NC 4.2.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I REZOLVABILE ÎN CUADRATURI

Ecuații diferențiale de ordinul I. Soluții generale, particulare singulare

Definiție. Se numește **ecuație diferențială de ordinul I**, ecuația de forma $F(x, y, y') = 0$, unde x este variabila independentă, $y = y(x)-$ funcția necunoscută, $y'-$ derivata ei, F - o funcție definită pe careva domeniu $G \subseteq R^3$.

Dacă ecuația $F(x, y, y') = 0$ poate fi rezolvată în raport cu y', atunci putem scrie $y' = f(x, y)$. Deseori este considerată ecuația diferențială echivalentă ei, anume $dy - f(x, y)dx = 0$ sau, mai general, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Din definiția soluției ecuației diferențiale de ordinul *n*, rezultă imediat definiția soluției ecuației diferențiale de ordinul I.

Din exemplele expuse în tema NC 4.1. este evident că o ecuație diferențială poate avea o infinitate de soluții. Pentru a evidenția o soluție anumită a ecuației diferențiale, trebuie de ”cerut” o **condiție inițială**, care constă în faptul că pentru careva valoare x_0 a lui *x* este dată prealabil valoarea y_0 a lui $y(x)$: $y\big|_{x=x_0} = y_0$ sau $y(x_0) = y_0$. Geometric ar însemna că, fiind dat punctul $M_0(x_0, y_0)$, trebuie să se găsească curba integrală ce trece prin M_0.

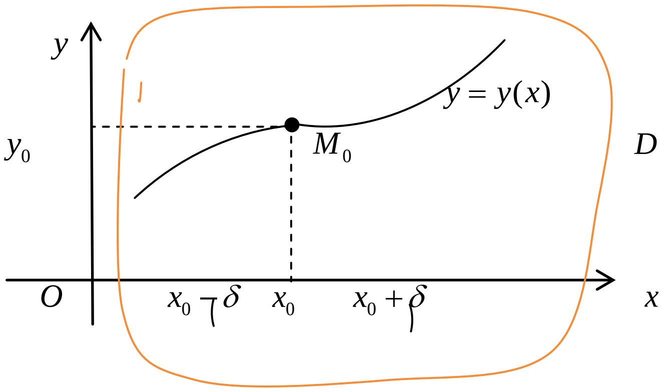
Definiție. Se numește **problemă Cauchy** a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$, problema găsirii soluției ecuației diferențiale, care verifică condițiile inițiale $y(x_0) = y_0$.

Exemplu: Fie problema Chauchy $y' - 4x^3 = 0,\ y(-1) = 4$.

Funcțiile $y = x^4 + C,\ C \in R$, sunt soluții ale ecuației. Să găsim $C \in R$ astfel încît $y(-1) = 4$. Avem $4 = (-1)^4 + C \Rightarrow C = 3$ Astfel $y = x^4 + 3$ este soluția problemei Cauchy.

Teoremă (**de existență și unicitate a problemei Cauchy**): Fie ecuația $y' = f(x, y)$. Dacă funcțiile $f(x, y)$ și și $f'_y(x, y)$ sunt continui în careva domeniu $D \subset R^3$, $(x_0, y_0) \in D$, atunci în careva vecinătate $|x - x_0| < \delta$ a punctului x_0 există o singură soluție $y = y(x)$, care satisface condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

Geometric aceasta înseamnă, că prin $M_0(x_0, y_0)$ trece o singură integrală.



Teorema de mai sus are un caracter local: ea garantează existența unei soluții $y = y(x)$ într-o careva vecinătate a lui x_0. Din teorema de mai sus rezultă, că ecuația diferențială are o infinitate de soluții diferite (de exemplu, una este dacă curba integrală trece prin (x_0, y_0) , alta dacă trece prin (x_0, y_1)).

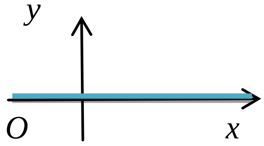
Exemple:

1) Fie ecuația $y' = x + y$. Atunci funcția $f(x, y) = x + y$ este definită și continuă împreună cu derivata parțială $f_y' = 1$ în toate punctele planului Oxy. Astfel, pentru orice condiție inițială dată există o singură soluție a acestei ecuații, verifică această condiție.

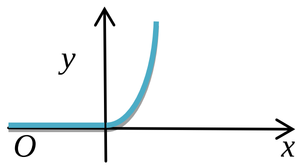
2) Fie ecuația $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Avem că funcția $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ este continuă în orice punct din planul Oxy, dar funcția $f_y'(x, y) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ (care nu este nici măcar definită peste tot pe Oxy) nu este continuă în nici un punct de pe axa $Ox(y = 0)$). Vom arăta, că există cel puțin 2 curbe integrale, care trec prin orice punct de pe axa Ox.

Evident, $y = (x + C)^3$, $C \in R$, este soluție a ecuației diferențiale date. În afară de aceasta $y \equiv 0$ (atenție!!!) este soluție, care nu poate fi obținută din soluția $y = (x + C)^3$, oricare ar fi $C \in R$. Dacă vom căuta soluțiile acestei ecuații, cu condițiile inițiale $y(0) = 0$, atunci soluții de acestea sunt o infinitate, printre care:

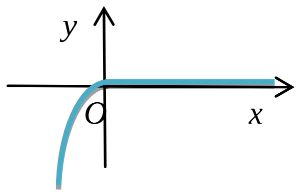
- $y \equiv 0$



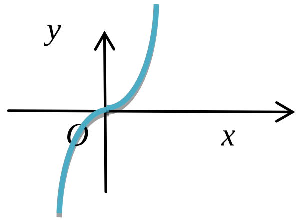
- $y = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^3, x > 0 \end{cases}$



- $y = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ 0, x \geq 0 \end{cases}$



- $y = x^3$



Astfel în orice punct de pe Ox este încălcată unicitatea soluției. Dacă vom lua punctul $M(1,1)$, atunci într-o vecinătate mică a lui $x=1$ există o singură curbă integrală a ecuației diferențiale $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Definiție. Se numește **soluție generală** a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ în careva domeniu D de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy funcția $y = y(x, C)$ ce depinde de x, iar C este parametru astfel încît

1) $y(x, C)$ verifică ecuația pentru orice $C \in R$;

2) oricare ar fi condiția inițială $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$, se poate de găsit o valoare C_0 a lui C astfel încît soluția $y = y(x, C_0)$ să verifice condiția inițială, adică $y(x_0, C_0) = y_0$.

Uneori, în procesul găsirii soluției generale a ecuației diferențiale, obținem o relație de forma $\Phi(x, y, C) = 0$, care nu-i rezolvată în raport cu y și care se numește **integrală generală** a ecuației.

Definiție. Se numește **soluție particulară** a ecuației diferențiale, orice soluție $y = y(x, C_0)$, care se obține din cea generală pentru careva valoare C_0 a constantei C. Analog, $\Phi(x, y, C_0) = 0$ se numește **integrală particulară**.

Geometric, soluția generală reprezintă o familie de curbe integrale, care depinde de parametrul C, iar soluția particulară reprezintă o curbă din această familie.

Definiție. Orice soluție a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$, care nu se obține din soluția generală și în fiecare punct al căreia nu se respectă unicitatea soluției, se numește **soluție singulară** a acestei ecuații.

Exemplu. Pentru ecuația diferențială $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ avem că $y = (x + C)^3$ este soluție generală, iar $y \equiv 0$ este o soluție singulară.

Sensul geometric al ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$

Fie, că $f(x, y)$ verifică condițiile teoremei de existență și unicitate în D. Ecuația $y' = f(x, y)$ definește în fiecare punct $(x, y) \in D$ valoarea y',adică **panta tangentei** la curba integrală (soluția generală) în acest punct. Se spune , că ecuația $y' = f(x, y)$ definește un cîmp de direcții. Pentru a-l construi trebuie ca în orice $(x_0, y_0) \in D$ de prezentat direcția tangentei prin careva segment. Totalitatea acestor segmente ilustrează geometric “tabloul” cîmpului de direcții.

Problema integrării ecuației diferențiale poate fi formulată astfel:

să se găsească o astfel de linie, astfel încît tangenta în orice punct al ei să aibă direcția, identică cu direcția cîmpului în acest punct. Această tratare a ecuației diferențiale și a integrării ecuației diferențiale generează o **metodă grafică** de rezolvare a ecuației diferențiale.

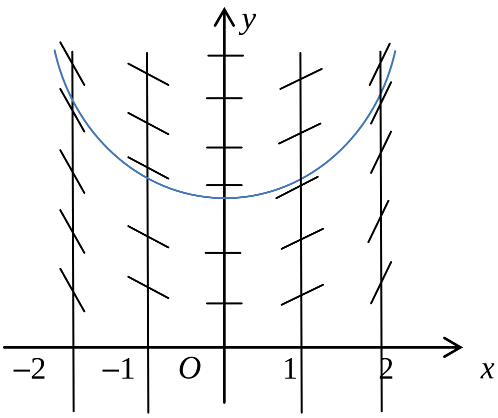
Pentru construirea curbelor integrale se folosesc **izoclinele**.

Definiție. Se numește **izoclină** locul geometric al punctelor planului Oxy, în care tangentele la curbele integrale au una și aceeași direcție $y' = const$.

Din definiție rezultă că familia izoclinelor ecuației diferențiale este determinată de ecuațiile $f(x, y) = k$, unde k este parametru. Dacă k primește valori numerice apropiate, pot fi găsite izocline ”dese”, care ar permite construirea aproximativă a curbelor integrale.

Exemplu. Să se integreze ecuația diferențială $y' = x$ cu ajutorul izoclinelor.

Familia izoclinelor este: $x = k, (x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2$.



Există anumite ecuații de formă particulară, des întîlnite în aplicații, pentru care s-au găsit metode de rezolvare cu ajutorul cărora soluția se exprimă folosind primitive ale unor funcții. În acest caz spunem că **ecuația se rezolvă în cuadraturi** (**integrări**).

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I REZOLVABILE ÎN CUADRATURI

În cele ce urmează vom menționa cîteva tipuri de ecuații diferențiale ordinare, rezolvate prin cuadraturi.

Amintim, că o ecuație diferențială ordinară de ordinul I poate fi scrisă sub forma $y' = f(x, y)$, sau $F(x, y, y') = 0$, sau forma diferențială $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Ecuații diferențiale separabile

Definiție. Se numește ecuație diferențială cu **variabile separate** o ecuație de forma: $M(x)dx = N(y)dy$, unde $M(x), N(y)$ sunt funcții date continui.

Această ecuație se rezolvă integrînd ambele părți după argumentul respectiv: $\int M(x)dx = \int N(y)dy$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $xdx = -ydy$.

Avem $\int xdx = -\int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ sau $x^2 + y^2 = C$ – integrala generală.

Notă: Deseori la integrare constanta poate fi scrisă sub forma : $\ln C$, sau $\ln|C|$, sau $\frac{C}{\alpha}, \alpha \in R^*$ etc.

Definiție. Se numește ecuație diferențială cu **variabile separabile** ecuația de forma: $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$ sau $y' = f(x) \cdot g(y)$.

În domeniul în care $M_2(x)$ și $N_1(y)$ sunt nenule, putem scrie: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$ – o ecuație cu variabile separate. Atunci $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

Putem scrie

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0 \Leftrightarrow x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{y}{1+y^2}dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{y}{1+y^2}dy \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + \frac{1}{2}\ln|C| .$$

De unde $\ln\left|1+x^2\right| = \ln\left|C(1+y^2)\right| \Rightarrow$ $1 + x^2 = C(1+y^2)$ – integrala generală, sau $\frac{1+x^2}{1+y^2} = C,\ C > 0$.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I REZOLVABILE ÎN CUADRATURI

În cazul în care avem o ecuație diferențială de forma $y' = f(x)\cdot g(y)$ putem scrie: $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ și $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ – o ecuație cu variabile separate (în domeniul în care $g(y)\neq 0$). De unde $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$.

Putem scrie $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-1)^2}$ sau $\frac{dy}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = dx$, unde $y \neq 1$. Avem $\int (y-1)^{-\frac{2}{3}}dy = \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(y-1)^{\frac{1}{3}} = x + C$ sau $y = \left(\frac{x}{3}+C\right)^3 + 1$ – soluție generală.

Din ecuația inițială, evident $y=1$ este soluție singulară (nu rezultă din soluția generală oricare ar fi valoarea lui C).

Ecuații diferențiale omogene și reductibile la omogene

Definiție. Ecuația diferențială $y' = f(x,y)$ se numește omogenă, dacă funcția $f(x,y)$ este omogenă de gradul zero, adică $f(tx,ty) = f(x,y)$.

Dacă $y' = f(x,y)$ este o ecuație diferențială omogenă, atunci putem scrie: $y' = f(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})$. Cum $f(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, atunci putem nota $\frac{y}{x} = u = u(x)$. De unde $y = u\cdot x$ și $y' = u'x + u$. Ecuația capătă forma: $u'x + u = f(1,u)$ sau $u' = f(1,u) - u$ – o ecuație cu variabile separabile.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $x\cdot y' = y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$.

Putem scrie $y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$ și evident $f(tx,ty) = f(x,y)$. Punem $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = u\cdot x$ și $y' = u'x + u$. Înlocuind în ecuație, obținem:

$$u'x + u = u(1+\ln u) \Leftrightarrow u'x + u = u + u\ln u \Leftrightarrow u'x = u\ln u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = u\ln u \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u\ln u} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{du}{u\ln u} = \int x\,dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow \ln|\ln u| = \frac{x^2}{2} + C$$

sau $\ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| = \frac{x^2}{2} + C$ – integrala generală.

Notă: Uneori ecuația omogenă mai este scrisă sub forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, unde $P(x,y)$ și $Q(x,y)$ sunt funcții omogene de același ordin, adică $P(tx,ty)=t^nP(x,y)$ și $Q(tx,ty)=t^nQ(x,y)$.

În acest caz, avem $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, iar funcția $f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ este omogenă de grad zero.

Exemplu. $(x+y)dy=(y-x)dx$.

Avem $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{y-x}{y+x}$. $P(x,y)=y-x$ și $Q(x,y)=y+x$ sunt funcții omogene de grad 1. Funcția $f(x,y)=\frac{y-x}{y+x}$ este omogenă de grad zero. Punem $y=u\cdot x$. Avem $y'=u'x+u$ și

$$u'x+u=\frac{ux-x}{ux+x}\Leftrightarrow u'x=\frac{x(u-1)}{x(u+1)}-u\Leftrightarrow u'x=\frac{-u^2-1}{u+1}\Leftrightarrow \frac{du}{dx}\cdot x=-\frac{u^2+1}{u+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow \int\left(\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{u^2+1}\right)du=-\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right|+\operatorname{arctg}u=\ln|C|-\ln|x|\Leftrightarrow \ln\sqrt{u^2+1}+\operatorname{arctg}u=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\Leftrightarrow \operatorname{arctg}u=\ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|.$$

Revenim la notația $u=\frac{y}{x}$, avem $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{C}{\sqrt{y^2+x^2}}\right|$ – integrala generală.

Fie ecuația $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ cu $c_1^2+c_2^2>0$ (dacă $c_1=c_2=0$, atunci ecuația este deja omogenă).

Dacă $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, facem schimbul de variabile $x=x_1+h,\ y=y_1+k$, unde (h,k) este soluție a sistemului $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$, care duce la ecuația omogenă $y_1'=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_2+b_2y_2}\right)$.

Dacă $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, atunci $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$ și $a_2=\lambda a_1, b_2=\lambda b_1$. Obținem:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)}\right)=\varphi(a_1x+b_1y).$$

Cu ajutorul notației $a_1x+b_1y=z$, care implică relația $z'=a_1+b_1y'$, obținem o ecuație cu variabile separabile $z'=a_1+b_1\varphi(z)$.

Ecuații liniare de ordinul I. Ecuații Bernoulli

Definiție. Se numește **ecuație liniară de ordinul I** ecuația liniară față de funcția necunoscută y și derivata ei: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$.

Dacă $q(x)\equiv 0$, atunci ecuația se numește **omogenă**, altfel se numește **neomogenă**.

Ecuațiile liniare omogene $y' + p(x)\cdot y = 0$ sunt de fapt ecuații cu variabile separabile, care se rezolvă astfel: $y' = -p(x)\cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)d\,x \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Una din metodele de rezolvare ale ecuațiilor liniare este metoda Bernoulli, se caută soluția sub forma $y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v$. Atunci $y' = u'v + uv'$. Înlocuind în ecuație, obținem: $u'v + uv' + p(x)\cdot uv = q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + p(x)\cdot v) = q(x)$. Alegem (!) funcția $v(x)$ (concretă), astfel încît expresia din interiorul parantezei să se transforme în zero, adică $v' + p(x)\cdot v = 0$ – o ecuație liniară omogenă cu soluția $v = e^{-\int p(x)dx}$. Atunci $u'v = q(x)$ și $u' = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$ și separînd variabilele, găsim $u(x)$ și respectiv y.

Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy: $y' + \frac{3}{x}\cdot y = x^3 + x,\ y(-1) = 0$.

Soluție. Căutăm soluția sub forma $y = u\cdot v$. De unde $y' = u'v + uv'$. Avem $u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = x^3 + x \Rightarrow\ \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{3v}{x}\right) = x^3 + x$.

Găsim v din condiția: $v' + \frac{3v}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{3}{x}dx \Leftrightarrow \ln|v| = -3\ln|x|$ sau $v = \frac{1}{x^3}$.

Avem $u'v = x^3 + x \Rightarrow u'\cdot\frac{1}{x^3} = x^3 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^6 + x^4 \Rightarrow \int du = \int\left(x^6 + x^4\right)dx \Rightarrow u = \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + C$.

Astfel $y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + C\right)$ sau $y = \frac{x^4}{7} + \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$ – soluție generală.

Găsim soluția particulară din condiția inițială $y(-1) = 0$:

$0 = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - C \Rightarrow C = \frac{12}{35} \Rightarrow y = \frac{x^4}{7} + \frac{x^2}{5} + \frac{12}{35x^3}$ – soluția particulară.

Altă metodă de rezolvare a ecuațiilor liniare este **metoda Lagrange** (metoda **variației constantei**).

Fie $y_0 = C\cdot e^{-\int p(x)dx}$ soluția generală a ecuației omogene $y' + p(x)y = 0$, asociate ecuației liniare neomogene $y' + p(x)y = q(x)$.

Mai departe, considerăm C ca funcție de x, adică $C(x)$. Atunci $y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$. Vom înlocui această funcție în ecuația inițială, de unde vom găsi $C(x)$.

În exemplu de mai sus $y' + \frac{3}{x}\cdot y = x^3 + x$ ecuația omogenă asociată este: $y' + \frac{3}{x}\cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{3}{x}dx \Leftrightarrow \ln|y| = -3\ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x^3}\right| \Leftrightarrow y_0 = \frac{C}{x^3}$ – soluția generală a ecuației omogene.

Fie $y = \frac{C(x)}{x^3}$. Să găsim $C(x)$. Avem $y' = \frac{C'(x)\cdot x^3 - 3x^2\cdot C(x)}{x^6}$. Înlocuim y' și y în ecuația inițială:

$$\frac{C'(x)\cdot x^3 - 3x^2\cdot C(x)}{x^6} + \frac{3}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^3} = x^3 + x \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4} + \frac{3C(x)}{x^4} = x^3 + x \Leftrightarrow C'(x) = x^6 + x^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \int\left(x^6 + x^4\right)dx \Leftrightarrow C(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \tilde{C}.$$

Atunci $y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \tilde{C}\right)$ sau $y = \frac{x^4}{7} + \frac{x^2}{5} + \frac{\tilde{C}}{x^3}$ – soluția generală.

Definiție. Se numește **ecuație Bernoulli**, ecuația de forma: $y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}, \alpha \in R\setminus\{0,1\}$.

Ecuația Bernoulli poate fi rezolvată prin trei metode:

a) **metoda Bernoulli**: se caută soluția sub forma $y = u\cdot v$;

b) **metoda Lagrange** (de variație a constantei);

c) se face **substituția** $z = y^{1-\alpha}$, care ne duce la o ecuație liniară față de z' și z.

Ecuații în diferențiale totale. Factorul integrant

Definiție. Ecuația diferențială de forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, unde partea stîngă a ecuației reprezintă diferențiala totală a unei funcții $u(x,y)$, definită pe un domeniu $D\subset R^2$, se numește **ecuație cu diferențiale totale** (exactă).

În acest caz soluția generală a ecuației va avea formă implicită $u(x,y) = C$, unde C este o constantă arbitrară.

Teoremă. Dacă ecuația $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ este o ecuație cu diferențiale totale și $P(x,y), Q(x,y)$ au derivate parțiale pe domeniul simplu conex D cu P'_y, Q'_x continui, atunci are loc egalitatea $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$. Și invers, dacă $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$, atunci avem o ecuație în diferențiale totale.

Într-adevăr, dacă $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, atunci $u'_x(x,y)=P(x,y),\ u'_y(x,y)=Q(x,y)$. Cum $u''_{xy}=u''_{yx}\Rightarrow P'_y=Q'_x$.

Fie , că se cere găsirea funcției $u(x,y)$. O metodă de găsire este prezentată la tema ”Integrale curbilinii de speța II” (vezi NC 3.5.).

Vom arăta altă metodă de găsire a lui $u(x,y)$.

Avem $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ și $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. Fie $(x_0,y_0)\in D$. Integrînd prima egalitate după x, avem: $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$, unde $\varphi(y)$ este o funcție arbitrară ce nu depinde de x, dar care trebuie găsită. Derivînd ultima relație după y, avem $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}P'_y(x,y)dx+\varphi'_y(y)=\int\limits_{x_0}^{x}Q'_x(x,y)dx+\varphi'_y(y)$. De unde $Q(x,y)=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'_y(y)$. Astfel $\varphi'_y(y)=Q(x_0,y)\Rightarrow\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$. Deci, $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$ și integrala generală a ecuației este $\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$.

Analog, putem demonstra formula $\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

Soluție. Avem $P(x,y)=x+\sin y,\ Q(x,y)=x\cos y+\sin y$. $P'_y=\cos y,\ Q'_x=\cos y$ și $P'_y=Q'_x$. Deci avem o ecuație în diferențiale totale. Luăm $(x_0,y_0)=(0,0)$. Atunci $u(x,y)=\int\limits_{0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{0}^{y}Q(0,y)dy=\int\limits_{0}^{x}(x+\sin y)dx+\int\limits_{0}^{y}(0\cdot\cos y+\sin y)dy=\dfrac{x^2}{2}+x\sin y-\cos y+1$ și soluția ecuației diferențiale este $\dfrac{x^2}{2}+x\sin y-\cos y=C$.

Factorul integrant. Fie că ecuația $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ nu este ecuație în diferențiale totale, adică $P'_y\neq Q'_x$. Ne propunem să găsim o funcție $\mu(x,y)$ astfel încît $\mu\cdot P(x,y)dx+\mu\cdot Q(x,y)dy=0$ să fie o ecuație în diferențiale totale. Aceasta înseamnă, că $\left(\mu\cdot P\right)'_y=\left(\mu\cdot Q\right)'_x\Leftrightarrow\mu'_y\cdot P+\mu\cdot P'_y=\mu'_x\cdot Q+\mu\cdot Q'_x\quad\Leftrightarrow\left(P'_y-Q'_x\right)\cdot\mu=\mu'_x\cdot Q-\mu'_y\cdot P$. Funcția $\mu(x,y)$ se numește **factor integrant.**

Găsirea lui μ se reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale, care este complicată. Astfel, vom examina cazuri particulare ale ultimei ecuații.

Fie, că $\mu=\mu(x)$, adică $\mu'_y=0$. Obținem: $\left(P'_y-Q'_x\right)\cdot\mu=\mu'_x\cdot Q\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx$. Dacă $\frac{P'_y-Q'_x}{Q}$ depinde numai de x, ultima ecuație este privită ca o ecuație cu variabile separabile, atunci $\ln|\mu|=\int\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx$. Putem lua $\mu=e^{\int\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx}$.

În mod analog, dacă considerăm $\mu=\mu(y)$ și cerem ca $\frac{P'_y-Q'_x}{P}$ să fie funcție numai de y, atunci $\ln|\mu|=\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy$ și luăm $\mu=e^{\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy}$.

Notă: Uneori putem considera cazuri cînd factorul integrant are și alte forme: $\mu(x\pm y),\ \mu\left(x^2\pm y^2\right),\ \mu\left(\frac{y}{x}\right)$ etc.

Exemplu. $(2xy\ln y+y^2\cos x)dx+(x^2+y\sin x)dy=0$.

Soluție. $P(x,y)=2xy\ln y+y^2\cos x$, $Q)(x,y)=x^2+y\sin x$ și

$P'_y=2x(\ln y+1)+2y\cos x$, $Q'_x=2x+y\cos x$ și

$P'_y-Q'_x=2x\ln y+2x+2y\cos x-2x-y\cos x=2x\ln y+y\cos x$.

Avem că $\frac{P'_y-Q'_x}{P}=\frac{2x\ln y+y\cos x}{2xy\ln y+y^2\cos x}=\frac{1}{y}$ depinde numai de y. Găsim $\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy=-\int\frac{1}{y}dy=-\ln|y|$. Astfel $\ln|\mu|=-\ln|y|\Rightarrow\mu=\frac{1}{y}$. Înmulțim ecuația inițială cu $\mu=\frac{1}{y}$, avem: $\left(2x\ln y+y\cos x\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+\sin x\right)dy=0$. Aici

$$P(x,y)=2x\ln y+y\cos x,\ Q(x,y)=\frac{x^2}{y}+\sin x \text{ și } P'_y=\frac{2x}{y}+\cos x,\ Q'_x=\frac{2x}{y}+\cos x\Rightarrow P'_y=Q'_x.$$

Considerăm $(x_0,y_0)=(0,1)$. Atunci

$$u(x,y)=\int_0^x\left(2x\ln y+y\cos x\right)dx+\int_1^y\left(\frac{0^2}{y}+\sin 0\right)dy=x^2\ln y+y\sin x.$$

Deci $x^2\ln y+y\sin x=C$ este integrala generală.