NC5.8.

# DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER A FUNCȚIILOR PARE ȘI IMPARE ȘI A FUNCȚIILOR DEFINITE PE INTERVALUL $[-l, l]$

- Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor pare și impare
- Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor periodice de perioadă *2l*
- Minimalitatea coeficienților Fourier. Inegalitatea Bessel
- Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcții neperiodice

## Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor pare și impare

Amintim că dacă $f(x)$ este o funcție pară, integrabilă pe segmentul $[-a,a]$, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. Dacă $f(x)$ este o funcție impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Dacă $f(x)$ este o funcție **pară** și admite dezvoltare în serie Fourier, atunci produsul $f(x)\cdot\sin kx$ este o funcție impară, iar produsul $f(x)\cdot\cos kx$ este o funcție pară și au loc relațiile: **(1)** $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$.

Astfel, în seria Fourier a unei **funcții pare** figurează numai **cosinusuri**.

Dacă $f(x)$ este o funcție **impară** și admite dezvoltare în serie Fourier, atunci produsul $f(x)\cdot\sin kx$ este o funcție pară, iar produsul $f(x)\cdot\cos kx$ este o funcție impară și au loc relațiile: **(2)** $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0,\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$.

Astfel în seria Fourier a unei **funcții impare** figurează numai **sinusuri.**

**Exemplu.** Să se descompune în serie Fourier funcția periodică $f(x) = x$ pe $(-\pi, \pi)$.

Funcția $f(x)$ este impară, deci conține numai sinusuri: $a_0 = a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}x\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right) = -\frac{2}{\pi k}\cdot\pi\cos\pi k + \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Astfel $x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right)$ pentru $x \in (-\pi, \pi)$.

## Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor pare de perioadă 2*l*

Fie $f(x)$ o funcție periodică de perioada $2l$, în general diferită de $2\pi$. Să descompunem această funcție în serie Fourier. Punem $x = \frac{l}{\pi}t$. Atunci $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ este o funcție de $t$ periodică de perioada $2\pi$: $f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}+2l\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Deci, ea poate fi dezvoltată în serie Fourier pe segmentul $[-\pi, \pi]$. Punem $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\varphi(t)$, atunci:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right),\ \text{cu}\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Revenind la $x$ cu $t=\frac{\pi}{l}x$ și $dt=\frac{\pi}{l}dx$, avem:

$$\textbf{(3)}\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Deci, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, unde $a_0, a_n, b_n$ se calculează folosind (3).

**Notă.** Toate proprietățile menționate pentru funcțiile periodice de perioada $2\pi$ sunt valabile și pentru funcțiile periodice de perioada $2l$.

**Exemplu**. Să se descompună în serie Fourier $f(x)=e^x$ pe intervalul $(-1, 1)$.

Avem $l=1$, $a_0=1\cdot\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e^x\Big|_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$.

$$a_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos\pi nx\,dx=\left|\int e^x\cos nx\,dx=\frac{e^x\left(\cos n\pi x+n\pi\sin n\pi x\right)}{1+\pi^2n^2}\right|=\frac{e^x\left(\cos n\pi x+n\pi\sin n\pi x\right)}{1+\pi^2n^2}\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{e}{1+\pi^2n^2}\cos\pi n-\frac{e^{-1}}{1+\pi^2n^2}\cos\pi n=\frac{(-1)^n}{1+\pi^2n^2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^x\sin\pi nx\,dx=\frac{e^x}{1+\pi^2n^2}\left(\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{n\pi(-1)^{n+1}}{1+\pi^2n^2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Astfel $e^x=\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\pi^2n^2}\cos n\pi x+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\pi^2n^2}n\sin n\pi x\right).$

## Minimalitatea coeficienților Fourier. Inegalitatea Bessel.

Reprezentarea funcției date prin seriile Taylor, Fourier ne ”sugerează” ideea aproximării funcției date cu sumele parțiale $S_n(x)$ ale seriilor respective. În dependență de gradul de aproximare se alege *n*. În cazul aproximării $f(x)\approx S_n(x)$, valoarea funcției $f(x)$ coincide cu valoarea lui $S_n(x)$ într-o mulțime de puncte (în cazul Taylor, și cu valorile derivatelor de orice ordin pînă la *n*, inclusiv).

În cazul seriilor Taylor se spune că $f(x)$ este aproximată de polinoame, iar în cazul Fourier, $f(x)$ se aproximează de așa- numitele **polinoame trigonometrice**.

NC5.8.

# DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER A FUNCȚIILOR PARE ȘI IMPARE ȘI A FUNCȚIILOR DEFINITE PE INTERVALUL $[-l, l]$

Dăm careva noțiuni generale. Fie funcția $f(x)$ definită pe $[a, b]$. Să evaluăm eroarea comisă cînd $f(x)$ este înlocuită cu altă funcție $\varphi(x)$. Ca măsură a erorii putem considera mărimea $\max|f(x)-\varphi(x)|$ pe segmentul $[a, b]$, numită **abaterea maximă** dintre $f(x)$ și $\varphi(x)$. Dar deseori se consideră altă măsură a erorii, și anume **abaterea medie pătratică** $\delta$, $\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx$ (care este mai <u>precisă</u> decît abaterea maximă).

**Definiție**. Funcțiile $T_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right)$ **(9)**, $A_n^2 + B_n^2 > 0$, se numesc **polinoame trigonometrice** de ordinul $n$, $n \in N^*$.

Este „curioasă” aproximarea funcției $f(x)$, periodică cu perioada $2\pi$, de polinoame trigonometrice. Mai ales, este interesant care polinoame trigonometrice generează o abatere pătratică minimă.

Suma parțială a seriei Fourier a funcției $f(x)$, $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$ se mai numește **sumă Fourier de ordinul** $n$. Evident, $S_n(x)$ este polinom trigonometric de ordinul $n$. Este justă următoarea teoremă:

**Teoremă**. Fie, că $f^2(x)$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Dacă $S_n$ este suma Fourier de ordinul $n$, atunci: $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx = \min_{T_n(x)}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx$ **(10)**, unde minimul din partea dreaptă se consideră după toate polinoamele trigonometrice de grad $\le n$.

Dacă $a_0, a_n, b_n$ sunt coeficienții seriei Fourier a funcției $f(x)$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ **(11)**, numită **inegalitatea Bessel**.

(Cu alte cuvinte, abaterea medie pătratică dintre $f(x)$ și $S_n(x)$ este cea mai mică, dintre abaterile medii pătratice dintre $f(x)$ și orice polinom trigonometric de grad $\le n$).

**Demonstrație**. Avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f^2(x)+T_n^2(x)-2f(x)\cdot T_n(x)\right]dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right] -$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k \,\mathrm{co}\ kx + B_k \sin kx\right)\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right] - 2\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} A_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{co}\ kx\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} B_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right] - 2\pi\frac{A_0 a_0}{2} -$$

$$-2\pi\sum_{k=1}^{n} A_k a_k - 2\pi\sum_{k=1}^{n} B_k b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{A_0^2}{2}+A_0a_0\right]+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2-2A_ka_k\right)+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(B_k^2-2B_kb_k\right)=$$

$$=(\text{pătrate perfecte})=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\frac{(A_0-a_0)^2}{2}-\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}\left[\left(A_k-a_k\right)^2-a_k^2\right]+\pi\sum_{k=1}^{n}\left[\left(B_k-b_k\right)^2-b_k^2\right]=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k-a_k\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(B_k-b_k\right)^2\right]-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

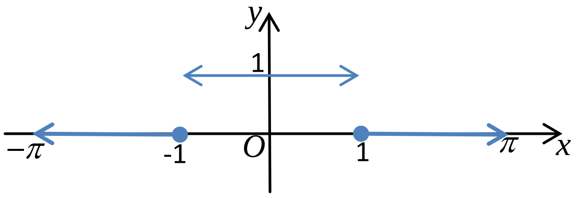
Deci, valoarea $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ este **minimală**, dacă $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, adică dacă în calitate de polinom trigonometric $T_n(x)$ se consideră suma Fourier $S_n(x)$ de ordinul $n$. Dacă $T_n(x)=S_n(x)\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geq 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

**Notă**. Din inegalitatea Bessel poate fi demonstrată relația: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$, numită **egalitatea lui Parseval**.

**Exemplu**. Să se scrie seria Fourier trigonometrică și apoi egalitatea lui Parseval pentru funcția: $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & 1\leq|x|<\pi\end{cases}$. Să se deducă sumele seriilor numerice: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$.

**Soluție**. Graficul funcției $f(x)$ este:




Funcția $f(x)$ este pară. Deci $b_n=0$. Avem $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dx=\frac{2}{\pi}$;

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos nx\,dx=\frac{2\sin n}{\pi n}$. Obținem $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx$. Egalitatea Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\Leftrightarrow\frac{2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dx\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=1.$$

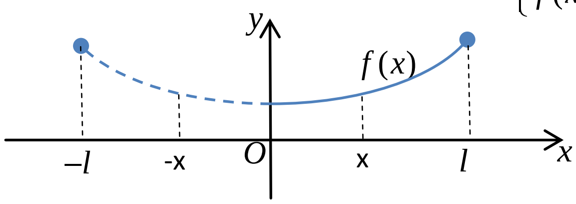
Obținem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Ușor se poate găsi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi - 1}{2}$.

## Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcții neperiodice

Fie $f$ o funcție definită pe $[0, l]$. Deseori este util ca funcția $f(x)$ să se dezvolte în serie Fourier după cosinusuri sau după sinusuri. Astfel, $f(x)$ se prelungește pe $[-l, 0]$, astfel încît funcția nouă $F(x)$ obținută, să fie pară sau impară pe intervalul $[-l, l]$, în dependență de problema pusă (adică avem nevoie de descompunere după cosinusuri sau după sinusuri).

Fie, că trebuie să descompunem funcția $f(x)$ în serie după cosinusuri. Deci, $F(x)$ trebuie să fie pară. Efectuăm prelungirea pe $[-l, 0]$: $F(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-l, 0] \\ f(x), & x \in [0, l] \end{cases}$.




Dacă funcția dată $f(x)$ verifică condițiile Dirichlet pe intervalul $[0, l]$, atunci $F(x)$ va îndeplini aceste condiții pe intervalul $[-l, l]$. Obținem $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$, cu

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx,\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Atunci, pe intervalul $(0, l)$ în punctele de continuitate $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$, cu coeficienții găsiți mai sus.

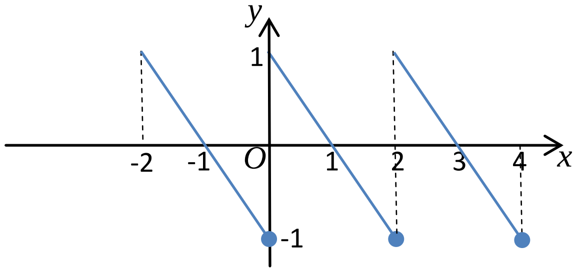
Analog se procedează cînd se cere descompunerea după sinusuri: $F(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-l, 0] \\ f(x), & x \in [0, l] \end{cases}$, $F(x)$ fiind impară și $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, cu

$$a_n = 0,\; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Astfel, în orice punct de continuitate pe $(0, l)$ avem descompunerea după sinusuri a funcției $f(x)$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

**Exemplu**. Să se dezvolte în serie Fourier după sinusuri funcția $f(x)=1-x,\ x\in[0,1)$.

**Soluție**. Efectuînd o prelungire impară pe $(-1,0)$ a funcției $f(x)$, obținem: $F(x)=\begin{cases}-1-x, & x\in(-1,0)\\ 1-x, & x\in[0,1)\end{cases}$ cu graficul:




Avem: $b_n=2\int_0^1(1-x)\sin(n\pi x)\,dx=\dfrac{2}{n\pi}$. Deci, pe $(0,1]$ avem: $1-x=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\pi x)}{n}$.