitară discretă $r(k) = k1(k)$ și $N = 2$ se obține:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^2 F(z^{-1}). \quad (7.58)$$

3. Pentru semnal de referință parabolă unitară discretă $r(z) = t^2 1(t)$ și $N = 3$ se obține:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^3 F(z^{-1}). \quad (7.59)$$

Pentru a obține răspunsul minimal pentru fiecare tip de semnal în parte se cere ca polinomul $F(z^{-1}) = 1$ și expresiile (7.57) – (7.59) au forma următoare.

1. Pentru semnal de referință treaptă unitară discretă $r(k) = 1(k)$ și $N = 1$ se obține:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}) = 1 - 1 + z^{-1} = z^{-1}. \quad (7.60)$$

Pentru semnal de referință rampă $r(t) = t1(t)$, $N = 2$ și $F(z^{-1})$ se obține:

$$\begin{aligned} H_0(z^{-1}) &= 1 - (1 - z^{-1})^2 F(z^{-1}) = 1 - 1 + 2z^{-1} - z^{-2} = \\ &= 2z^{-1} - z^{-2}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Pentru semnal de referință parabolă $r(z) = t^2 1(t)$ $N = 3$ și $F(z^{-1})$ se obține:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^3 F(z^{-1}) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}. \quad (7.62)$$

Din relațiile (7.60) – (7.62) se constată că eroarea staționară se va anula pentru semnalul treaptă discretă într-o perioadă de eșantionare, pentru semnal rampă discretă eroarea se va anula în două perioade de eșantionare și pentru semnal parabolă discretă se anulează pe durata a trei

perioade de eșantionare.

Această condiție este posibilă numai dacă este asigurată condiția de realizabilitate fizică a algoritmului elaborat, fără a cere ca $F(z^{-1}) \neq 1$.

Dacă este construită f.d.t. discretă $H_0(z^{-1})$ a sistemului automat pentru semnalul de intrare specificat și este cunoscută f.d.t. discretă $H_P(z^{-1})$ a procesului, atunci se poate calcula f.d.t. discretă a algoritmului de reglare după relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{H_0(z^{-1})}{1 - H_0(z^{-1})} \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \quad (7.63)$$

Astfel, răspunsul sistemului automat numeric este minimal pentru referința considerată, iar performanțele sunt optime.

Pentru modele de procese asimptotic stabile (de fază minimă) se va obține un algoritm de reglare recurent cauzal de dimensiune minimă, dacă se compensează toate zerourile polinomului caracteristic al procesului.

Utilizarea modelelor de forma (7.60) – (7.62) pentru sinteza algoritmului numeric de reglare, având o formă minimă, poate conduce la algoritmi necauzali, la care valorile comenzii inițiale pot fi necontrolabile.

Deoarece algoritmul de reglare conține modelul invers al modelului procesului se cere precauție la compensarea singularităților instabile ale procesului.

Observație: În cadrul acestor metode valoarea erorii staționare este egală cu zero în momentele de eșantionare, dar între momentele de eșantionare eroarea nu trebuie să fie zero, deoarece ieșirea sistemului automat tinde de a intra într-un regim oscilatoriu în jurul valorii staționare.

Pentru acest caz modelul matematic discret al obiectului de reglare se aplica modelul discret al obiectului obținute pentru algoritmul normal sau algoritmul extins.

Exemplul 7.3. Se consideră modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s, $\tau = 1.0$ s.

Se cere să se elaboreze algoritmul timpului minimal.

Soluționare. 1. Modelul matematic discret aproximat poate fi utilizat de la cazul algoritmului normal sau de la algoritmul extins. Se utilizează modelul discret aproximat prin metoda trapezului de la algoritmul extins descris cu f.d.t:

$$\begin{aligned} H_P(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{a_0 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \\ &= \frac{0.0278z^{-1} + 0.0833z^{-2} + 0.0833z^{-3} + 0.0278z^{-4}}{1 - 1.2222z^{-1} + 0.2222z^{-2}}. \end{aligned}$$

2. Se construiește funcția de transfer discretă $H_0(z)$ a sistemului închis de forma (7.60) când la intrare se aplică semnal treaptă unitară discretă:

$$H_0(z) = z^{-2}.$$

3. Se construiește algoritmul timpului minim fiind cunoscute f.d.t. $H_P(z)$ a procesului (1) și f.d.t. $H_0(z)$ a sistemului închis (2) după relația (7.63):

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= \frac{H_0(z^{-1})}{1 - H_0(z^{-1})} \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})}{1 - H_0(z^{-1})} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} \frac{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3})} = \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} \frac{1 - 1.2222z^{-1} + 0.2222z^{-2}}{z^{-1}(0.0278 + 0.0833z^{-1} + 0.0833z^{-2} + 0.0278z^{-3})} = \\ &= \frac{z^{-1} - 1.2222z^{-2} + 0.2222z^{-3}}{0.0278 + 0.0833z^{-1} + 0.0555z^{-2} - 0.0555z^{-3} - 0.0833z^{-4} - 0.0278z^{-5}} = \\ &= \frac{q_1 z^{-1} - q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3}}{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3} - p_4 z^{-4} - p_5 z^{-5}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}, \end{aligned}$$

unde parametrii algoritmului au valorile numerice $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.2222$, $q_3 = 0.2222$, $p_0 = 0.0278$, $p_1 = 0.0833$, $p_2 = 0.0555$, $p_3 = 0.0555$, $p_4 = 0.0833$, $p_5 = 0.0278$.

4. Mărima comenzii din (3) se prezintă în forma operațională: și în domeniul timpului discret:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$\begin{aligned} u(z^{-1})(p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3} - p_4 z^{-4} - p_5 z^{-5}) &= \\ = \varepsilon(z^{-1})(q_1 z^{-1} - q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3}), \end{aligned}$$

$$p_0 u(z^{-1}) + p_1 z^{-1} u(z^{-1}) + p_2 z^{-2} u(z^{-1}) - p_3 z^{-3} u(z^{-1}) - p_4 z^{-4} u(z^{-1}) -$$

$$-p_5 z^{-5} u(z^{-1}) = q_1 z^{-1} \varepsilon(z^{-1}) - q_2 z^{-2} \varepsilon(z^{-1}) + q_3 z^{-3} \varepsilon(z^{-1}).$$

Mărimea comenzii din (3) se prezintă în domeniul timpului discret cu coeficienții calculați:

$$p_0 u(kT) = -p_1 u((k-1)T) - p_2 z^{-2} u((k-2)T) + p_3 u((k-3)T) + \\ + p_4 z^{-4} u((k-4)T) + p_5 u((k-5)T) + q_1 \varepsilon((k-1)T) - \\ - q_2 \varepsilon((k-2)T) + q_3 \varepsilon((k-3)T),$$

$$0.0278 u(kT) = -0.0833 u((k-1)T) - 0.0555 u((k-2)T) + \\ + 0.0555 u((k-3)T) + 0.0278 u((k-4)T) + 0.0278 u((k-5)T) + \\ + \varepsilon((k-1)T) - 1.2222 \varepsilon((k-2)T) + 0.2222 \varepsilon((k-3)T),$$

$$u(kT) = -2.9964 u((k-1)T) - 1.9964 u((k-2)T) + \\ + 1.9964 u((k-3)T) + u((k-4)T) + u((k-5)T) + \\ + \varepsilon((k-1)T) - 1.2222 \varepsilon((k-2)T) + 0.2222 \varepsilon((k-3)T). \blacksquare$$

Exemplul 7.4. Se consideră un motor de curent continuu, a cărui schemă este dată în fig. 7.2. Se face abstracție de fenomenele electrice și electromecanice ale motorului și modelul matematic al transferului tensiune – unghiul axului se prezintă prun constanta de timp mecanică [13]:

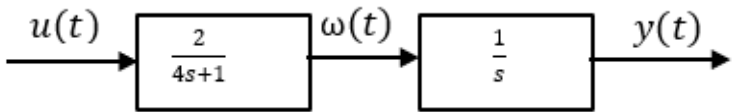


Fig. 7.2. Modelul matematic al motorului c.c.

Parametrii motorului: coeficientul de transfer $k = 2$, $T = 4$ s.

Funcția de transfer a motorului ca obiect de reglare :

$$H_P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s(4s+1)}.$$

Se cere:

1. Să se calculeze algoritmul de reglare normal pentru modelul dat al motorului c.c.
2. Să se determine algoritmul de reglare extins pentru valoarea inițială a comenzii $u(0) = 4$.
3. Să se calculeze algoritmul de reglare care să asigure răspunsul minimal la semnal de referință treaptă unitară.

Rezolvare.

- 1.1. Se alege perioada de eșantionare din condiția (7.46):

$$\frac{T}{T_{\Sigma}} \geq 0.36, \text{ rezultă } T = 0.36T_{\Sigma} = 0.36 \cdot 4 = 1.44 \approx 2 \text{ s.}$$

- 1.2. Se determină modelul discret al părții fixate aplicând metoda de discretizare a dreptunghiului în avans cu perioada calculată:

$$y(s)(4s^2 + s) = 2u(s),$$

$$4s^2y(s) + sy(s) = 2u(s),$$

$$4 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = 2u(t),$$

$$4 \frac{\Delta^2y(k)}{T^2} + \frac{\Delta y(k)}{T} = 2u(k),$$

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) + \frac{1}{2}[y(k+1) - y(k)] = 2u(k),$$

$$y(k+2) - 1.5y(k+1) + 0.5y(k) = 2u(k).$$

Acestei ecuații îi corespunde expresia operațională:

$$y(z)(z^2 - 1.5z + 0.5) = 2u(z),$$

$$y(z^{-1})(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) = 2z^{-2}u(z),$$

iar f.d.t. se prezintă în forma:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{2z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

cu parametrii: $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $a_1 = -1.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 2$.

- 1.3. Se calculează valoarea inițială a mării de comandă $u(0) = q_0$ după

relația (7.27) :

$$q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2} = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

1.4. Se calculează parametrii algoritmului normal după relațiile (7.25):

$$q_1 = q_0 a_1 = 0.5 \cdot (-1.5) = -0.75, \quad q_2 = q_0 a_2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25,$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 0.5 \cdot 0 = 0, \quad p_2 = q_0 b_2 = 0.5 \cdot 2 = 1.$$

1.5. Se prezintă f.d.t. a algoritmului normal:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_2 z^{-2}} = \frac{0.5 - 0.75 z^{-1} + 0.25 z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

și este fizic realizabil deoarece are gradul egal cu a părții fixate $m = 2$.

2.1. Pentru algoritmul exins perioada de eșantionare se calculează cu relația (7.47):

$$T = 0.22T_Z = 0.22 \cdot 4 = 0.88 \text{ s. Alegem perioada } T = 2 \text{ s.}$$

În acest caz parametrii părții fixate sunt cei calculați mai sus:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 2, \quad a_1 = -1.5, \quad a_2 = 0.5, \quad m = 2,$$

iar f.d.t. discretă a părții fixate are forma:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{2z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}.$$

2.2. Se calculează valoarea inițială a mărimii de comandă $u(0) = q_0 = 4$ și se verifică condiția $u(0) \geq u(1)$ sau condiția dată de relația:

$$q_0 \geq \frac{1}{1 - a_1} \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j} = \frac{1}{1 + 1.5} \frac{1}{2} = 0.2,$$

care este asigurată.

2.3. Se calculează parametrii algoritmului extins după relațiile (7.41):

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) = 4(-1.5 - 1) = 4 \cdot (-2.5) = -10,$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=1}^m b_j} = 4(0.5 + 1.5) - \frac{1.5}{2} = 4 \cdot 2 - 0.75 = 7.25,$$

$$q_3 = -a_2 \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j} \right) = -0.5 \left(4 - \frac{1}{2} \right) = -0.5 \cdot 3.75 = -1.75,$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 0.5 \cdot 0 = 0,$$

$$p_2 = q_0 (b_2 - b_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=1}^m b_j} = 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} = 8.5,$$

$$p_3 = -b_2 \left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m b_j} \right) = -2 \left(4 - \frac{1}{2} \right) = -7.0.$$

2.4. Se construiește f.d.t. discretă a algoritmului extins:

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3}}{1 - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}} = \\ &= \frac{4 - 10z^{-1} + 7.25z^{-2} - 1.75z^{-3}}{1 - 8.5z^{-2} + 7z^{-3}}. \end{aligned}$$

3.1 Se consideră modelul părții fixate de la punctul unu, care are excesul de poli – zerouri $(p - z)_{H_P} = 2$.

Răspunsul minimal pentru un semnal treaptă este asigurat de un model de f.d.t. $H_0(z^{-1}) = z^{-1}$, dar care nu asigură realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare și atunci se alege f.d.t. de forma $H_0(z^{-1}) = z^{-2}$, care asigură condiția de realizabilitate fizică a algoritmului proiectat.

3.2. Se construiește algoritmul de reglare minimal după relația (7.57):

$$\begin{aligned} H_R(z^{-1}) &= \frac{H_0(z^{-1})}{1 - H_0(z^{-1})} \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} \frac{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{2z^{-2}} = \\ &= \frac{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{2(1 - z^{-2})} = \frac{0.5 - 0.75z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - z^{-2}}, \end{aligned}$$

unde parametrii de acord ai algoritmului răspunsului timpului minim de reglare elaborat au valorile $q_0 = 0.5$, $q_1 = 0.75$, $q_2 = 0.25$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.

Deoarece condiția de realizabilitate fizică a algoritmului este îndeplinită, rezultă că eroarea se va anula după două perioade de eșantionare, iar utilizând expresia (7.57) rezultă pentru polinomul $F(z^{-1})$ o expresie diferită de 1: $F(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$, care confirmă alegerea corectă a f.d.t. a sistemului numreic închis:

$$\begin{aligned} H_0(z^{-1}) &= 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) = \\ &= 1 - 1 + z^{-2} = z^{-2}. \blacksquare \end{aligned}$$

8 PROIECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE REGLARE PENTRU PROCESE MULTIVARIABILE

8.1 Modele matematice ale proceselor multivariabile

Procesele tehnologice complexe se caracterizează prin două sau mai multe variabile de intrare și ieșire se numesc procese multivariabile și rezultă necesitatea de reglare a mai multor variabile.

În corespundere cu dimensiunea procesului (fig. 8.1) se utilizează un număr adecvat de traductoare și elemente de execuție pentru fiecare canal a mărimilor reglate. Schema structurală a unui sistem automat multivariabil se dă în fig. 8.2. În schemă sunt însemnările: u_1, \dots, u_m mărimile de intrare, EE – elemente de execuție, v_1, \dots, v_m – vectorul mărimii de reglare a procesului, z - vectorul ieșirii procesului P-obiectivul conducerii, T – traductoare, y_1, \dots, y_n - mărimile măsurate ale procesului, p_1, \dots, p_r - vectorul perturbațiilor.

Transferul intrare-ieșire dintre mărimea de ieșire $y(t)$ este funcție de vectorii intrărilor $u(t)$ și $p(t)$:

$$y(t) = f(u(t), p(t)). \quad (8.1)$$

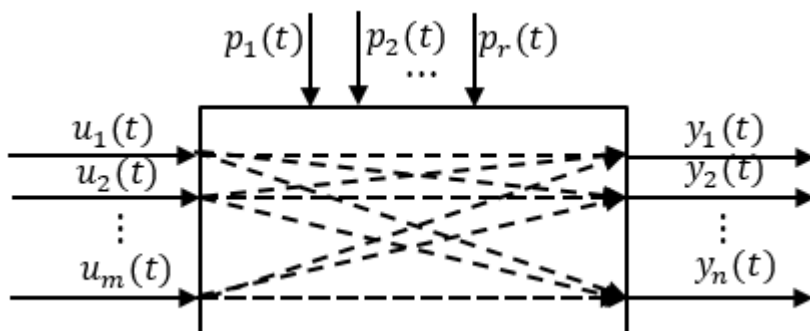


Fig. 8.1. Proces multivariabil

Conducerea unui proces multivariabil se efectuează pe baza unui

sau în forma vector matricială:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{u}(z), \quad (8.3)$$

unde $\mathbf{y}(z) = [y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)]^T$, $\mathbf{u}(z) = [u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z)]^T$, iar $\mathbf{H}_{PF}(z)$ este matricea de transfer a procesului de forma:

$$\mathbf{H}_{PF}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \dots & H_{1m}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \dots & H_{2m}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(z) & H_{n2}(z) & \dots & H_{nm}(z) \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

8.2 Algoritmi de reglare a proceselor multivariabile

Reglarea proceselor multivariabile la acțiunea semnalelor de referință \mathbf{u} și a perturbațiilor \mathbf{p} se realizează cu algoritmi de reglare sau regulatoare multivariabile (RMV). Regulatele pot fi plasate pe calea directă (fig. 8.3, a) sau pe calea de reacție (fig. 8.3, b) a sistemului multivariabil.

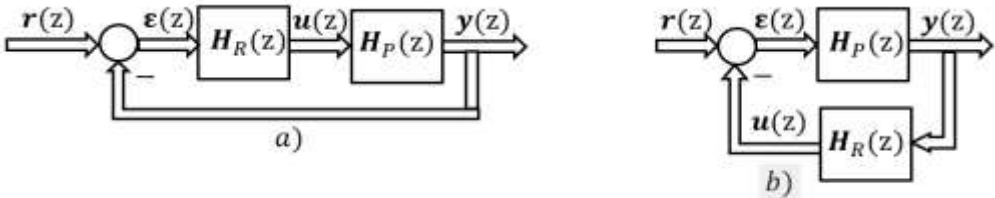


Fig. 8.3. Structuri de sisteme multivariabile

Regulatele RMV au rolul de a asigura atât performanțele impuse pentru fiecare canal de legătură directă intrare-ieșire, cât și de a compensa efectul perturbațiilor și al interacțiunilor existente între diferite variabile pe diferite canale intrare-ieșire și perturbație-ieșire.

Datorită complexității sistemelor multivariabile, proiectarea acestora prezintă particularități specifice în raport cu sistemele monovariabile.

Astfel, necesitatea compensării interacțiunilor dintre canale impune utilizarea reguletoarelor multivariabile, deoarece folosirea reguletoarelor monovariabile destinate conducerii fiecărei mărimi de ieșire y_i , numai în baza legăturilor principale intrare-ieșire, care prezintă o soluție ușor de implementat, conduce la obținerea unor performanțe nesatisfăcătoare.

Pentru a ilustra cele două posibilități de utilizare a reguletoarelor monovariabile și multivariabile se consideră un proces cu două intrări și două ieșiri. Acest tip de proces poate fi prezentat prin forme canonice P și V și prezentate în fig. 8.4.

Din fig. 8.4, a) rezultă relațiile intrare-ieșire care descriu aceste forme canonice. Pentru forma canonică P procesul se descrie cu matricea de transfer de forma:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

iar mărimea de ieșire se exprimă prin forma:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{u}(z), \quad (8.6)$$

unde

$$\mathbf{y}(z) = [y_1(z), y_2(z)]^T, \quad \mathbf{u}(z) = [u_1(z), u_2(z)]^T. \quad (8.7)$$

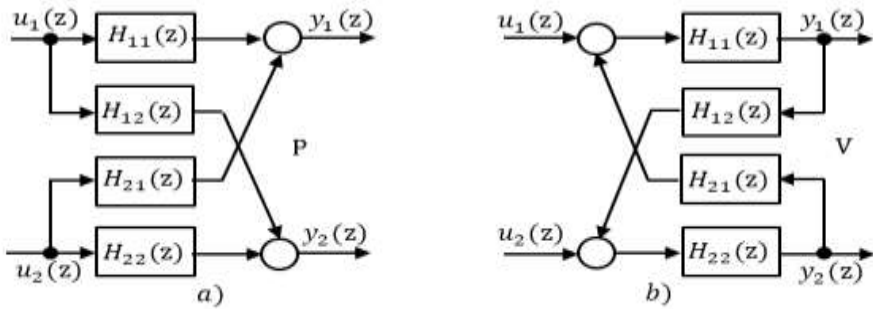


Fig. 8.4. Structuri de procese multivariabile

Pentru forma canonică V (fig. 8.4, b) a procesului obține descrierea în forma:

$$\begin{vmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{vmatrix}. \quad (8.8)$$

Se introduc notațiile în (8.8):

$$\mathbf{H}_k(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_h(z) = \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & 0 \end{vmatrix}, \quad (8.9)$$

unde $\mathbf{H}_k(z)$ este matricea diagonală alcătuită din f.d.t. care descriu canalele directe principale, iar $\mathbf{H}_h(z)$ prezintă matricea diagonală formată cu f.d.t. de pe canalele de interacțiune.

Relația (8.8) cu notațiile (8.9) se prezintă în forma:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}_k(z)\mathbf{u}(z) + \mathbf{H}_k(z)\mathbf{H}_h(z)\mathbf{y}(z) \quad (8.10)$$

sau după unele transformări se obține:

$$\mathbf{y}(z)[\mathbf{I} - \mathbf{H}_k(z)\mathbf{H}_h(z)] = \mathbf{H}_k(z)\mathbf{u}(z),$$

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{H}_k(z)\mathbf{H}_h(z)]^{-1}\mathbf{H}_k(z)\mathbf{u}(z).$$

(8.11)

Deoarece în structura canonică P a procesului intrările acționează asupra tuturor ieșirilor prin f.d.t. $H_{ii}(z)$ și $H_{ij}(z)$, rezultă că această structură de model poate fi folosită și pentru prezentarea proceselor multivariabile cu dimensiunea $m \neq n$. Însă, forma canonică V se poate utiliza pentru descrierea proceselor multivariabile numai de dimensiunea $m = n$.

Pentru un proces cu două intrări și două ieșiri forma canonică P, structurile sistemelor de conducere cu reglatoarele monovariabile și reglatoarele multivariabile se dau în fig. 8.5.

Structura regulatorului multivariabil conține patru componente cu f.d.t.: primele f.d.t. $H_{R11}(z)$ și $H_{R22}(z)$ numite reglatoarele principale, care reglează mărimile respective de ieșire și alte două f.d.t. $H_{R12}(z)$ și $H_{R21}(z)$ numite reglatoarele de decuplare, care prin acțiunea lor compensează acțiunile existente (interacțiunile) între cele două canale.

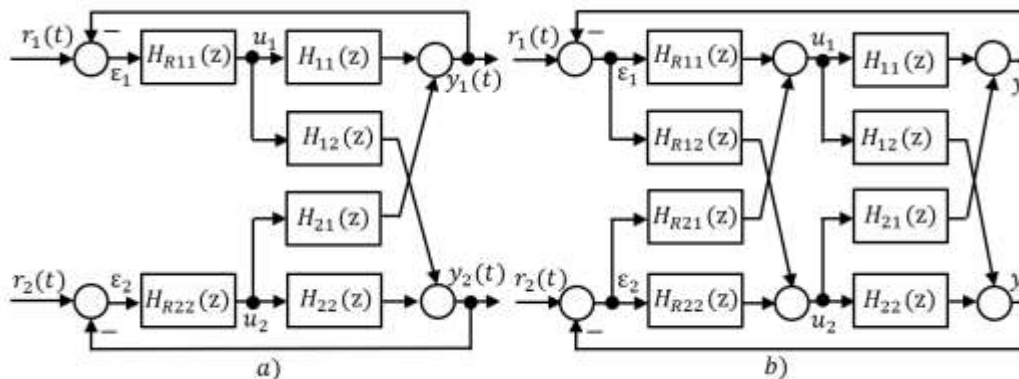


Fig. 8.5. Structuri de SMV cu reglatoarele mono- și multivariabile

Numărul de blocuri de reglare din structura regulatorului multivariabil este funcție de dimensiunea procesului analizat.

Intensitatea interacțiunilor din structura părții fixate impune adoptarea structurii de reglare cu regulatoare monovariabile sau multivariabile. Din aceste considerente este necesar de a cunoaște modelul matematic al părții fixate cu interacțiunile dintre canale.

În cazul utilizării regulatorului multivariabil pentru procesul multivariabil, aceasta conduce la compensarea interacțiunilor dintre canale și se obține o decuplare completă între intrările și ieșirile sistemului multivariabil și fiecare mărime reglată este influențată numai de mărimea de referință a canalului respectiv. Aceste tipuri de sisteme multivariabile se numesc *decuplate* sau *autonome*.

În cazul când regulatorul multivariabil nu asigură decuplarea totală a interacțiunilor, atunci rămân anumite interacțiuni între mărimi de referință și mărimi reglate din canale diferite și sistemul multivariabil este *nedecuplat* sau *neautonom*.

8.3 Acordarea optimă a regulatorilor monovariabile pentru procese multivariabile

Dacă structura regulatorului este cunoscută, atunci acordarea optimă a parametrilor se face utilizând criteriile de optimizare sau regulile de acordare.

Se consideră un proces cu două intrări și două ieșiri, care au o largă utilizare în practică și pentru care se prezintă proceduri (reguli) de acordare a regulatorilor monovariabile tipizate folosite pentru conducerea lor.

Se presupune structura obiectului multivariabil de forma canonică P cu regulatoare monovariabile grupate în matricea de transfer de forma:

$$(8.12) \quad \mathbf{H}_R(z) = \begin{vmatrix} H_{R11}(z) & 0 \\ 0 & H_{R22}(z) \end{vmatrix},$$

atunci vectorul mărimii de ieșire se exprimă în forma:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)\boldsymbol{\varepsilon}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)]^{-1}\mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{r}(z). \quad (8.13)$$

Din expresia (8.13) se obține ecuația caracteristică a sistemului multivariabil:

$$\mathbf{A}(z) = \det[\mathbf{I} + \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)] = 0, \quad (8.14)$$

care se prezintă în forma:

$$\det \begin{bmatrix} 1 + H_{R11}(z)H_{11}(z) & H_{R22}(z)H_{21}(z) \\ H_{R11}(z)H_{12}(z) & 1 + H_{R22}(z)H_{22}(z) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.15)$$

sau se deschide determinantul în forma:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)) - H_{R11}(z)H_{12}(z)H_{R22}(z)H_{21}(z) = 0. \quad (8.16)$$

Termenul al doilea din expresia (8.16) exprimă interacțiunea dintre cele două bucle de reglare monovariabile date de f.d.t. $H_{12}(z)$ și $H_{21}(z)$ din matricea de transfer a procesului.

Expresia (8.16) se aduce la forma:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)) \left[1 - \frac{H_{R11}(z)H_{12}(z)}{(1+H_{R11}(z)H_{11}(z))} \frac{H_{R22}(z)H_{21}(z)}{(1+H_{R22}(z)H_{22}(z))} \right] = 0. \quad (8.17)$$

În expresia (8.17) al doilea termen din paranteza pătrată se înmulțește și se împarte la termenul $H_{11}(z)H_{22}(z)$ și se prezintă în forma:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z))(1 - k(z)H_{01}(z)H_{02}(z)) = 0, \quad (8.18)$$

unde

$$k(z) = \frac{H_{12}(z)H_{21}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)}, \quad (8.19)$$

care este numit coeficientul dinamic de cuplare și are o influență asupra valorilor proprii ale întregului sistem, iar $H_{01}(z)$ și $H_{02}(z)$ sunt f.d.t. ale buclelor de reglare monovariabile:

$$H_{0i}(z) = \frac{H_{Rii}(z)H_{ii}(z)}{1 + H_{Rii}(z)H_{ii}(z)}, \quad i = 1, 2. \quad (8.20)$$

Împărțind expresia (8.16) la termenul $(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z))$ și respectiv la termenul $(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))$ se obține sistemul:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))(1 - k(z)H_{02}(z)) = 0, \quad (8.21)$$

$$(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z))(1 - k(z)H_{01}(z)) = 0. \quad (8.22)$$

Analiza relațiilor (8.21) și (8.22) evidențiază că interacțiunile din proces modifică f.d.t. a părții fixe pentru fiecare canal principal. Astfel, se constată că f.d.t. $H_{11}(z)$ a canalului unu se modifică conform (8.20):

$$H_{11}(z)(1 - k(z)H_{02}(z)) = H_{11}(z) - H_{12}(z) \frac{H_{R22}(z)}{1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)} H_{21}(z), \quad (8.23)$$

iar f.d.t. $H_{22}(z)$ a canalului doi se modifică conform (8.22):

$$H_{22}(z)(1 - k(z)H_{01}(z)) = H_{22}(z) - H_{12}(z) \frac{H_{R11}(z)}{1 + H_{R11}(z)H_{11}(z)} H_{21}(z). \quad (8.24)$$

Relațiile (8.23) și (8.24) se prezintă prin structurile de reglare pentru canalul unu în fig. 8.6, *a*, iar pentru canalul doi în fig. 8.6, *b*.

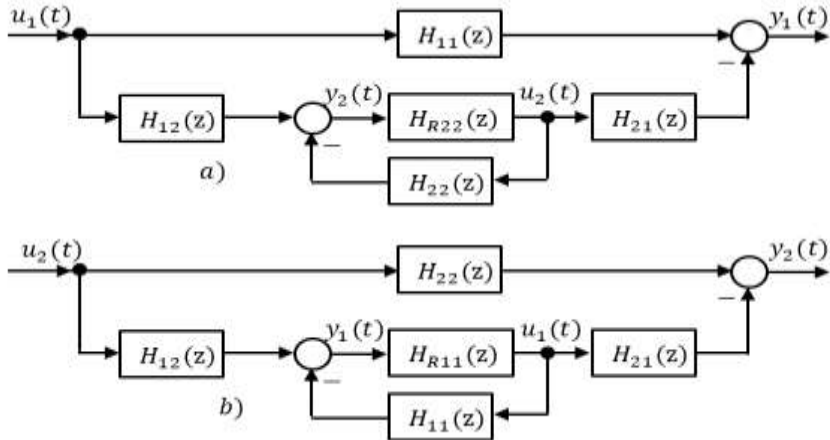


Fig. 8.6. Structurile de reglare monovariabile a canalelor unu *a*) și doi *b*)

În regimul staționar al sistemului interacțiunile se determină de coeficientul de transfer static de cuplare:

$$k_0 = \lim_{z \rightarrow 1} k(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{H_{12}(z)H_{21}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)} = \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}}, \quad (8.25)$$

unde k_{ij} prezintă factorul de amplificare static al f.d.t. $H_{ij}(z)$, $i, j = 1, 2$.

Se utilizează abaterea factorului de amplificare impus de interacțiunile dintre canale dat de relația:

$$\delta_{ii} = 1 - k_0 H_{0j}(1), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (8.26)$$

Reprezentarea abaterii factorului de amplificare δ_{ii} în funcție de factorul static de cuplare k_0 (fig. 8.7) împarte procesele în două categorii:

1. Procese cuplate pozitiv atunci când $k_0 > 0$.
2. Procese cuplate negativ atunci când $k_0 < 0$.

Alt tip de cuplare a proceselor se prezintă în raport cu f.d.t. $H_{ii}(z)$ principale și f.d.t. $H_{ij}(z)$ de cuplare a părții fixate. Procesele pot fi simetrice când f.d.t. principale și de cuplare sunt identice:

$$H_{11}(z) = H_{22}(z), H_{12}(z) = H_{21}(z). \quad (8.27)$$

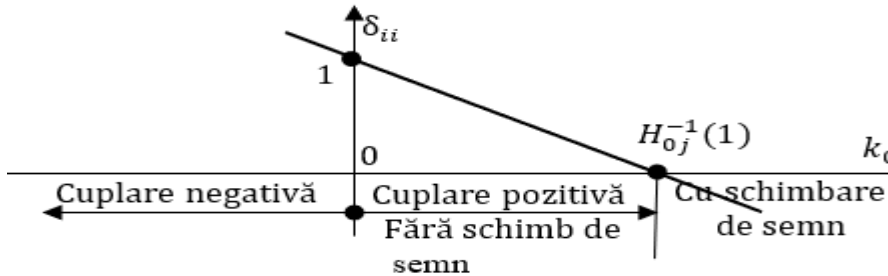


Fig. 8.7. Reprezentarea abaterii factorului de amplificare $\delta_{ii} = f(k_0)$

și nesimetrice:

$$H_{11}(z) \neq H_{22}(z), \quad H_{12}(z) \neq H_{21}(z). \quad (8.28)$$

În funcție de tipul cuplării și categoria proceselor s-au dezvoltat reguli de acordare a parametrilor reguletoarelor monovariabile. Există metoda bazată pe atingerea limitei de stabilitate al sistemului (regimul critic) pentru acordarea celor două reguletoare monovariabile de tip PID. Procedura de acordare se bazează pe domeniile de stabilitate prezentate în fig. 8.8, care s-au obținut prin reglarea procesului cu reguletoare proporționale utilizând semnale continue.

Procedura se poate extinde și la sistemul discret, dacă se folosesc perioade de eșantionare suficient de mici ca funcționarea sistemului multivariabil să fie cuazicontinuă.

Calculul parametrilor de acord ai reguletoarelor prin această metodă se realizează în două etape.

1. Se determină limitele de stabilitate pentru cele două bucle de reglare monovariabile utilizând reguletoare proporționale cu parametrii k_{R11} și k_{R22} parcurgând pașii:

1.1. Se fixează $k_{R22} = 0$ și se crește k_{R11} până la valoarea lui k_{R110} pentru care se atinge limita de stabilitate (fig. 8.8, punctul A).

1.2. Se fixează $k_{R11} = 0$ și se crește k_{R22} până la valoarea lui k_{R220} pentru care se atinge limita de stabilitate (fig. 8.8, punctul B).

1.3. Se fixează $k_{R11} = k_{R110}$ și se crește k_{R22} până la o valoare pentru care se obțin noi oscilații cu amplitudinea constantă (fig. 8.8, numai în cazurile *a*) și *b*) punctul C).

1.4. Dacă nu apar punctele intermediare C la pasul 1.3, atunci se crește k_{R22} pentru $k_{R11} = k_{R110}/2$ și se obțin punctele *C'* (fig. 8.7, cazurile *c*) și *d*)).

1.5. Se fixează $k_{R22} = k_{R220}$ și se crește k_{R11} până se obțin noi oscilații cu amplitudinea constantă (fig. 8.8, cazul *a*) punctul D).

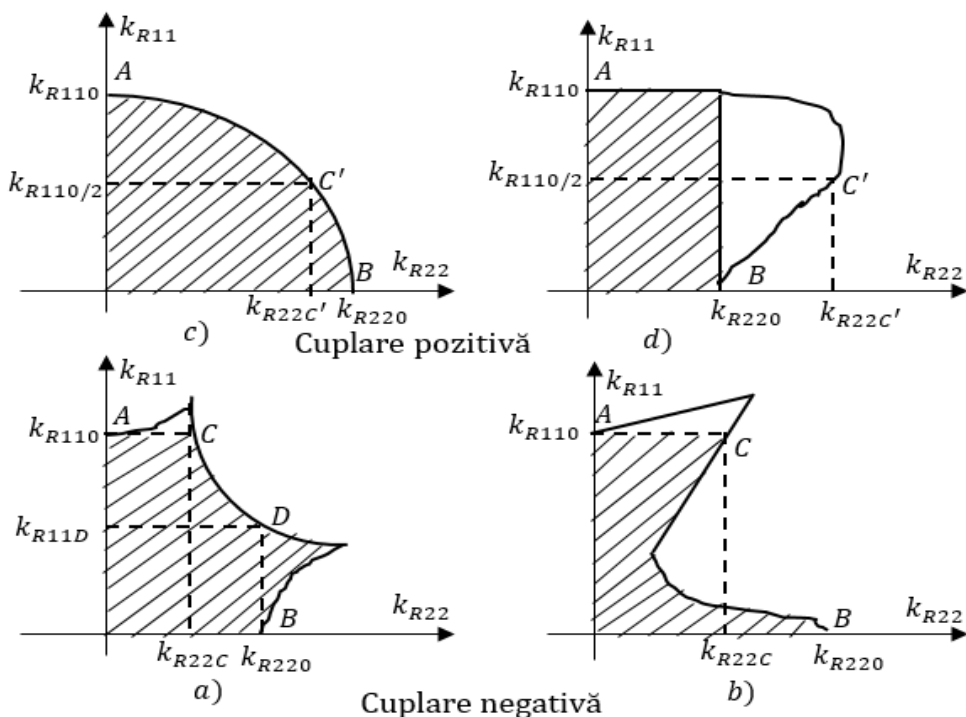


Fig. 8.8. Domeniile de stabilitate ale sistemului multivariabil:

a, c – procese simetrice, *b, d* – procese nesimetrice

2. Se determină valorile optime ale parametrilor de acord k_R , T_I , T_D astfel ca:

2.1. Pentru regulatoarele P se recomandă, dacă performanțele buclei unu sunt mai importante, următoarele reguli:

$$k_{R11} = 0.5k_{R110}, k_{R22} = 0.5k_{R110};$$

dacă bucla doi este mai importantă atunci:

$$k_{R11} = 0.5k_{R11D}, k_{R22} = 0.5k_{R110}.$$

2.2. Pentru regulatoarele PI valorile parametrilor de acord se calculează în funcție de importanța celor două bucle:

Bucla unu mai importantă

Bucla doi mai importantă

$$k_{R11} = 0.5k_{R110}, \quad k_{R22} = 0.5k_{R22C}, \quad k_{R11} = 0.5k_{R11D}, \\ k_{R22} = 0.5k_{R220},$$

$$T_{Iii} = (0.8 \dots 1.2)T_{0C}, \quad i = 1, 2, \quad T_{Iii} = 0.85T_{0ii}, \quad i = 1, 2,$$

unde T_{0C} și T_{0ii} sunt perioadele oscilațiilor obținute în punctele C și respectiv A pentru $i = 1$ sau B pentru $i = 2$.

2.3. Pentru regulatoarele PID se recomandă calculele valorilor parametrilor de acord după expresiile:

$$k_{Rii} = 1.25k_{R110(P)},$$

$$T_{Iii} = 0.5T_{Iii(PI)},$$

$$T_{Dii} = 0.25T_{Iii(PI)}, \quad i = 1, 2.$$

Valorile care se obțin prin aplicarea acestor reguli pot fi utilizate și în cazul discret folosind expresiile parametrilor discreți q_0, q_1, q_2 în funcție de parametrii continui k_R, T_I, T_D și perioada de eșantionare T :

$$q_0 = k_R \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_D}{T}\right), \quad q_1 = -k_R \left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right), \quad q_2 = k_R \frac{T_D}{T}.$$

8.4 Conducerea noninteractivă a proceselor multivariabile

8.4.1 Structuri noninteractive de sisteme multivariabile

Utilizarea sistemelor automate cu regulatoare monovariabile pentru conducerea proceselor multivariabile cu interacțiuni strânse între canale conduce la performanțe nesatisfăcătoare. Pentru a obține performanțe ridicate la conducerea cu astfel de procese se utilizează reglarea noninteractivă cu decuplarea canalelor în sistemul multivariabil.

Se consideră un sistem multivariabil cu dimensiunile variabilelor:

$$\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{p} \quad (8.29)$$

descrie prin expresia mărimii de ieșire în formă operațională:

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)]^{-1}\mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{r}(z) + [\mathbf{I} + \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z)]^{-1}\mathbf{H}_P(z)\mathbf{p}(z) \quad (8.30)$$

sau în forma vector matriceală:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}_0(z)\mathbf{r}(z) + \mathbf{H}_{0p}(z)\mathbf{p}(z), \quad (8.31)$$

unde $\mathbf{H}_0(z)$ este matricea de transfer a sistemului multivariabil închis în raport cu semnalul de referință $\mathbf{r}(z)$, iar $\mathbf{H}_{0p}(z)$ este matricea de transfer a sistemului multivariabil închis în raport cu semnalul perturbației $\mathbf{p}(z)$.

Schema structurală a sistemului multivariabil se dă în fig. 8.9.

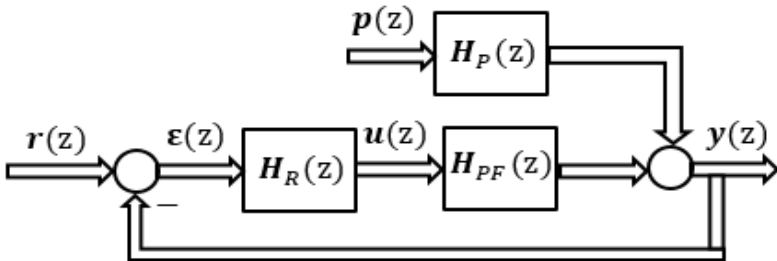


Fig. 8.9. Schema structurală a sistemului multivariabil

Pentru structura sistemului multivariabil din fig. 8.9 se utilizează trei tipuri de reglări noninteractive care realizează următoarele decuplări:

1. Decuplarea sistemului deschis cu matricea de transfer în circuit deschis:

$$\mathbf{H}_d(z) = \mathbf{H}_R(z)\mathbf{H}_{PF}(z), \quad (8.32)$$

care va fi o matrice diagonală.

2. Decuplarea în raport cu mărimile de referință cu matricea de transfer în circuit închis $\mathbf{H}_0(z)$ care se cere să fie diagonală.

3. Decuplarea în raport cu perturbațiile cu matricea de transfer $\mathbf{H}_{0p}(z)$ care se cere să fie diagonală.

Matricele diagonale se aleg în funcție de performanțele dorite, reieșind din condițiile de realizabilitate fizică a sistemului.

Proiectarea unui sistem multivariabil decuplat în raport cu perturbațiile $\mathbf{p}(z)$ este dificilă deoarece matricea $\mathbf{H}_p(z)$ nu se cunoaște cu precizie. Menționăm că este dificil de realizat decuplarea simultană în raport cu semnalele de referință $\mathbf{r}(z)$ și perturbațiile $\mathbf{p}(z)$.

În continuare, se vor studia sistemele multivariabile care realizează decuplările de tipul unu și doi.

8.4.2 Decuplarea sistemului multivariabil deschis

Cea mai largă aplicată decuplare în sistemele multivariabile este decuplarea în buclă deschisă care asigură o reglare noninteractivă în raport cu referințele.

Astfel, din expresia (8.32) se calculează matricea de transfer a algoritmului de reglare în forma:

$$\mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_{pF}(z)^{-1} \mathbf{H}_d(z) = \frac{\text{agj} \mathbf{H}_{pF}(z)}{\det \mathbf{H}_{pF}(z)} \mathbf{H}_d(z). \quad (8.33)$$

Matricea de transfer $\mathbf{H}_d(z)$ se construiește în formă diagonală:

$$\mathbf{H}_d(z) = \begin{vmatrix} H_{d11}(z) & 0 \\ 0 & H_{d22}(z) \end{vmatrix}, \quad (8.34)$$

unde $H_{d11}(z)$ și $H_{d22}(z)$ sunt f.d.t. ale buclelor monovariabile obținute în rezultatul decuplării.

În cazul când structura procesului multivariabil este de forma canonică P cu regulatoare multivariabile, atunci în rezultatul decuplării se obțin două sisteme de reglare automată monovariabile separate date în fig. 8.10. Pentru aceste două sisteme monovariabile deschise f.d.t. se prezintă în forma:

$$(8.35) \quad H_{d11}(z) = H_{R1}(z)H_{11}(z),$$

$$(8.36) \quad H_{d22}(z) = H_{R2}(z)H_{22}(z).$$

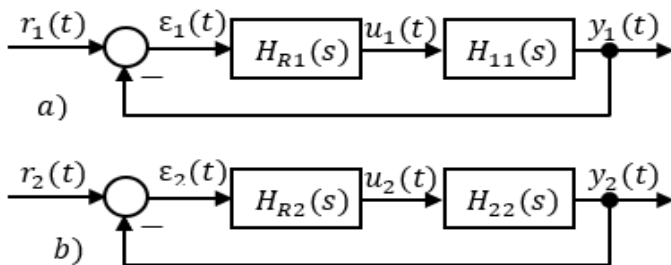


Fig. 8.10. Structurile sistemelor monovariabile

Algoritmii de reglare cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ și $H_{R2}(z)$ se calculează prin procedura de proiectare a celor două bucle monovariabile pe baza performanțelor impuse răspunsurilor $y_1(z)$ și $y_2(z)$ și de părțile fixate date de f.d.t. $H_{11}(z)$ și $H_{22}(z)$.

În acest caz matricea de transfer $\mathbf{H}_R(z)$ a regulatorului multivariabil din (8.33) are forma:

$$\mathbf{H}_R(z) = \frac{1}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)} \begin{bmatrix} H_{22}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z) & -H_{21}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z) \\ -H_{12}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z) & H_{11}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z) \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Din (8.37) se constată că regulatorul multivariabil are forma canonică P și atunci regulatoarele principale se descriu cu f.d.t. de forma:

$$H_{R11}(z) = \frac{H_{22}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)-H_{12}(z)H_{21}(z)}, \quad H_{R22}(z) = \frac{H_{11}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)-H_{12}(z)H_{21}(z)}, \quad (8.38)$$

iar regulatoarele de decuplare au f.d.t. de forma:

$$H_{R12}(z) = \frac{-H_{21}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)-H_{12}(z)H_{21}(z)}, \quad H_{R21}(z) = \frac{-H_{12}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)-H_{12}(z)H_{21}(z)}. \quad (8.39)$$

Relațiile (8.38) și (8.39) sunt dificile în utilizarea lor și în practica proiectării sistemelor această metodă se adoptă în funcție de forma canonică a procesului. Deci, pentru procese în forma canonică P se vor folosi regulatoare de decuplare în forma canonică V și, invers, iar regulatoarele principale vor fi cele proiectate prin buclele monovariabile cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ și $H_{R2}(z)$.

8.4.3 Structura de reglare noninteractivă pentru procese în forma canonică P cu regulatoare de decuplare în forma canonică V

Structura sistemului multivariabil pentru acest caz se prezintă în fig. 8.11.

Pentru structura sistemului se introduc însemnările pentru matricea de transfer $\mathbf{H}_{Rp}(z)$ a regulatoarelor principale și matricea de transfer $\mathbf{H}_{Rd}(z)$ a regulatoarelor de decuplare, care se prezintă prin f.d.t. a regulatoarelor din canale în forma:

$$\mathbf{H}_{Rp}(z) = \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_{Rd}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{H}_k(z)\mathbf{H}_h(z)^{-1}\mathbf{H}_k(z), \quad (8.40)$$

unde matricele au forma:

$$(8.41) \quad \mathbf{H}_k(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_h(z) = \begin{bmatrix} 0 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 0 \end{bmatrix}.$$

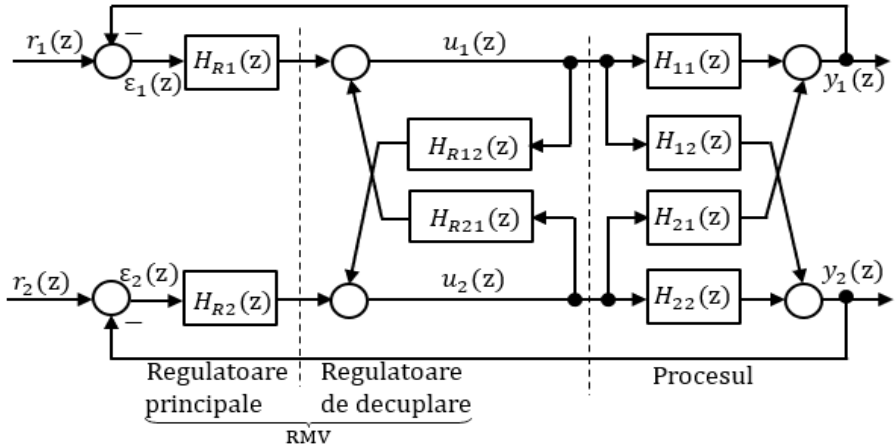


Fig. 8.11. Structura sistemului multivariabil

Matricea de transfer a regulatorului se prezintă în forma:

$$(8.42) \quad \mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_{Rd}(z)\mathbf{H}_{Rp}(z) = |\mathbf{I} - \mathbf{H}_h(z)|^{-1}\mathbf{H}_{Rp}(z).$$

Pentru calculul funcțiilor de transfer ale algoritmilor de reglare de decuplare se aplică relațiile (8.33) și (8.42) și se obține expresia:

$$(8.43) \quad |\mathbf{I} - \mathbf{H}_h(z)|^{-1}\mathbf{H}_{Rp}(z) = \mathbf{H}_{PF}(z)^{-1}\mathbf{H}_d(z).$$

Deoarece matricea de transfer a sistemului multivariabil deschis $\mathbf{H}_d(z)$ este diagonală de forma (8.34) cu funcțiile de transfer (8.35)–(8.36) proiectate cu blocurile monovariabile și atunci singura necunoscută este matricea de transfer $\mathbf{H}_h(z)$ alcătuită din expresiile f.d.t. ai algoritmilor de decuplare și care se calculează din expresia (8.43) având forma:

$$\mathbf{H}_h(z) = \mathbf{I} - \mathbf{H}_{Rp}(z)\mathbf{H}_d^{-1}(z)\mathbf{H}_{PF}(z) \quad (8.44)$$

sau cu f.d.t. în formă:

$$\begin{vmatrix} 0 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{H_{d11}(z)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_{d22}(z)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{11}(z) & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & H_{22}(z) \end{vmatrix}. \quad (8.45)$$

Efectuând calculele în expresia (8.45) se obțin funcțiile de transfer ai algoritmilor de decuplare a canalelor de forma:

$$H_{R12}(z) = -\frac{H_{12}(z)}{H_{22}(z)}, \quad H_{R21}(z) = -\frac{H_{21}(z)}{H_{11}(z)}. \quad (8.46)$$

Pentru acest caz reglarea noninteractivă a sistemului multivariabil este ușor de realizat, deoarece regulatoarele principale sunt cele proiectate pentru buclele monovariabile, iar regulatoarele de decuplare se calculează cu expresiile (8.46) și se verifică realizabilitatea fizică ale acestora care este funcție de excesul de poli-zero-uri al f.d.t. $H_{ij}(z)$ în raport cu f.d.t. $H_{ii}(z)$. Aceste tipuri de regulatoare de decuplare se prezintă ca regulatoare cu compensare.

8.4.4 Structura de reglare noninteractivă pentru procese în forma canonică V cu regulatoare de decuplare în forma canonică P

Se consideră structura sistemului multivariabil dată în fig. 8.12.

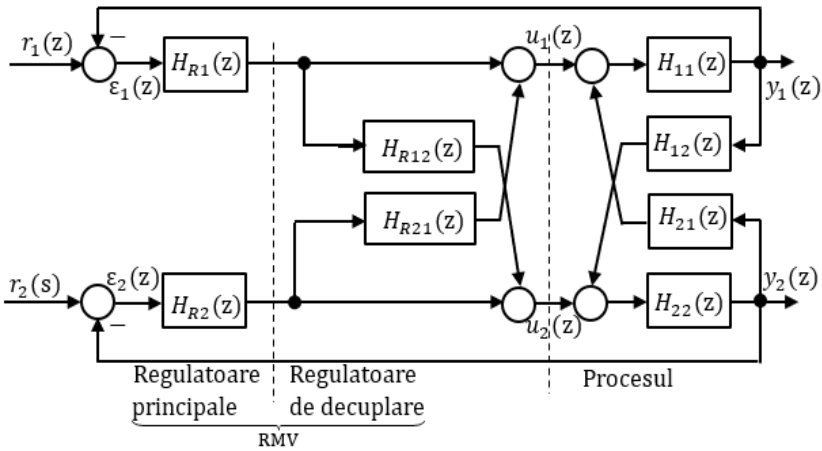


Fig. 8.12. Structura sistemului multivariabil

Regulatorul multivariabil este alcătuit din reglatoarele principale cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ și $H_{R2}(z)$ calculate pe baza buclor monovariabile în urma decuplării canalelor și din algoritmi de reglare de decuplare în forma canonică P. Matricea de transfer a regulatorului multivariabil se prezintă în forma:

$$\mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_{Rd}(z)\mathbf{H}_{Rp}(z) = \begin{vmatrix} 1 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix}. \quad (8.47)$$

Partea fixată de forma canonică V se descrie cu matricea de transfer de forma:

$$\mathbf{H}_{PF}(z) = |\mathbf{I} - \mathbf{H}_k(z)\mathbf{H}_h(z)|^{-1}\mathbf{H}_k(z), \quad (8.48)$$

unde matricele de transfer $\mathbf{H}_k(z)$ și $\mathbf{H}_h(z)$ se descriu:

$$(8.49) \quad \mathbf{H}_k(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_h(z) = \begin{vmatrix} 0 & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & 0 \end{vmatrix}.$$

Pentru calcularea funcțiilor de transfer ale regulatorului multivariabil se aplică relația (8.33) și se obține matricea:

$$(8.50) \quad \mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_k^{-1}(z) | \mathbf{I} - \mathbf{H}_k(z) \mathbf{H}_h(z) | \mathbf{H}_d(z)$$

sau prin funcțiile de transfer se prezintă în forma:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ H_{11}(z) & H_{22}(z) \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right. \\ & - \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix} \left. \begin{vmatrix} 0 & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & 0 \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} H_{d11}(z) & 0 \\ 0 & H_{d22}(z) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Calculând expresia (8.51) se obțin f.d.t. ale reguletoarelor de decuplare în forma:

$$(8.52) \quad H_{R12}(z) = -H_{11}(z)H_{12}(z), \quad H_{R21}(z) = -H_{22}(z)H_{21}(z).$$

Din analiza f.d.t. a reguletoarelor din expresia (8.52) se constată că algoritmi sunt fizic realizabili deoarece se obțin ca produsul a două funcții de transfer ale părții fixate.

Aceste rezultate pot fi extinse pentru procese multivariabile cu mai mult de două intrări și ieșiri.

8.4.5 Decuplarea sistemului multivariabil închis

Pentru proiectarea regulatorului multivariabil pentru decuplarea sistemului închis depinde de structura sistemului în funcție de cum este conectat regulatorul pe calea directă sau pe canalul de reacție. Pentru structura sistemului cu regulatorul pe canalul direct sau în reacție se construiește o matrice diagonală a sistemului multivariabil închis de forma:

$$(8.53) \quad \mathbf{H}_0(z) = \text{diag}[H_{011}(z), H_{022}(z), \dots, H_{0mm}(z)].$$

Funcțiile de transfer $H_{0ii}(z)$, $i = \overline{1, m}$ ale fiecărui canal principal se determină pe baza performanțelor impuse mărimilor reglate $y_i(z)$ $i = \overline{1, m}$ și a condițiilor de realizabilitate fizică.

8.4.6 Decuplarea sistemului multivariabil cu regulator pe calea directă

Pentru structura sistemului multivariabil cu regulatorul pe calea directă matricea de transfer a sistemului închis se prezintă în forma:

$$(8.54) \quad \mathbf{H}_0(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_d(z)]^{-1} \mathbf{H}_d(z),$$

unde $\mathbf{H}_d(z)$ este matricea de transfer a sistemului deschis și se prezintă în forma:

$$(8.55) \quad \mathbf{H}_d(z) = \mathbf{H}_R(z) \mathbf{H}_{PF}(z).$$

Din expresia (8.54) se calculează matricea de transfer $\mathbf{H}_d(z)$ a sistemului deschis în funcție de matricea de transfer $\mathbf{H}_0(z)$ a sistemului închis care are forma:

$$(8.56) \quad \mathbf{H}_d(z) = \mathbf{H}_0(z) [\mathbf{I} - \mathbf{H}_0(z)]^{-1}.$$

Substituind expresia (8.55) în expresia (8.56) și după unele transformări se obține matricea de transfer a regulatorului în forma:

$$\mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_{PF}^{-1}(z)\mathbf{H}_0(z)[\mathbf{I} - \mathbf{H}_0(z)]^{-1}, \quad (8.57)$$

care poate fi calculată numai dacă există inversele matricelor din expresia (8.57).

8.4.7 Decuplarea sistemului multivariabil cu regulator pe calea de reacție

Pentru structura sistemului multivariabil cu regulatorul pe calea de reacție matricea de transfer a sistemului închis se determină din condiția:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(z) &= \mathbf{H}_{PF}(z)\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \mathbf{H}_{PF}(z)(\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}_R(z)\mathbf{y}(z)) = \\ &= \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{H}_R(z)\mathbf{y}(z). \end{aligned} \quad (8.58)$$

După unele transformări în expresia (8.58) se obține relația:

$$\mathbf{y}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{H}_R(z)] = \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{r}(z), \quad (8.59)$$

de unde se determină matricea de transfer a sistemului închis:

$$\frac{\mathbf{y}(z)}{\mathbf{r}(z)} = \mathbf{H}_0(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_{PF}(z)\mathbf{H}_R(z)]^{-1}\mathbf{H}_{PF}(z). \quad (8.60)$$

Matricea de transfer a regulatorului se calculează din expresia (8.60) și după unele transformări se obține:

$$\mathbf{H}_R(z) = \mathbf{H}_0(z)^{-1} - \mathbf{H}_{PF}(z)^{-1}. \quad (8.61)$$

Procedura de proiectare a algoritmului de reglare constă din etapele:

1. Se dă matricea de transfer a părții fixate a procesului condus.
2. Se impun performanțele sistemului multivariabil pentru fiecare canal intrare–ieșire.
3. Se verifică dacă matricea de transfer $\mathbf{H}_{PF}(z)$ a părții fixate este nesingulară.
4. Se construiește f.d.t. $H_{0ii}(z)$ a canalelor în buclă închisă pe baza performanțelor impuse și se construiește matricea de transfer $\mathbf{H}_0(z)$ a sistemului multivariabil.
5. Se efectuează operația de inversare a matricelor de transfer $\mathbf{H}_0(z)$ a sistemului și $\mathbf{H}_{PF}(z)$ a părții fixate a procesului.
6. Se determină matricea de transfer $\mathbf{H}_R(z)$ a regulatorului cu relația (8.61).
7. Se verifică realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare proiectat.

Exemplul 8.1. Se consideră sistemul multivariabil de reglare a umidității și temperaturii în interiorul unei încăperi climatizată [AA]. Se dă o încăpere climatizată în care este necesar de creat un climat artificial prin utilizarea unui element electric R_f de încălzire alimentat cu tensiunea $u(t)$ și a aburului pentru a crește umiditatea aerului rece. Schema bloc funcțională a procesului se prezintă în fig. 8.13. Mărimile de intrare în proces sunt $u_1 = \alpha$ prezintă poziția robinetului ca organ de reglare a umidității și tensiunea $u_2 = u$ aplicată încălzitorului electric, iar mărimile de ieșire sunt umiditatea y_1 și temperatura y_2 măsurate de traductorii Tr1 și Tr2.

Poziția α a robinetului și tensiunea u aplicată încălzitorului electric R_f sunt reglate cu un regulator numeric.

Poziția α a robinetului conduce la modificarea ambelor mărimi reglate umiditatea și temperatura și atunci pentru partea fixată se obține modelul matematic în forma:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_\alpha}{T_\alpha s + 1} & 0 \\ \frac{k'_\alpha}{T'_\alpha s + 1} & \frac{k_u}{T_{us} + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix},$$

unde k_α, T_α sunt - coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul principal al temperaturii, k_u, T_u - coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul principal al umidității, k'_α, T'_α , - coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul de interinfluență temperatura-umiditate.

Se cere:

1. Să se determine modelul matematic discret al părții fixate.
2. Să se proiecteze un sistem de reglare noninteractivă cu decuplare în circuit deschis care să asigure celor două mărimi de ieșire reglate $y_1(t)$ și $y_2(t)$ un răspuns minimal la semnale de intrare treaptă și să se construiască structura sistemului de reglare.
3. Să se proiecteze un sistem de reglare noninteractivă cu decuplare în circuit închis și algoritmul de reglare pe calea de reacție care să asigure celor două mărimi de ieșire reglate $y_1(t)$ și $y_2(t)$ un răspuns la semnal de intrare treaptă fără suprareglare cu constantele de timp T_1 și T_2 . Să se construiască structura sistemului de reglare.

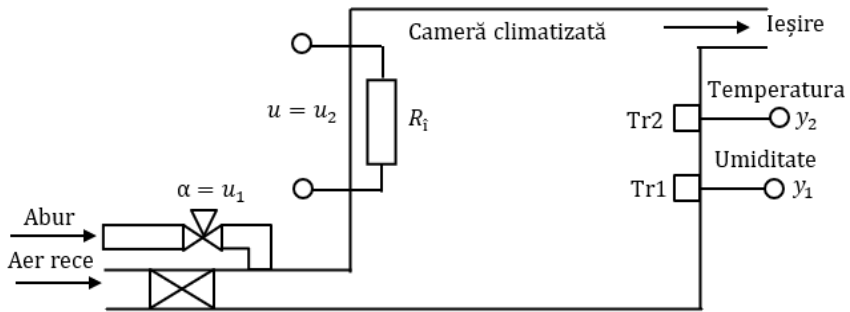


Fig. 8.13. Schema bloc funcțională a procesului

Rezolvare.

1. Se calculează modelul matematic discret al părții fixate.

Canalul unu:

$$y_1(s) = \frac{k_\alpha}{T_\alpha s + 1} u_1(s) = H_{11}(s) u_1(s).$$

Canalul doi:

$$y_2(s) = \frac{k'_\alpha}{T'_\alpha s + 1} u_1(s) + \frac{k_u}{T_u s + 1} u_2(s) = H_{12}(s) u_1(s) + H_{22}(s) u_2(s).$$

Se aplică metoda de discretizare aproximativă - metoda dreptunghiului în întârziere la f.d.t. $H_{11}(s)$, $H_{12}(s)$ și $H_{22}(s)$ utilizând substituția $s = (1/T)(1 - z^{-1})$ cu perioada de eșantionare T și se obține:

$$H_{11}(z^{-1}) = \frac{k_{\alpha}}{T_{\alpha} \frac{1}{(1-z^{-1})} + 1} = \frac{T k_{\alpha}}{T_{\alpha} + T - T_{\alpha} z^{-1}} = \frac{\frac{T k_{\alpha}}{T_{\alpha} + T}}{1 - \frac{T_{\alpha}}{T_{\alpha} + T} z^{-1}} = \frac{b_{11}}{1 + a_{11} z^{-1}},$$

$$H_{12}(z^{-1}) = \frac{b_{12}}{1 - a_{12} z^{-1}}, \quad H_{22}(z^{-1}) = \frac{b_{22}}{1 - a_{22} z^{-1}},$$

unde coeficienții ai semnificațiile: $b_{11} = \frac{T k_{\alpha}}{T_{\alpha} + T}$, $a_{11} = -\frac{T_{\alpha}}{T_{\alpha} + T}$, $b_{12} = \frac{T k'_{\alpha}}{T'_{\alpha} + T}$, $a_{12} = -\frac{T'_{\alpha}}{T'_{\alpha} + T}$,
 $b_{11} = \frac{T k_u}{T_u + T}$, $a_{22} = -\frac{T_u}{T_u + T}$.

Astfel, pentru mărimile $y_1(z^{-1})$ și $y_2(z^{-1})$ se obține:

$$y_1(z^{-1}) = \frac{b_{11}}{1 + a_{11} z^{-1}} u_1(z^{-1}).$$

$$y_2(z^{-1}) = \frac{b_{12}}{1 + a_{12} z^{-1}} u_1(z^{-1}) + \frac{b_{22}}{1 + a_{22} z^{-1}} u_2(z^{-1}).$$

Matricea de transfer discretă a părții fixate are forma:

$$H_P(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{1 + a_{11} z^{-1}} & 0 \\ \frac{b_{12}}{1 + a_{12} z^{-1}} & \frac{b_{22}}{1 + a_{22} z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

2. Matricea de transfer a sistemului deschis decuplat este:

$$H_d(z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{11}(z^{-1})H_{R1}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & H_{22}(z^{-1})H_{R2}(z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Regulatele principale $H_{R1}(z^{-1})$ și $H_{R2}(z^{-1})$ se proiectează după buclele monovariabile obținute după decuplare considerând un răspuns minimal fără suprareglare la semnal treaptă discretă. Astfel, pentru f.d.t. a sistemelor monovariabile închise vor avea ordinul $n = 1$ și forma:

$$H_{011}(z^{-1}) = H_{022}(z^{-1}) = z^{-1}.$$

Matricea de transfer a sistemului multivariabil va fi:

$$H_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{011}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & H_{022}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pentru acest caz problema reglării este rezolvată fiindcă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ la condiția $H_{011}(1) = H_{022}(1) = 1$. Deoarece sunt cunoscute f.d.t. $H_{011}(z^{-1})$ și $H_{022}(z^{-1})$, atunci se pot calcula f.d.t. ale algoritmilor de reglare principali care se prezintă cu relațiile:

$$H_{R1}(z^{-1}) = \frac{H_{011}(z^{-1})}{1-H_{011}(z^{-1})} \frac{1}{H_{11}(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1+a_{11}z^{-1}}{b_{11}} = \frac{z^{-1}+a_{11}z^{-2}}{b_{11}-b_{11}z^{-1}},$$

$$H_{R2}(z^{-1}) = \frac{H_{022}(z^{-1})}{1-H_{022}(z^{-1})} \frac{1}{H_{22}(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1+a_{22}z^{-1}}{b_{22}} = \frac{z^{-1}+a_{22}z^{-2}}{b_{22}-b_{22}z^{-1}}.$$

Deoarece procesul are forma canonică P, atunci pentru reglatoarele de decuplare se alege forma canonică V și f.d.t. a reglatoarelor au forma:

$$H_{R12}(z^{-1}) = -\frac{H_{12}(z^{-1})}{H_{22}(z^{-1})} = -\frac{b_{12}(1+a_{22}z^{-1})}{b_{22}(1+a_{12}z^{-1})} = -\frac{b_{12}+b_{12}a_{22}z^{-1}}{b_{22}+b_{22}a_{12}z^{-1}},$$

$$H_{R21}(z^{-1}) = -\frac{H_{21}(z^{-1})}{H_{11}(z^{-1})} = 0.$$

Structura sistemului multivariabil proiectat se dă în fig. 8.14.

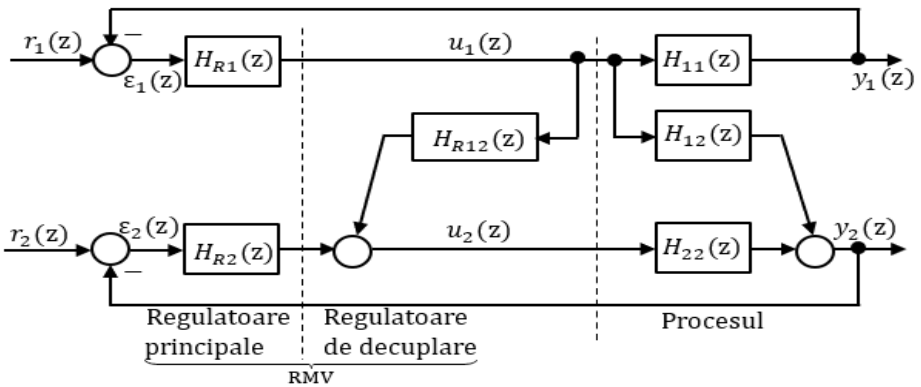


Fig. 8.14. Structura sistemului multivariabil proiectat la punctul 2

3. Proiectarea sistemului multivariabil de reglare noninteractivă cu decuplare în buclă închisă cu răspunsuri aperiodice cu constante de timp T_1 și T_2 , iar f.d.t. vor avea forma:

$$H_{011}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad \text{și} \quad H_{022}(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}.$$

Funcțiile de transfer $H_{011}(s)$ și $H_{022}(s)$ se discretizează cu metoda dreptunghiului în întârziere, care vor avea forma:

$$H_{011}(z^{-1}) = \frac{c_{11}}{1+d_{11}z^{-1}} \quad \text{și} \quad H_{022}(z^{-1}) = \frac{c_{22}}{1+d_{22}z^{-1}}, \quad \text{cu } c_{ii} = \frac{T}{T+T_i}, \quad d_{ii} = -\frac{T_i}{T+T_i},$$

$i = 1, 2.$

Matricea de transfer a sistemului multivariabil este:

$$H_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{1+d_{11}z^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{c_{22}}{1+d_{22}z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Dacă se inversează matricele procesului și a sistemului multivariabil, atunci se obține:

$$H_P^{-1}(z^{-1}) = \frac{(1+a_{11}z^{-1})(1+a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}} \begin{bmatrix} \frac{b_{22}}{1+a_{22}z^{-1}} & 0 \\ \frac{b_{12}}{1+a_{12}z^{-1}} & \frac{b_{11}}{1+a_{11}z^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+a_{11}z^{-1})}{b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{12}(1+a_{11}z^{-1})(1+a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}} & \frac{1+a_{22}z^{-1}}{b_{22}} \end{bmatrix}.$$

$$H_0^{-1}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1+d_{11}z^{-1}}{c_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1+d_{22}z^{-1}}{c_{22}} \end{bmatrix}.$$

Algoritmul de reglare multivariabil se calculează cu relația:

$$H_R(z^{-1}) = H_0^{-1}(z^{-1}) - H_P^{-1}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1+d_{11}z^{-1}}{c_{11}} - \frac{1+a_{11}z^{-1}}{b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{12}(1+a_{11}z^{-1})(1+a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}(1+a_{12}z^{-1})} & \frac{1+d_{22}z^{-1}}{c_{22}} - \frac{1+a_{22}z^{-1}}{b_{22}} \end{bmatrix},$$

de unde se obțin f.d.t. ale reglatoarelor principale care au forma:

$$H_{R1}(z^{-1}) = \frac{b_{11}(1+d_{11}z^{-1})-c_{11}(1+a_{11}z^{-1})}{b_{11}c_{11}}, \quad H_{R2}(z^{-1}) = \frac{b_{22}(1+d_{22}z^{-1})-c_{22}(1+a_{22}z^{-1})}{b_{22}c_{22}},$$

iar regulatoarele de decuplare au f.d.t. de forma:

$$H_{R12}(z^{-1}) = \frac{b_{12}(1+a_{11}z^{-1})(1+a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}(1+a_{12}z^{-1})}, \quad H_{R21}(z^{-1}) = 0.$$

Structura sistemului multivariabil proiectat se dă în fig. 8.15.

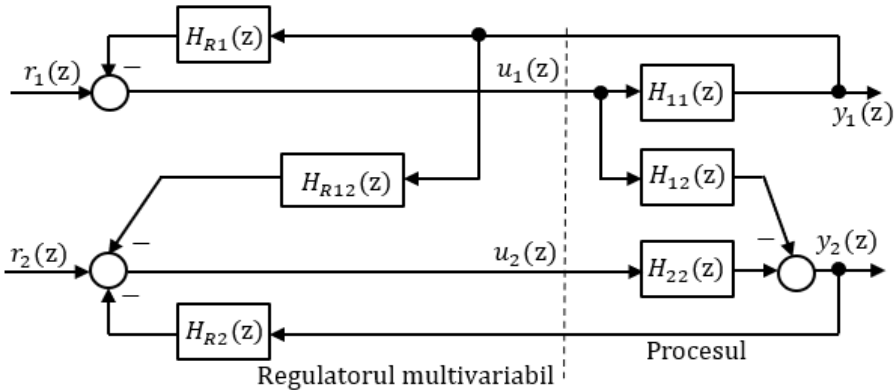


Fig. 8.15. Structura sistemului multivariabil proiectat la punctul 3

9 IMPLEMENTAREA ALGORITMILOR NUMERICI

9.1 Structuri de implementare a algoritmilor PID numerici

Pentru implementarea unui algoritm de reglare este necesar de realizat astfel încât să includă toate facilitățile impuse unui sistem de reglare automată. Pentru programarea algoritmului se vor include variabilele de stare de configurare pentru diverse regimuri de funcționare, moduri de lucru, diverse tipuri de algoritmi având în vedere fenomenele de saturație a componentei integrale și a parametrilor de acord.

Se analizează regimurile și modurile de operare a unui algoritm PID cu filtrare, care poate fi realizat ca algoritm cu un grad de libertate sau cu două grade de libertate când la intrarea componentei PD cu filtrare se aplică mărimea de măsură din proces, cu moduri de operare AUTOMAT sau MANUAL și regimuri de funcționare CALCULATOR sau CASCADĂ.

Pentru realizarea componentei integratoare și a elementului de execuție cu desaturare pot fi utilizate mai multe metode. O cale posibilă de limitare a componentei integrale când elementul de execuție atinge nivelul de saturare. O altă posibilitate se prezintă în fig. 9.1, unde se include în jurul integratorului o reacție negativă în funcție de abaterea dintre ieșirea și intrarea elementului de execuție.

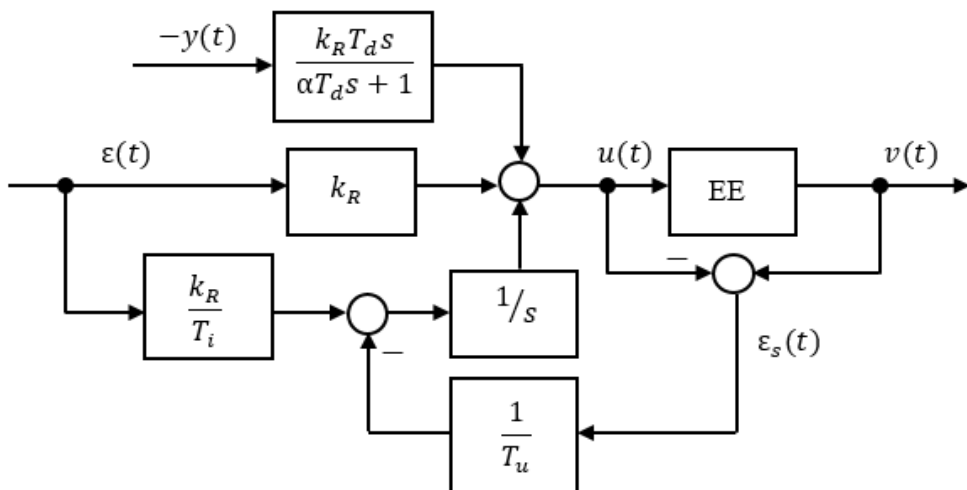


Fig. 9.1. Structura unui regulator PID cu desaturare

Eroarea ε_s reacției negative este diferența dintre mărimea de ieșire a elementului de execuție $v(t)$ și mărimea de ieșire $u(t)$ a regulatorului:

$$\varepsilon_s(t) = v(t) - u(t), \quad (9.1)$$

care este egală cu zero pe durata timpului cât elementul de execuție nu a intrat în saturație. Resetarea integratorului I se realizează la o valoare corespunzătoare cu o dinamică determinată de constanta de timp de urmărire T_u . Structura din fig. 9.1 are avantajul că poate fi utilizată pentru orice tip de element de execuție.

Când mărimea de ieșire $v(t)$ a elementului de execuție nu este posibil de măsurat, atunci acesta poate fi modelat și care generează un semnal echivalent utilizat pentru **calculul erorii ε_s** .

9.2 Comutarea manual – automat

Reglatoarele PID pot funcționa în mod MANUAL (M) și AUTOMAT (A). În modul MANUAL, ieșirea regulatorului $u(t)$ se generează de un operator prin acțiuni de creștere sau scădere. Reglatoarele pot funcționa în cascadă (CASC) cu alte reglatoare sau cu alte elemente neliniare multiplicatoare sau selectoare, care pot funcționa în regim CALCULATOR cu fixarea referinței de la nivelul ierarhic superior sau comanda este calculată la nivelul superior și este transmisă elementului de execuție. În modul de funcționare MANUAL regulatorul PID este în regim de rezervă sau este defect.

În timpul funcționării regulatorului PID se pot acorda parametrii de acord.

Pentru evitarea șocurilor de trecere de pe MANUAL pe AUTOMAT și invers care pot afecta funcționarea procesului se includ funcții de echilibrare a comenzii. În cazurile de comutare se verifică valoarea mărimii de ieșire a integratorului care trebuie să fie corectă.

Deoarece regulatorul este un sistem dinamic sunt necesare măsuri de echivalare a comenzii pentru a nu provoca șocuri atunci când se schimbă modul de operare de pe MANUAL (M) pe AUTOMAT (A). La trecerea de pe manual M la automat A se verifică dacă valoarea de ieșire a integratorului este corectă în momentul comutării, care prezintă transfer fără șocuri (fig. 9.2, a-c). Transferul fără șocuri este ușor de obținut pentru regulatorul PID incremental. Integratorul este prevăzut cu un comutator C (fig. 9.2, a), care permite alegerea incrementului comenzii $\Delta u(k)$ fie de la blocul manual de elaborare a comenzii BMC, fie de la regulatorul PID incremental. Deoarece comutatorul C manipulează numai incremente nu vor exista variații mari la schimbarea regimului de funcționare. Funcționarea integratorului se aproximează cu relația:

$$u(k) = \frac{T}{1-z^{-1}} \varepsilon(k) = \frac{T}{1-q^{-1}} \varepsilon(k).$$

(9.2)

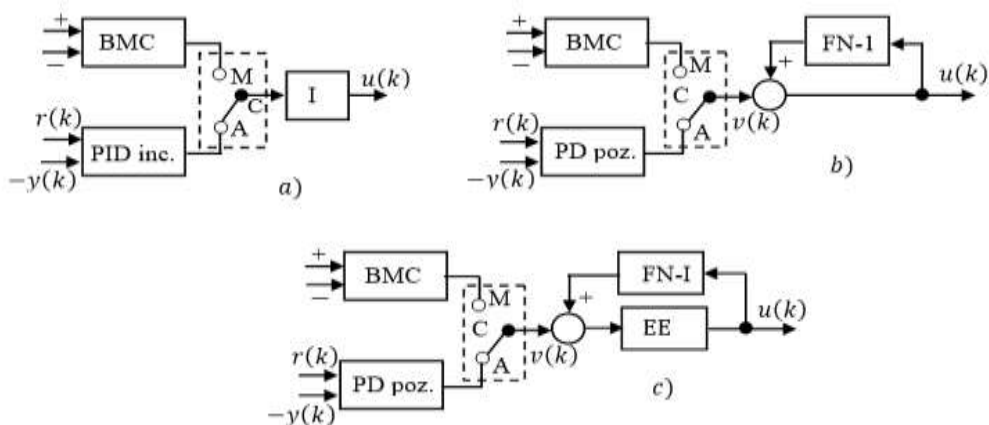


Fig. 9.2. Scheme de comutare manual (M) – automat (A)

Pentru algoritmul PID de poziție comutarea se va face după schema din fig. 9.2, *b*. Componenta integrală se implementează cu ajutorul unui filtru numeric FN-I de tip întârziere de ordinul unu care este plasat într-o buclă cu reacție pozitivă și funcția de transfer a canalului intrarea $v(k)$ – ieșirea $u(k)$ se prezintă:

$$H_I(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+T_i s}} = \frac{1+T_i s}{T_i s},$$

(9.3)

ceea ce evidențiază că ieșirea pe manual este incrementată. Constanta de timp T_i este constanta de timp a filtrului.

Pentru a realiza protecția antisaturației se recomandă schema din fig. 9.2, *c* în care pe cale directă s-a inclus elementul de execuție EE cu o caracteristică statică de tip saturație.

Dacă se consideră algoritmul PID modificat:

$$u(k) = u(k - 1) + k_p[-(y_f(k) - y_f(k - 1)) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{T} ((y_f(k) - 2y_f(k - 1) - y_f(k - 2)))] \quad (9.4)$$

În acest caz structura care asigură transferul fără șocuri de pe manual M pe automat A, cât și proprietatea antisaturație este prezentată în fig. 9.3.

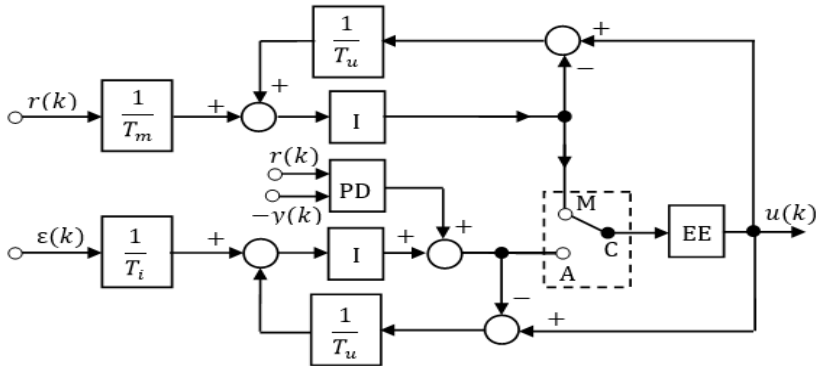


Fig. 9.3. Regulator PID cu comutare M-A și dispozitiv antisaturație

Constanta de timp T_m fixează viteza de variație a comenzii în regim manual și se alege în funcție de tipul elementului de execuție. Pentru constanta de timp T_u se recomandă două variante de alegere:

$$T_u = T_i \quad (9.5)$$

sau în forma:

$$T_u = (0,1 \dots 0,5)T_i \quad (9.6)$$

în funcție de tipul procesului.

Când mărimea de ieșire $v(t)$ a elementului de execuție nu este posibil de măsurat, atunci acesta poate fi modelat și care generează un semnal echivalent utilizat pentru calculul erorii ε_s .

Efectul saturației integrale poate fi redus, urmărind starea elementului de acționare, care intră în saturație și compensând semnalul aplicat la intrarea integratorului (fig. 9.4).

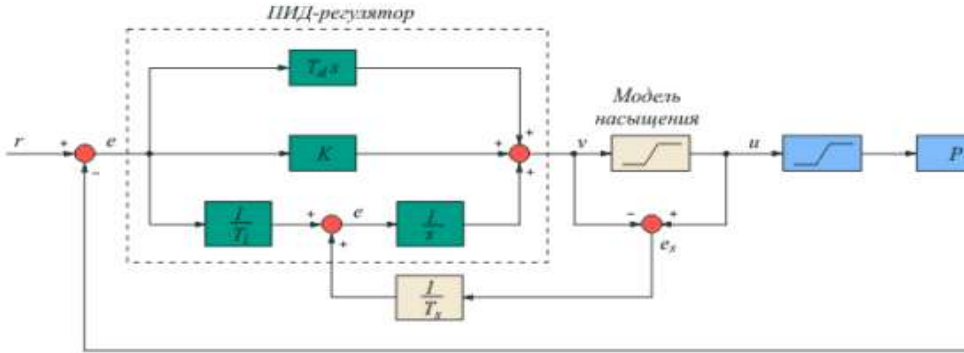


Fig. 9.4. Compensarea saturației copponentei integrale (P – procesul)

9.3 Implementarea unui algoritm recurent de ordinul doi

Se prezintă algoritmul numeric recurent de ordinul doi obținut prin metode de discretizare a unei legi PID reale în forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}. \quad (9.7)$$

Din expresia (9.7) se obține mărimea de comandă în formă operațională și în timp discret:

$$u(z^{-1}) = -p_1 z^{-1} u(z^{-1}) - p_2 z^{-2} u(z^{-1}) + q_0 \varepsilon(z^{-1}) + q_1 z^{-1} \varepsilon(z^{-1}) + q_2 z^{-2} \varepsilon(z^{-1}),$$

$$u(k) = -p_1 u(k-1) - p_2 u(k-2) + q_0 \varepsilon(k) + q_1 \varepsilon(k-1) + q_2 \varepsilon(k-2). \quad (9.8)$$

Implementarea algoritmului (9.8) se dă în fig. 9.5, care este cea mai simplă schema de realizare, dar care nu este o realizare sistemică minimală, însă este cauzal și, deci, se poate calcula comanda pe baza informațiilor disponibile la timpul dat. Această schemă evidențiază modul de calculare a comenzii pe baza informațiilor disponibile, unde este necesar de efectuat 5 operații de înmulțire, 11 adrese de memorie pentru variabilele $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k-2}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}$ și coeficienții q_i, p_j .

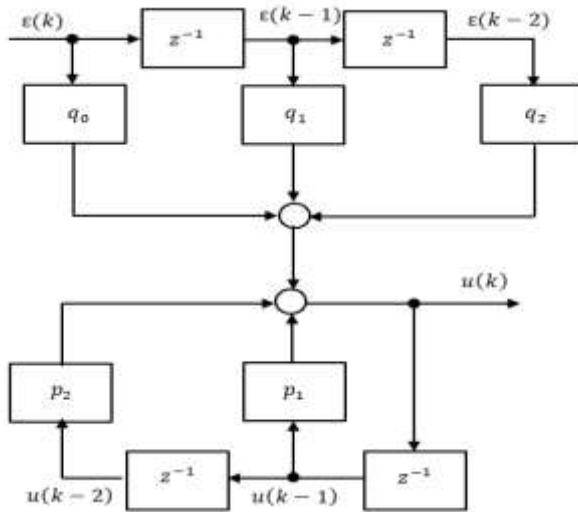


Fig. 9.5. Schema de implementare a algoritmului PID (1)

Acest algoritm are flexibilitate redusă la implementare și dificultăți la evidențierea diferitelor regimuri de funcționare și moduri de lucru.

Semnalele de intrare se transmit în calculator prin multiplexoare, iar ieșirile din calculator prin demultiplexoare.

În fig. 9.6 se prezintă schema de realizare a algoritmului PID numeric în formă canonică.

Relațiile de calcul al variabilelor din structura algoritmului sunt:

$$u(k) = q_0 x_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2,$$

$$x_0 = \varepsilon(k) - p_1 x_1 - p_2 x_2,$$

$$(9.9) \quad x_1 = x_0 q^{-1},$$

$$x_2 = x_1 q^{-1},$$

unde $q^{-1} = z^{-1}$ este operatorul de deplasare.

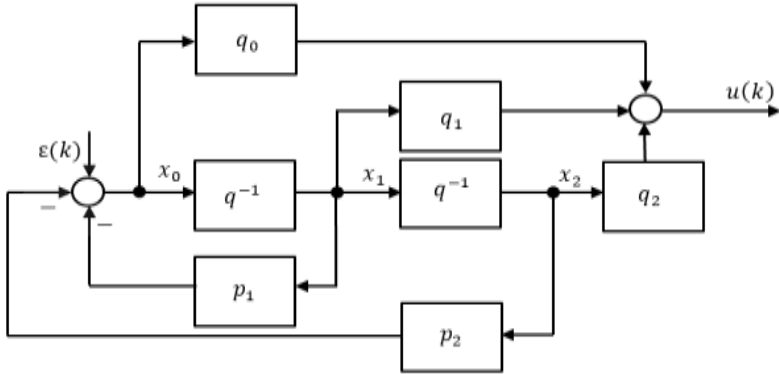


Fig. 9.6. Forma canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul doi

Semnalele de intrare se transmit în calculator prin multiplexoare, iar ieșirile din calculator prin demultiplexoare.

Funcția de transfer a algoritmului numeric recurent de ordinul n se prezintă în forma:

$$(9.10) \quad H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}}$$

Ecuția operațională a regulatorului din (9.10) are forma:

$$(9.11) \quad u(z^{-1})(1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}) = \varepsilon(z^{-1})(q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}).$$

În cazul când coeficientul $p_0 \neq 1$ se împart toți coeficienții expresiei (9.10) la p_0 și se obține relația de calcul a mărimii de comandă în forma:

$$u(z^{-1}) = \frac{1}{p_0} [-u(z^{-1})(1 + p_1z^{-1} + \dots + p_nz^{-n}) + \varepsilon(z^{-1})(q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_nz^{-n})]. \quad (9.12)$$

În domeniul timpului mărimea de conducere din (9.12) se exprimă cu relația recurentă:

$$u(k) = -\frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^n p_i u(k-i) + \frac{1}{p_0} \sum_{i=0}^n q_i \varepsilon(k-i). \quad (9.13)$$

Mărimea de conducere discretă curentă $u(k)$ din (9.13) se calculează cu valorile curente și anterioare ale mărimii de conducere și ale erorii sistemului și programul se realizează pe calculator.

Forma canonică de realizare a algoritmului de reglare numeric recurent de ordinul n se prezintă în fig. 9.7.

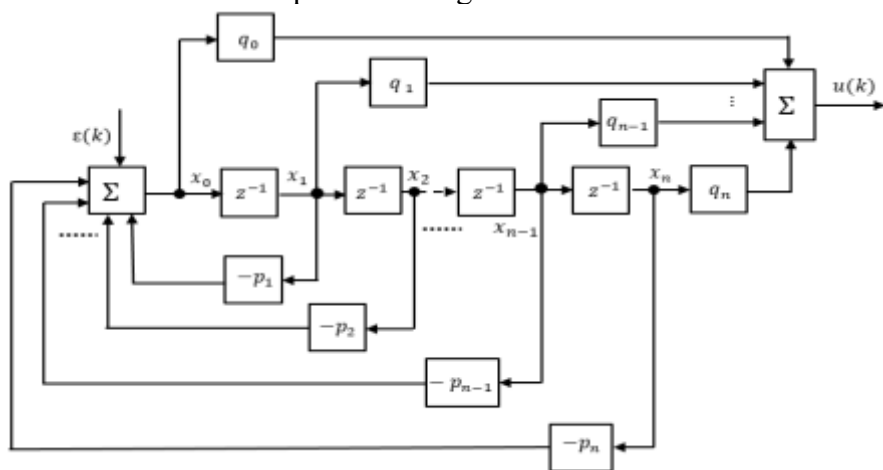


Fig. 9.7. Forma canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul n

9.4 Implementarea unui algoritm structurat pe module

Pentru implementarea algoritmilor structurați pe module standard P, I și PDF cu filtrare se pot realiza diferite regimuri de

funcționare și moduri de lucru cu diverse structuri. În fig. 9.8 este prezentată o structură de realizare a algoritmului PID cu filtrare. În funcție de poziția comutatorului C_0 (pozițiile 1, 0, 2) se va fixa referința de la calculator (CALC) de către operator sau de la alt regulator în regim de funcționare în cascadă (CASC).

Cu ajutorul comutatorului C_1 (pozițiile 0, 1) se poate utiliza un algoritm de reglare de structură variabilă și cu două grade de libertate, unde mărimea măsurată $y(k)$ se prelucrează de un algoritm PID, iar referința se prelucrează după o lege PI, dacă poziția comutatorului C_1 este pe 0, ori cu un singur grad de libertate dacă poziția comutatorului C_1 este pe 1.

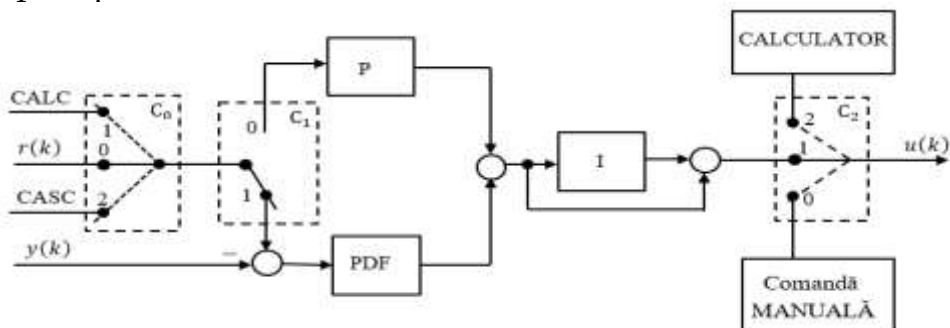


Fig. 9.8. Structura algoritmului PIDF cu evidențierea regimurilor de funcționare

Comutatorul C_2 se utilizează pentru comutarea regimului AUTOMAT – poziția pe 1 la regimul MANUAL - poziția pe 0 a comutatorului sau la modul de lucru CALCULATOR – poziția pe 2.

9.5 Modele de comandă generală

Se consideră că la condiții inițiale nule procesul condus este descris cu f.d.t. de forma:

$$(9.14) \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{y(s)}{x(s)}$$

Ecuția diferențială se prezintă:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} s x^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x. \quad (9.15)$$

Schema de simulare a sistemului automat descris de ecuația (9.15) se găsește în fig. 9.9.

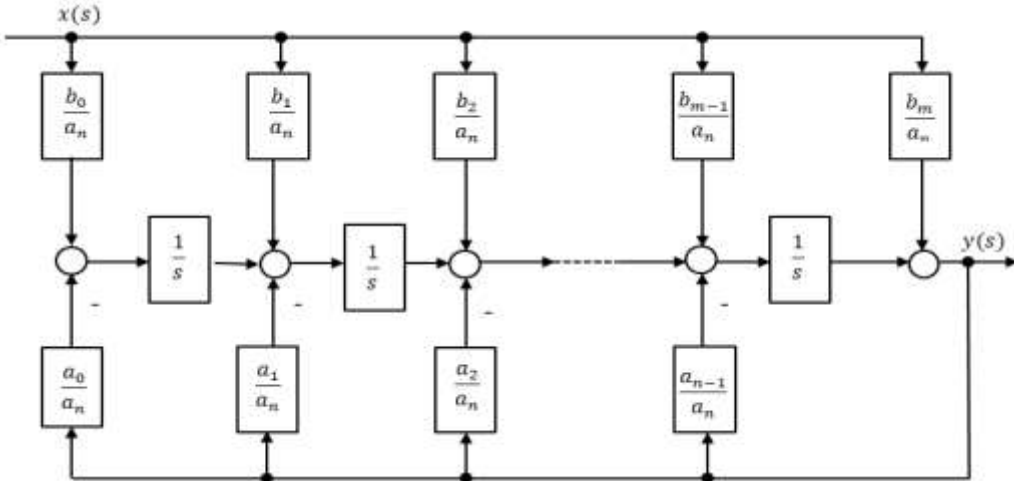


Fig. 9.9. Schema bloc pentru simularea sistemului descris de ecuația diferențială

Pentru timpul discret expresia (9.15) se transformă în ecuație cu diferențe finite de forma:

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m), \quad (9.16)$$

Pentru ecuația cu diferențe finite funcția de transfer a sistemului discret este:

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z^{-1})}{x(z^{-1})}. \quad (9.17)$$

Dacă se utilizează operatorul se întârziere q^{-1} care conduce la o scriere mai compactă a ecuațiilor recurente (și se ține seama și de prezentarea în z^{-1}), atunci (9.16) sau (9.17) se prezintă:

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} q^{-d} = \frac{y(k+1)}{x(k+1)} \quad (9.18)$$

sau

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} u(k+1), \quad (9.19)$$

unde $y(k+1)$ este valoarea ieșirii la pasul următor de eșantionare.

Dacă se folosește regulatorul de tip PID continuu cu ecuația diferențială:

$$u(t) = u_0 + k_p (\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{T_d \dot{\varepsilon}(t)}{T_f \dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t)}) \quad (9.20)$$

și în timp discret pentru o perioadă de eșantionare T , echivalentul discret al PID standard, implementat pe sistemele numerice, se obține înlocuind acțiunea derivativă printr-o diferență și integrala printr-o sumă discretă se obține:

$$u(k) = u_0(k) + k_p (\varepsilon(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k \varepsilon(i) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k - 1))). \quad (9.21)$$

F.d.t. a regulatorului discret PID este:

$$H_{PID}(z^{-1}) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})}. \quad (9.22)$$

Algoritmul PID este un caz particular al unei clase mai largi de algoritmi de reglare numiți RST, fiindcă operează cu 3 sisteme de reglare exprimate polinomial conectate într-o anumită manieră.

Ecuția (9.21) poate fi exprimată echivalent sub forma RS (lipsă T):

$$R(q^{-1})u(k) = S(q^{-1})\varepsilon(k) = S(q^{-1})(r(k) - y(k)) = S(q^{-1})r(k) - S(q^{-1})y(k), \quad (9.23)$$

unde $r(k)$ este referința care trebuie urmărită de ieșirea procesului.

Pentru comanda nominală, se poate propune o structură generală de tip RST cu două grade de libertate, pentru a depăși limitările algoritmului PID. Astfel, se păstrează polinoamele R, S pentru performanțele în reglare (compensarea perturbațiilor) în buclă închisă și se introduce un precompensator T care să asigure performanțe în urmărire (la modificarea referinței).

În rezultat se obține o extensie în forma canonică polinomială:

$$u(k) = -\sum_{i=0}^{n_R} r_i y(k-i) - \sum_{i=0}^{n_S} s_i u(k-i) + \sum_{i=0}^{n_T} t_i (k-i), \quad k \in N, \quad (9.24)$$

care se poate exprima echivalent în forma canonică polinomială:

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} r(k) - \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} y(k), \quad (9.25)$$

unde polinoamele se exprimă:

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{n_R} q^{-n_R},$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots + s_{n_s} q^{-n_s}, \quad (9.26)$$

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_{n_T} q^{-n_T}.$$

Structura generală a unui SNRA de tip RST este prezentată în fig. 9.10.

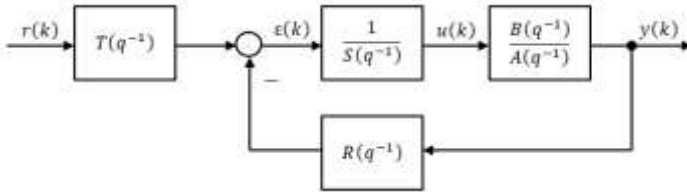


Fig. 9.10. Structura a unui SNRA de tip RST

9.6. Regulatorul PID de tip RST

Într-o configurare clasică de reglare, regulatorul PID continuu cu filtrare pe acțiunea derivativă, este definit prin f.d.t.:

$$H_{PID}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \right), \quad \alpha = \frac{1}{N}, \quad (9.27)$$

unde k_p este coeficientul de transfer, T_i – constanta de timp de integrare, T_d – constanta de timp de derivare, N – constanta de filtraj.

Pentru procese prezentate prin modele de ordinul unu și doi fără și cu timp mort (τ limitat inferior unei perioade de eșantionare), regulatorul PID numeric se obține prin discretizarea algoritmului PID continuu, folosind relația de aproximare:

$$s = \frac{z-1}{Tz}, \quad (9.28)$$

unde T este perioada de eșantionare.

F.d.t. discretă este:

$$H_{PID}(z) = k_p \left(1 + \frac{\frac{T}{T_i} z}{z-1} + \frac{\frac{NT_d}{T_d+TN}(z-1)}{z - \frac{T_d}{T_d+TN}} \right), \quad (9.29)$$

iar prin operatorul de întârziere q^{-1} se obține:

$$H_{PID}(q^{-1}) = k_p \left(1 + \frac{\frac{T}{T_i}}{1-q^{-1}} + \frac{\frac{NT_d}{T_d+TN}(1-q^{-1})}{1 - \frac{T_d}{T_d+TN}q^{-1}} \right) = \frac{R_0(q^{-1})}{S_0(q^{-1})}, \quad (9.30)$$

unde

$$R_0(q^{-1}) = k_p(1 - q^{-1}) \left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN} q^{-1} \right) + \frac{k_p T}{T_i} \left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN} q^{-1} \right) + \frac{k_p NT_d}{T_d+TN} (1 - q^{-1})^2, \\ S_0(q^{-1}) = (1 - q^{-1}) \left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN} q^{-1} \right). \quad (9.31)$$

Este posibilă exprimarea algoritmului PID în forma canonică RST în polinoame de ordinul doi cu restricția $T = R$, după cum urmează:

$$R(q^{-1}) = T(q^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} \equiv R_0(q^{-1}), \\ S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + s_1 q^{-1}) \equiv S_0(q^{-1}). \quad (9.32)$$

Parametrii regulatorului PID numeric (9.32) r_0 , r_1 , r_2 , s_1 se determină la etapa de proiectare.

Structura sistemului numeric se prezintă în fig. 9.11, iar funcția de transfer a sistemului cu regulator de tipul RST se descrie de relația:

$$H_{RST}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})}. \quad (9.33)$$

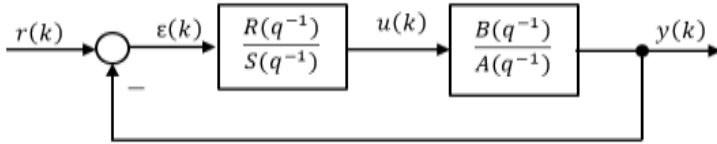


Fig. 9.11. Structura sistemului cu algoritmul PID de tip RST

Performanțele sistemului automat numeric se impun prin polinomul caracteristic utilizând metoda alocării poli-zero-uri:

$$P_d(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}). \quad (9.34)$$

În practică polinomul $P_d(q^{-1})$ se alege un polinom de ordinul doi cu coeficienții cunoscuți – respectiv rădăcini impuse, sugerat de existența unei soluții pentru ecuația polinomială (9.34), deci se obține:

$$P_d(q^{-1}) = 1 + p_1q^{-1} + p_2q^{-2}. \quad (9.35)$$

Această expresie reprezintă echivalentul discret al unui model continuu de ordinul doi în reprezentare standard.

Rezultă că pentru calculul parametrilor regulatorului PID trebuie rezolvată următoarea ecuație polinomială prin procedurile expuse:

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})(r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2}) \equiv P_d(q^{-1}). \quad (9.36)$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica*. Coord. I. DUMITRACHE. București: Editura Academiei Române, 2009. V. 1, 961 p. ISBN 978-973-27-1883-4.
2. BALABANOV, A.A. *KOPRAS – Tehnika komputernogo modelirovania avtomaticheskikh sistem*. Chișinău: TUM, 2004. T.1. 390 s. ISBN 5-7417-0151-5.
3. COJUHARI, Irina, IZVOREANU, B. *Modelare și identificare. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău, 2015. 120 p. ISBN 978-9975-45-376-9.
4. DYNNIKOV, A.I. *Tzifrovye sistemy upravleniya*. M.: MFTI, 2006. 196 s. ISBN 5-7417-0151-5.
2. DUMITRACHE, I. *Ingineria reglării automate*. București: Ed. Politehnica Press, 2005. 725 p.
6. DUMITRACHE, I. *Ingineria reglării automate*. București: Ed. Politehnica Press, 2016. V. 1. 407 p. ISBN 978-606-515-686-9.
7. IZVOREANU, B.; FIODOROV, I. The Synthesis of Linear Regulators for Aperiodic Objects with Time Delay According to the Maximal Stability Degree Method. In *Preprints the Fourth IFAC Conference on System Structure and Control*. București: Editura Tehnică, 1997, pp. 449 - 454.
8. IZVOREANU, B.; COJUHARI, Irina; FIODOROV, I.; MORARU, D.; SECRIERU, A. Tuning the PID Controller to the Model of Object with Inertia Second Order According to the Maximum Stability Degree Method with Iteration. *Annals of the University of Craiova. Electrical Engineering series*, No. 43, Issue 1, 2019, pp. 79-85. ISSN-4805.
9. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya*. T.1. *Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2003. 288 s. ISBN 5-9221-0379-2.
10. KIM, D.P.; DIMITRIEVA, N.D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravleniya*. *Lineinye sistemy*. M.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 s. ISBN 978-5-9221-0873-7.
11. KUO, B. *Teoria i proektirovanie tzifrovyyh sistem upravleniya*. M.: Mashinostroenie, 1986. 448 s.

12. MARTYNENKO, I.I.; LYSENKO, V.F. *Proektirovanie sistem avtomatiki*. M.: Agropromizdat, 1990. 243 s. ISBN 5-10-00072-9.

13. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravlania. T. 3. Sintez reguleatorov sistem avtomaticheskogo upravlania*. Pod red. K.A. PUPKOVA; N.D. EGUPOVA. M.: Izd-vo MG TU im. N. E. BAUMANA, 2004. 616 s. ISBN 5-7038-2191-6.

14. PETUHOV, C.V., KRISHIANIS, M.V. *Elektroprivod*. Arhanghelsk: C(A)FU, 2015. 303 s. / elektroprivod.pdf. Accesat 10.10.2020.

15. *Rukovodstvo po proektirovaniiu sistem avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. V.A. BESEKERSKOGO. M.: Vysshiaia shkola, 1983. 296 s.

16. *Raschiot avtomaticheskikh sistem*. Pod red. A.V. FATEEVA. M.: Vysshiaia shkola, 1983. 336 s.

17. SOLODOVNIKOV, V.V.; PLOTNIKOV, V.N.; IAKOVLEV, A.V. *Osnovy teorii i elementov sistem avtomaticheskogo regulirovania*. M.: Mashinostroenie, 1985. 536 s.

18. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. V.B. IAKOVLEVA. M.: Vysshiaia. shkola, 2005. 567 s. ISBN 5-06-004096-8.

19. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iași: Ed. Dosoitei, 1998. 237 p. 973-9135-60-9.

20. ZAGARII, G. I.; SHUBLADZE, A. M. *Sintez sistem upravlenia na osnove criteria maximalnoi stepeni ustoichivosti (The Synthesis of the Control System According to the Maximal Stability Degree)*. Moskva: Energoatomizdat, 1998. 198 s.