- INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE SPEȚA I

Integrale de suprafață de speța întâi

Integrala de suprafață de speța întâia reprezintă o generalizare a integralei duble, tot așa cum, de exemplu, integrala curbilinie de speța întâia reprezintă o generalizare a noțiunii de integrală definită.

Problemă: Să se determine masa unei suprafețe materiale neomogene S, netedă pe părți și de arie finită (*suprafață cuadrabilă*), dacă este cunoscută densitatea de repartiție a masei $\mu(x, y, z)$ pe o unitate de suprafață, funcția $\mu(x, y, z)$ fiind o funcție continuă în punctele suprafeței S (Vezi Fig.1).

$$m_S = \iint_S \mu(x,y,z)dS \quad (1)$$

1. Definiția integrale de suprafață de speța întâia.

Fie $f(x,y,z)$ o funcție mărginită, definită în fiecare punct al unei suprafețe S, netede pe părți. Divizăm această suprafață, în mod arbitrar, cu ajutorul unor linii netede pe porțiuni, în n părți $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ariile cărora sunt, respectiv $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S$. În fiecare din suprafețele elementare S_i alegem, de asemenea în mod arbitrar, câte un punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,\ldots,n$.

Suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \quad (2)$$

se numește *sumă integrală Riemann* a funcției f pe suprafața S. Dacă există limita finită ale sumelor integrale când $\lambda = \max\{\operatorname{diam} S_i\} \to 0$, care nu depinde nici de modul de divizare a suprafeței S în suprafețe elementare, nici de alegerea punctelor P_i în fiecare din domeniile elementare S_i, atunci această limită se numește *integrală de suprafață de speța întâi* și se notează cu simbolul $\iint_S f(x,y,z)dS$ sau $\iint_S f(P)dS$.

Din definiție rezultă

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i \quad (3)$$

2. Sensul geometric.

$$A(S)=\iint\limits_{S} dS\,. \quad (4)$$

3. Sensul fizic. Fie că pe suprafața S, netedă pe părți și cuadrabilă, este repartizată masa cu densitatea de repartiție pe o unitate de suprafață $\mu(x,y,z)$, $\mu(x,y,z)$ fiind o funcție continuă în toate punctele suprafeței S. Atunci

$$m_S=\iint_S \mu(x,y,z)dS\,. \quad (5)$$

4. Condiții de existență a integralei de suprafață de speța întâi

Teorema 1.(Condiție necesară) Dacă funcția $f(x, y, z)$ este integrabilă pe domeniul de integrare S, atunci ea este mărginită pe acest domeniu.

Teorema 2. (Condiție suficientă) Dacă funcția $f(x, y, z)$ este continuă pe domeniul de integrare S atunci ea este integrabilă pe acest domeniu.

Acceptăm ambele teoreme fără demonstrație.

5. Proprietățile de bază ale integralei de suprafață de speța întâia

Proprietățile integralei de suprafață de speța întâi sunt similare proprietăților integralelor definite, duble, triple și ale altor integrale cu definiții similare. De aceea enunțăm câteva proprietăți fără a le demonstra.

Fie S este domeniul de integrare și $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ sunt două funcții continue pe acest domeniu. Atunci:

1. Dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe domeniul S și c este o constantă, atunci, pe acest domeniu, este integrabilă și funcția $c\cdot f(x,y,z)$ și are loc egalitatea

$$\iint_S c\cdot f(x,y,z)dS = c\cdot\iint_S f(x,y,z)dS$$

2. Dacă funcțiile $f(x,y,z)$ și $g(x,y,z)$ sunt integrabile pe domeniul S, atunci este integrabilă pe acest domeniu și suma (diferența) lor și au loc egalitățile

$$\iint_S [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dS =$$

$$=\iint_S f(x,y,z)dS \pm \iint_S g(x,y,z)dS.$$

3. (*Proprietatea de aditivitate*) Dacă domeniul S este divizat în două domenii conexe S_1 și S_2, fără puncte interioare comune, și $f(x,y,z)$ este integrabilă pe S, atunci această funcție este integrabilă pe fiecare din domeniile S_1 și S_2 și are loc egalitatea

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS.$$

4. Dacă funcțiile $f(x,y,z)$ și $g(x,y,z)$ sunt integrabile pe domeniul S și $f(x,y,z) \le g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in S$, atunci

$$\iint_S f(x,y,z)dS \le \iint_S g(x,y,z)dS.$$

5. Dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe domeniul S, atunci este integrabilă pe acest domeniu și funcția $|f(x,y,z)|$ și are loc egalitatea

$$\left|\iint_S f(x,y,z)dS\right| \le \iint_S |f(x,y,z)|dS.$$

6. Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe domeniul S, și $m = \min f(x,y,z), M = \max f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in S$, iar $A(S)$ este aria domeniului S, atunci

$$m \cdot A(S) \le \iint_S f(x,y,z)dS \le M \cdot A(S).$$

7. *(Teorema despre medie)* Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe domeniul S, atunci există un astfel de punct $(x^*, y^*, z^*) \in S$ încât

$$\iint_S f(x,y,z)dS = f(x^*, y^*, z^*) \cdot A(S).$$

Mărimea $f(x^*, y^*, z^*)$ reprezintă valoarea medie a funcției $f(x,y,z)$ pe domeniul S.

6. Calcularea integralei de suprafață de speța întâi.

Fie că funcția $f(x,y,z)$ este continuă pe suprafața netedă S, definită de ecuația sa $z=z(x,y)$, unde $z(x,y)$ și derivatele parțiale ale ei $z'_x(x,y)$ și $z'_y(x,y)$ sunt continue pe domeniu închis D_{xy}, care este proiecția ortogonală univocă a suprafeței S pe planul Oxy.

Divizăm suprafața S în părți $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ariile cărora sunt respectiv $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ și proiecțiile lor pe planul Oxy le notăm cu $D_{1xy}, D_{2xy}, \ldots, D_{nxy}$, care au respectiv ariile $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \ldots, \Delta\delta_n$. Fie $P_i(x_i,y_i,z_i) \in S_i$ și $z_i=z(x_i,y_i)$. Vom arăta că are loc formula(fig. 2):

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1+[z'_x(x_i,y_i)]^2+[z'_y(x_i,y_i)]^2}\,\Delta\delta_i, i=1,\ldots,n.$$

Avem

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z(x_i, y_i)] \cdot \sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2 + [z'_y(x_i, y_i)]^2}\,\Delta\delta_i \quad (6)$$

Suma din partea stângă a acestei egalități este suma integrală Riemann a funcției $f(x,y,z)$ pe suprafața S, iar partea dreaptă este sumă integrală a funcției $f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}$ pe domeniu D. Trecând la limită când $\lambda \to 0$ în egalitatea (6) obținem *formula de calcul a integralei de suprafață de speța întâi* :

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}\,dxdy \quad (7)$$

Sunt de asemenea adevărate formulele:

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+[y'_x(x,z)]^2+[y'_z(x,z)]^2}\,dxdz, \ (8)$$

$$\iint_S f(x(y,z),y,z) = \iint_{D_{yz}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+[x'_y(y,z)]^2+[x'_z(x,y)]^2}\,dydz. \ (9)$$

Formulele (7), (8) și (9) reduc calculul integralei de suprafață de speța întâi la calculul unei integrale duble pe un domeniu din planul Oxy, Oxz și respectiv Oyz.

7. Aplicațiile integralei de suprafață de speța întâi

1) Calculul ariei suprafeței. Aria suprafeței S se calculează după formula (sensul geometric):

$$A(S)=\iint_S dS.(4')$$

2) Calculul masei. Masa m_S a suprafeței S pe care este distribuită masa cu densitatea $\mu(x,y,z)$ pe o unitate de suprafață se calculează după formula (sensul fizic):

$$m_S=\iint_S \mu(x,y,z)dS.(5')$$

3) Calculul momentelor statice, coordonatelor centrului maselor și a momentelor de inerție a unei suprafețe materiale.

Ca și în cazul, de exemplu, integralei duble sau triple, se demonstrează că dacă pe suprafața S este repartizată masa cu densitatea $\mu(x,y,z)$ pe o unitate de suprafață, atunci momentele statice M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}, coordonatele centrului maselor $C(x_c, y_c, z_c)$ și momentele de inerție I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_0 se calculează după formulele:

$$M_{xy} = \iint_S z\mu(x,y,z)dS, M_{xz} = \iint_S y\mu(x,y,z)dS, M_{yz} = \iint_S x\mu(x,y,z)dS;$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m_S}, y_c = \frac{M_{xz}}{m_S}, z_c = \frac{M_{xy}}{m_S};$$

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS, I_y = \iint_S (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dS, I_z = \iint_S (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dS;$$

$$I_{xy} = \iint_S z^2\mu(x,y,z)dS, I_{xz} = \iint_S y^2\mu(x,y,z)dS, I_{yz} = \iint_S x^2\mu(x,y,z)dS;$$

$$I_0 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS.$$

1. Să se calculeze integralele de suprafață de speța întâi:

1) $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, aici S este partea paraboloidului de rotație $z=1-x^2-y^2$, tăiată de planul Oxy;

2) $\iint\limits_S (xy+yz+xz)\,dS$, aici S este suprafața conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$, tăiată de cilindrul $x^2+y^2=2x$;

3) $\iint\limits_S x\,dS$, aici S este suprafața sferică $x^2+y^2+z^2=R^2$, situată în primul octant;