Integrale de suprafață de speța a doua

1. Suprafețe orientate. Fie σ o suprafață în spațiul $\mathbf{R}^3$, frontiera căreia este Γ. Notăm cu P un punct arbitrar de pe σ și cu $\vec{n}(P)$ - un vector unitar normal la σ în acest punct. Dacă la deplasarea punctului P pe orice linie continue închisă, care nu intersectează frontiera Γ, vectorul $\vec{n}(P)$, schimbându-se în mod continuu, revine la poziția inițială, atunci suprafața σ se numește *bilaterală.* Dacă însă, mișcându-se pe o linie închisă, vectorul $\vec{n}(P)$ își schimbă direcția, atunci când punctul P revine în poziția inițială, suprafața se numește *unilaterală.*

Exemple de suprafețe bilaterale sunt: planul, suprafața sferică, suprafața definită de ecuația $z = z(x, y), (x, y) \in D,$ unde $z(x, y), z'_x, z'_y$ sunt funcții continue pe domeniul D (fig. 1). Un exemplu de suprafață unilaterală este *foaia lui Möbius* (fig. 2).

În cazul unei suprafețe bilaterale se afirmă că ea are două fețe. O suprafață bilaterală se numește *orientată*, dacă se alege o față a ei. Alegerea unei fețe (orientarea suprafeței) se poate face prin alegerea unui vector unitar normal la suprafața dată în careva punct al ei. Acest vector indică fața aleasă a suprafeței.

Pentru o suprafață sferică avem fața interioară și fața exterioară ale ei (fig. 3). Dacă suprafața este o parte dintr-un plan orizontal, atunci putem vorbi despre fata de sus și fata de jos ale lui (fig. 4).

2. Definiția integralei de suprafață de speța a doua. Fie σ este o suprafață orientată, netedă pe părți și mărginită de linia închisă Γ, iar $\vec{F}$ este o funcție vectorială:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \quad (1)$$

definită în toate punctele suprafeței σ. Divizăm, în mod aleator, suprafața σ în n părți: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ cu ajutorul unor linii netede pe părți și notăm cu $\Delta\sigma_i$, aria părții σ_i, $i=1,2,\ldots,n$. În fiecare σ_i alegem, la fel în mod întâmplător, câte un punct $P_i(x_i,y_i,z_i)$ și notăm cu $\vec{n}(P_i)$ vectorul unitar normal la σ în punctul dat, direcția căruia coincide cu direcția vectorului normal, care definește fata aleasă a suprafeței σ (fig. 5).

Suma

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(P_i),\vec{n}(P_i))\Delta\sigma_i, \ (2)$$

aici cu $(\vec{F},\vec{n})$ este notat produsul scalar al acestor doi vectori, se numește *sumă integrală* a funcției $\vec{F}$ pe suprafața σ. Dacă există limita finită a sumelor integrale când $\lambda=\max\{\text{diam}\sigma_i\}\to 0$, care nu depinde nici de modul de divizare a suprafeței σ în părți, nici de alegerea punctelor P_i, atunci această integrală se numește *integrală de suprafață de speța a doua* a funcției vectoriale $\vec{F}$ pe suprafața orientată σ și se notează cu $\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})d\sigma$. Din definiție rezultă că

$$\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(P_i),\vec{n}(P_i))\Delta\sigma_i. \ (3)$$

3. Sensul fizic al integralei de suprafață de speța a doua

Fie că $\vec{F}(x,y,z)$ este viteza unui lichid în punctul arbitrar (x,y,z), care curge prin suprafața orientată σ în direcția pozitivă a ei, adică în direcția indicată de vectorul normal $\vec{n}$. Atunci mărimea

$$(\vec{F}(P_i),\vec{n}(P_i)) = \left|\vec{F}(P_i)\right|\cdot\left|\vec{n}(P_i)\right|\cdot\cos(\vec{F}(P_i)\wedge\vec{n}(P_i)) = \left|\vec{F}(P_i)\right|\cos(\vec{F}(P_i)\wedge\vec{n}(P_i))$$

este o valoare aproximativă a cantității (volumului) de lichid care trece prin σ_i într-o unitate de timp (fig. 6). Suma integrală (2) este o valoare aproximativă a cantității de lichid care trece prin suprafața σ în direcția aleasă a ei. Pentru a obține valoarea exactă a acestei cantități Φ trecem la limita sumelor integrale când $\lambda\to 0$. În rezultat obținem:

$$\Phi = \iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})d\sigma. \ (4)$$

Mărimea Φ se numește *flux* al vectorului $\vec{F}$ prin suprafața orientată σ.

4. Proprietăți

1. Dacă schimbăm orientarea suprafeței σ, atunci integrala de suprafață de speța a doua își schimbă semnul, fără a-și schimba valoarea absolută. Dacă o față a suprafeței o numim *pozitivă* și o notăm cu σ^+, iar cealaltă față o numim *negativă* și o notăm cu σ^-, atunci această proprietate poate fi scrisă în forma:

$$\iint_{\sigma^+} (\vec{F},\vec{n})d\sigma = -\iint_{\sigma^-} (\vec{F},\vec{n})d\sigma .$$

Aceasta rezultă din faptul că la schimbarea orientării suprafeței își schimbă direcția în direcție opusă vectorul normal, care indică fata aleasă a suprafeței și deci produsul scalar $(\vec{F},\vec{n})$ își schimbă semnul, fără a-și schimba valoarea absolută.

Observație. Integrala de suprafață de speța întâia este invariantă în raport cu alegerea orientării suprafeței respective.

2. $\iint_\sigma (C\cdot\vec{F},\vec{n})d\sigma = C\cdot\iint_\sigma (\vec{F},\vec{n})d\sigma$, aici C este o constantă.

3. $\iint_\sigma (\overrightarrow{F_1}\pm\overrightarrow{F_2},\vec{n})d\sigma = \iint_\sigma (\overrightarrow{F_1},\vec{n})d\sigma \pm \iint_\sigma (\overrightarrow{F_2},\vec{n})d\sigma$.

4. Dacă suprafața σ este divizată în două suprafețe σ_1 și σ_2, cu ajutorul unei linii netede pe porțiuni, care nu au puncte comune interioare, atunci

$$\iint_\sigma (\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\vec{F},\vec{n})d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\vec{F},\vec{n})d\sigma .$$

5. Teorema despre valoarea medie. Dacă funcția vectorială $\vec{F}(x,y,z)$ este continue în toate punctele suprafeței netede σ, aria căreia este $A(\sigma)$, atunci există un punct $P^*\in\sigma$ astfel încât

$$\iint_\sigma (\vec{F},\vec{n})d\sigma = (\vec{F}(P^*),\vec{n}(P^*))\cdot A(\sigma).$$

5. Integrala de suprafață de speța a doua în coordonate rectangulare.

Fie $\vec{n}$ vectorul unitar normal, care indică fața (orientarea) suprafeței σ. Notăm cu $(\vec{n},\hat{}\,Ox)$, $(\vec{n},\hat{}\,Oy)$ și $(\vec{n},\hat{}\,Oz)$ unghiurile formate de vectorul $\vec{n}$ cu axele de coordonate Ox, Oy și, respectiv Oz. Atunci

$$\vec{n} = \cos(\vec{n},\hat{}\,Ox)\,\vec{i} + \cos(\vec{n},\hat{}\,Oy)\,\vec{j} + \cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)\,\vec{k}\,.$$

Din formula de calcul al produsului scalar al vectorilor, egalitatea precedentă, egalitățile (1), și (3) rezultă egalitatea

$$\iint_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma}[P\cos(\vec{n},\hat{}\,Ox) + Q\cos(\vec{n},\hat{}\,Oy) + R\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)]d\sigma. \ (5)$$

Partea dreaptă a egalității (5.5) se numește *integrală de suprafață de speța a doua în coordonate rectangulare*. Această integrală reprezintă suma a trei integrale de suprafață de speța a doua:

$$\iint_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma}P(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{}\,Ox)d\sigma + \iint_{\sigma}Q(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{}\,Oy)d\sigma +$$
$$+ \iint_{\sigma}R(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)d\sigma. \ (6)$$

6. Calculul integralei de suprafață de speța a doua. Vom deduce formula de calcul a integralei

$$\iint_{\sigma}R(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)d\sigma. \ (7)$$

Fie că suprafața σ are ecuația

$$z = z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\subset Oxy,\ (8)$$

unde D_{xy} este proiecția suprafeței σ pe planul Oxy. Conform definiției integralei de suprafață de speța a doua avem

$$I_3 = \iint_{\sigma}R(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z(x_i,y_i))\,\cos(\vec{n}_i,\hat{}\,Oz)\Delta\sigma_i,$$

unde $\vec{n}_i = \vec{n}\,(x_i,y_i,z(x_i,y_i))$. Deoarece $\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)\Delta\sigma_i \approx \pm|\Delta\sigma_{xy}|_i$, unde $|\Delta\sigma_{xy}|_i$ este aria proiecției pe planul Oxy a părții σ_i a suprafeței σ, avem

$$I_3 = \pm\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z(x_i,y_i))\left|\Delta\sigma_{xy}\right|_i,$$

unde $\lambda_1 = \max\{\mathrm{diam}\,|\Delta\sigma_{xy}|_i\}$, semnul "+" se obține când $\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)\geq 0$ și "−" când $\cos(\vec{n},\hat{}\,Oz)\leq 0$. Sumele integrale precedente sunt sume integrale ale funcției $R[x,y,z(x,y)]$ pe domeniul plan $D_{xy}\subset Oxy$, iar limita lor este o integrală dublă pe acest domeniu.

Deci

$$\iint_\sigma R(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Oz)\,d\sigma = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,dxdy. \quad (9)$$

Similar se demonstrează că dacă suprafața σ are ecuația

$$x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}\subset Oyz, \quad (10)$$

atunci

$$\iint_\sigma P(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Ox)\,d\sigma = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,dydz \quad (11)$$

și dacă suprafața σ are ecuația

$$y=y(x,z),\ (x,z)\in D_{xz}\subset Oxz, \quad (12)$$

atunci

$$\iint_\sigma Q(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Oy)\,d\sigma = \pm\iint_{D_{xz}} Q[x,y(x,z),z]\,dxdz \quad (13)$$

Datorită formulelor (9), (11) și (13) integralele de suprafață de speța a doua se notează și astfel:

$$\iint_\sigma P(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Ox)\,d\sigma = \iint_\sigma P(x,y,z)\,dydz,$$

$$\iint_\sigma Q(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Oy)\,d\sigma = \iint_\sigma Q(x,y,z)\,dxdz, \quad (14)$$

$$\iint_\sigma R(x,y,z)\cos(\vec{n},\hat{\ } Oz)\,d\sigma = \iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy,$$

$$\iint_\sigma (\vec{F},\vec{n})\,d\sigma = \iint_\sigma P(x,y,z)\,dydz + \iint_\sigma Q(x,y,z)\,dxdz + \iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy. \quad (15)$$