3.5.1 Integrala dublă

Definiţia integralei duble a funcţiei pe un dreptunghi.

Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe dreptunghiul $R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$. Considerăm partiţia segmentului $[a, b]$ în segmente elementare, cu ajutorul punctelor $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$, şi respectiv $[c, d]$ cu ajutorul punctelor $c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n = d$. Dreptele $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, şi $y = y_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, p$, divizează dreptunghiul R în np dreptunghiuri elementare $R_{kl} = [x_{k-1} \leq x \leq x_k] \times [y_{l-1} \leq y \leq y_l]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $l = 0, 1, 2, \ldots, p$, cu laturile paralele cu axe de coordonate. Se spune că s-a efectuat o partiţie Q a dreptungiului R (fig1.1). Notăm: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \times \Delta y_l$ şi

$$\lambda = \max \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Numărul λ se numeşte *diametru al partiţiei* Q. Fie punctul $P_{kl}(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$. Expresia

$$\sigma = \sigma(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l \tag{3.5.1}$$

se numeşte *sumă integrală* (*sumă integrală Riemann*) a funcţiei $f(x, y)$ pe dreptunghiul R, corespunzătoare Q. Dacă există limita finită a sumelor integrale, când $\lambda \to 0$ nu depinde de partiţia a lui R şi de alegerea punctelor $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ se numeşte *integrală dublă* a funcţiei $f(x, y)$ pe dreptunghiul R şi se notează cu $\iint_R f(x, y)dxdy$, sau $\iint_R f(P)dS$.

Din definiţie rezultă că

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l \tag{3.5.2}$$

Dacă există limita finită (3.5.2), atunci se spune că funcţia $f(x, y)$ este *integrabilă (inegrabilă Riemann)* pe dreptunghiul R. În acest caz R se numeşte *domeniu de integrare.*

Teorema 3.5.1. *Dacă funcţia $f(x, y)$ este integrabilă pe dreptunghiul R, atunci ea este mărginită pe acest dreptunghi.*

Într-adevăr, presupunem contrariul, adică fie funcţia $f(x, y)$ este integrabilă pe R şi este nemărginită. Atunci pentru orice partiţie a lui R se va găsi, cel puţin, un dreptunghi elementar $R_{k_0 l_0}$, pe care funcţia $f(x, y)$ este nemărginită. În acest caz punctul (ξ_{k_0}, η_{l_0}) poate fi ales astfel încât $f(\xi_{k_0}, \eta_{l_0}) \Delta x_{k_0} \Delta y_{l_0}$ şi deci şi suma integrală σ poate fi oricât de mare. Aceasta contrazice faptul că există limita finită a sumelor integrale. Din contradicţia obţinută rezultă afirmaţia teoremei.$\square$

Condiţii de existenţă a integralei duble pe un dreptunghi.

Definiţia integralei duble este similară definiţiei integralei definite. Există o analogie între teoriile acestor integrale. Condiţiile de existenţă a integralei duble sunt similare cu cele ale integralei definite cât şi demonstraţiile lor. Menţionăm că sumele *Darboux*, în cazul integralei duble, au forma

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \Delta x_k \Delta y_l, \qquad s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \Delta x_k \Delta y_l x \tag{3.5.3}$$

unde $M_{kl} = \sup f(x,y)$, $m_{kl} = \inf f(x,y)$, $(x,y) \in R_{kl}$.

Teorema 3.5.2. *Condiţia necesară şi suficientă de existenţă a integralei duble pe un dreptunghi.*

Funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe dreptunghiul R atunci şi numai atunci când

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{3.5.4}$$

Pentru o funcţie integrabilă avem

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = \iint\limits_R f(x,y)dxdy. \tag{3.5.5}$$

Teorema 3.5.3. *Condiţii suficiente de existenţă a integralei duble pe un dreptunghi*

1^0 Orice funcţie continuă pe un dreptunghi este integrabilă pe el.

2^0 Dacă funcţia $f(x,y)$ este mărginită pe dreptunghiul R şi mulţimea punctelor ei de discontinuitate are arie nulă, atunci ea este integrabilă pe R.

Definiţia integralei duble pe un domeniu arbitrar.

Fie $f(x,y)$ o funcţie mărginită pe domeniul închis şi mărginit D, frontiera căruia este o linie Γ de arie egală cu zero şi R un dreptunghi care conţine domeniul D şi laturile căruia sunt paralele cu axele de coordonate (fig.1.2). Definim în dreptunghiul R funcţia $F(x,y)$ în felul următor:

$$F(x,y) = f(x,y), \quad \text{dacă } (x,y) \in D, \quad \text{şi } F(x,y) = 0, \quad \text{dacă } (x,y) \in R \backslash D.$$

Se spune că funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D, dacă funcţia $F(x,y)$ este integrabilă pe dreptunghiul R. Numărul $I = \iint\limits_R F(x,y)dxdy$ se numeşte *integrală dublă* a funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul D şi se notează cu $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ sau $\iint\limits_D f(P)dS$.

Teorema 3.5.4. *Condiţii suficiente de existenţă a integralei duble.*

1^0 Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă pe domeniul mărginit şi închis D, atunci ea este integrabilă pe acest domeniu.

2^0 Dacă funcţia $f(x, y)$ este mărginită pe domeniul mărginit şi închis D şi aria mulţimii punctelor de discontinuitate este egală cu zero, atunci f este integrabilă pe D.

Definiţia generală a integralei duble.

Fie în planul Oxy este dat un domeniu D mărginit şi închis şi pe acest domeniu este definită o funcţie $f(x, y)$. Considerăm partiţia domeniului D în $D_1, D_2, \ldots, D_n$ cu ajutorul unor linii netede pe părţi. Notăm cu ΔS_i aria domeniului elementar D_i şi cu d_i diametrul ei, adică $d_i = \max |MN|, \quad M, N \in D_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Din fiecare parte D_i alegem câte un punct $P_i(\xi_i, \eta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$, (fig.1.3). Expresia

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \tag{3.5.6}$$

se numeşte *sumă integrală a funcţiei* $f(x, y)$ pe domeniul D. Dacă există limita finită a sumelor integrale (3.5.6), când $\lambda = \max\limits_i d_i \to 0$, care nu depinde de partiţia domeniului D, de alegerea punctelor P_i, această limită se numeşte *integrală dublă a funcţiei* $f(x, y)$ pe domeniul D şi se notează cu $\iint\limits_D f(P)dS$, sau $\iint\limits_D f(x, y)dS$, sau $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Domeniul D se numeşte *domeniu de integrare*, iar numărul λ se numeşte *diametrul partiţiei lui.*

Din definiţia integralei duble rezultă că

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{3.5.7}$$

Dacă există limita finită (3.5.7), atunci se spune că funcţia $f(x, y)$ este *integrabilă Riemann* pe domeniul D.

Sensul geometric al integralei duble.

Fie funcţia $f(x, y)$ continuă şi pozitivă pe domeniul D din planul Oxy, mărginit de linia închisă L şi S este graficul acestei funcţiei:

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x, y) \in D, \quad z = f(x, y)\Big\}$$

Considerăm corpul T mărginit de jos de domeniul D, de sus de suprafaţa S şi din părţi de suprafaţa cilindrică cu directoarea L şi cu generatoarele paralele cu axa Oz (fig.1.4):

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\Big\}. \tag{3.5.8}$$

Fig. 1.4

Considerăm partiţia domeniului D în domenii elementare D_i şi alegem $P_i(\xi_i,\, \eta_i) \in D_i$, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$. Folosind notaţiile din definiţia integralei duble, avem: $f(\xi_i,\, \eta_i)\Delta S_i \approx V_i$, unde V_i este volumul T_i din corpul T, care se sprijină pe baza D_i, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$;

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\, \eta_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = V, \tag{3.5.9}$$

unde V este volumul corpului T.

Eroarea în egalitatea aproximativă (3.5.9) va fi cu atât mai mică, cu cât este mai mic λ. Trecând la limită în (3.5.9) cu $\lambda \to 0$, obţinem egalitatea $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, adică

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy. \tag{3.5.10}$$

Din egalitatea (3.5.10) rezultă *sensul geometric al integralei duble*: integrala dublă a funcţiei continue şi pozitive $f(x, y)$ pe domeniul D este egală cu volumul corpului T definit de (3.5.8).

Sensul fizic al integralei duble.

Fie D un domeniu mărginit şi închis din planul Oxy în care este repartizată masa cu densitatea superficială $\mu(x, y)$, unde $\mu(x, y)$ este o funcţie continuă pe domeniul D. Vom deduce formula pentru calcularea masei plăcii materiale descrise de domeniul D.

Consideram partitia domeniul D în D_i şi din fiecare domeniu elementar luăm câte un punct $P_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$, (fig.1.3). Folosind notaţiile din definiţia integralei duble, avem:

$$\mu(P_i)\Delta S_i \approx m_i, \tag{3.5.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = m, \tag{3.5.12}$$

unde m_i este masa părţii D_i, iar m este masa domeniului D. Egalităţile (3.5.11) şi (3.5.12) sunt aproximative, deoarece pe D_i densitatea superficială $\mu(x, y)$, în caz general, nu este constantă, iar în expresiile din partea stîngă ale acestor egalităţi densitatea în D_i se consideră constantă şi egală cu densitatea în punctul $P_i \in D_i$. Erorile în (3.5.11) şi (3.5.12) sunt cu atât mai mici cu cât sunt mai mici diametrele d_i ale domeniilor elementare D_i. Trecând la limită cu $\lambda \to 0$ în (3.5.12) obţinem egalitatea $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, sau

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy \tag{3.5.13}$$

Din (3.5.13) rezultă *sensul fizic* al integralei duble: integrala dublă a densităţii a unei plăci plane D este egală cu masa acestei plăci plane D.

Proprietăţile integralei duble

1^0 Dacă funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D şi $c \in \mathbb{R}$, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi funcţia $cf(x,y)$ şi

$$\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{3.5.14}$$

Într-adevăr, $f(x,y)$ fiind integrabilă pe D, există limita (3.5.7). Deci există şi limita: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ şi are loc egalitatea:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = \lim_{\lambda \to 0} c \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = c \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

Prin urmare, funcţia $cf(x,y)$ este integrabilă pe D şi $\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$ □

2^0 Dacă funcţiile $f_1(x,y)$ şi $f_2(x,y)$ sunt integrabile pe domeniul D, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi funcţia $f_1(x,y) + f_2(x,y)$ şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy. \tag{3.5.15}$$

Demonstraţia acestei proprietăţi este analogică cu demonstraţia proprietăţii corespunzătoare a integralei definite. Analogia demonstraţiilor proprietăţilor se datorează analogiei definiţiilor integralei definite şi celei a integralei duble. Enunţăm, fără a demonstra următoarele proprietăţi ale integralei duble, ce sunt analogice cu proprietăţile corespunzătoare ale integralei definite.

3^0 Dacă funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D şi dacă acest domeniu este divizat cu ajutorul liniei Γ de arie nulă în două domenii D' şi D'', care n-au puncte interioare comune, atunci $f(x,y)$ este integrabilă pe ambele domenii obţinute şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy. \tag{3.5.16}$$

4^0 Dacă funcţiile $f(x,y)$ şi $g(x,y)$ sunt integrabile pe domeniul D şi $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \tag{3.5.17}$$

5^0 Dacă funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi funcţia $|f(x,y)|$ şi are loc relaţia

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy. \tag{3.5.18}$$

6^0 Valoarea integralei duble $\iint\limits_D dxdy$ este egală cu aria S a domeniului de integrare D:

$$S = \iint Ddxdy. \tag{3.5.19}$$

Într-adevăr, pentru orice divizare a domeniului D are loc egalitatea $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Trecând la limită în această egalitate, când $\lambda \to 0$, obţinem

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy.$$

7^0 **(Evaluarea integralei duble).** Dacă $m = \inf f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $M = \sup f(x,y)$, $(x,y) \in D$, şi S este aria domeniului D, atunci

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS. \tag{3.5.20}$$

8^0 **(Teoremă despre valoarea medie).** Dacă funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D de arie S, m=inf $f(x,y)$, $(x,y) \in D$ şi M= sup$f(x,y)$, $(x,y) \in D$, atunci există un număr $\mu \in [m,M]$ încât

$$\mu S = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{3.5.21}$$

Numărul

$$\mu = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

se numeşte *valoare medie a integralei duble* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ pe domeniul D.

9^0 Dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă pe domeniul mărginit şi închis D de arie S, atunci există aşa un punct $P \in D$ încât

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(P)S. \tag{3.5.22}$$

3.5.2 Calculul integralei duble

Pentru calculul integralei duble se disting următoarele două tipuri fundamentale de domenii de integrare.

Domeniul mărginit de dreptele $x = a$, $x = b$ şi liniile $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, unde $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in [a,b]$, care poate fi scris analitic în forma

$$D_y = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\Big\}, \tag{3.5.23}$$

este simplu în raport cu axa Oy.

Domeniul mărginit de dreptele $y = c$, $y = d$ şi liniile $x = \psi_1(x)$, $x = \psi_2(x)$, unde $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$, $y \in [c,d]$, care poate fi scris analitic în forma

$$D_x = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\Big\}, \tag{3.5.24}$$

este simplu în raport cu axa Ox.

Integrale duble iterate

Definiţie *Fie funcţia f(x,y) este definită pe domeniul D simplu în raport cu axa Oy există integrala*

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{3.5.25}$$

pentru orice $x \in [a,b]$ *şi integrala*

$$I_1 = \int_a^b F(x)dx, \tag{3.5.26}$$

atunci expresia

$$I_1 = \int\limits_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{3.5.27}$$

se numeşte integrală dublă iterată a funcţiei f(x,y) pe domeniul D, definit de (3.5.23).

Dacă domeniul D este simplu în raport cu axa Ox şi este definit de egalitatea (3.5.24), există integralele:

$$\Phi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \tag{3.5.28}$$

$$I_2 = \int\limits_c^d \Phi(y)dy, \tag{3.5.29}$$

atunci expresia

$$I_2 = \int\limits_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \tag{3.5.30}$$

se numeşte *integrală dublă iterată* a funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul D, definit de (3.5.24).

Integralele duble iterate se mai scriu şi în forma:

$$I_1 = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{3.5.27$'$}$$

$$I_2 = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{3.5.30$'$}$$

Calcularea integralei duble iterate.

Integrala dublă iterată (3.5.27) se calculează astfel: calculăm integrala (3.5.25) şi folosind rezultatul obţinut calculăm integrala (3.5.26). În rezultat obţinem integrala (3.5.27). Analog se calculează şi integrala (3.5.30).

Calculul unei integrale duble iterate se reduce la calculul a două integrale simple (definite).

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala dublă iterată I_1 a funcţiei f(x,y)=x+y pe domeniul D, mărginit de liniile x=2, y=0 şi $y = x/2$.*

Rezolvare. Domeniul D poate fi scris în forma standardă (fig.2.3).

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x/2\Big\}.$$

Avem $F(x) = \int\limits_0^{x/2} (x+y)dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|\begin{matrix} x/2 \\ 0 \end{matrix} = \frac{5}{8}x^2$. Deci

$$I_1 = \int\limits_0^2 F(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{5}{8}x^2dx = \frac{5}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} = \frac{5}{3}.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala dublă iterată I_2 a funcţiei f(x,y) pe domeniul D definit de liniile $x = 2$, $y = 0$ şi $y = x/2$.*

Rezolvare. Scriem mai întâi domeniul D în forma standardă (3.5.24). Observăm că D este cuprins între dreptele orizontale y=0 şi y=1 şi pentru fiecare y fixat din [0,1] dreapta orizontală, care trece prin punctul de pe Oy cu ordonata y, intră în domeniul D prin linia x=2y şi iese din el prin linia x=2 (când punctul se mişcă în direcţia axei Ox). Deci

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le y \le 1, \quad 2y \le x \le 2\Big\}.$$

Avem $I_2 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{2y}^2 (x+y)dx\right) dy = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|\begin{matrix} 2 \\ 2y \end{matrix}\right] dy = \int\limits_0^2 (2+2y-4y^2)dy = \frac{5}{3}$

Observăm că $I_1 = I_2$. În acest caz se spune că integrala dublă iterată nu depinde de ordinea de integrare.

Reducerea integralei duble la integrala dublă iterată

Teorema 3.5.5. *Fie funcţia $f(x,y)$ integrabilă pe dreptunghiul*

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad a \le x \le b, \quad c \le y \le d\Big\}$$

şi pentru fiecare $x \in [a,b]$ există integrala simplă

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{3.5.31}$$

Atunci există şi integrala dublă iterată

$$I_1 = \int\limits_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{3.5.32}$$

Demonstraţie. Divizăm dreptunghiul R în np dreptunghiuri elementare R_{kp} cu ajutorul dreptelor $x = x_k$ şi $y = y_l$:

$$R_{kl} = [x_{k-1} \le x \le x_k] \times [y_{l-1} \le y \le y_l], \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n; \quad l = 1,\, 2,\, \ldots,\, p;$$

astfel ca $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_n = d$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1} > 0$ (fig.2.4a).

Notăm cu λ diametrul partiţiei lui R, $M_{kl} = \sup f(x,y)$, $(x,y) \in R_{kl}$, $m_{kl} = \inf f(x,y)$, $(x,y) \in R_{kl}$,

$$S = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l, \qquad s = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l.$$

Fixăm $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ şi integrăm relaţiile $m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl}$, $(x,y) \in R_{kl}$, în limitele de la y_{l-1} până la y_l. În rezultat obţinem

$$m_{kl}\Delta y_l \le \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)dy \le M_{kl}\Delta y_l.$$

Înmulţim ultima relaţie cu Δx_k, k=1,2,...,n, şi adunăm parte cu parte rezultatele obţinute. În rezultat obţinem:

$$s = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \le \sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l = S. \tag{3.5.33}$$

Evident că dacă $\lambda \to 0$, atunci şi $\max \Delta x_k \to 0$. Cum $\lim\limits_{\lambda\to 0} s = \lim\limits_{\lambda\to 0} S = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$ şi $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$, din (3.5.33), trecând la limită când $\lambda \to 0$, obţinem

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Teorema 3.5.6. *Dacă funcţia f(x,y) este integrabilă pe domeniul regulat în direcţia axei Oy*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\Big\}$$

şi pentru $\forall x \in [a,b]$ *există integrala* $F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$*, atunci există şi integrala dublă iterată*

$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3.5.34)$$

Într-adevăr, notăm cu R dreptunghiul cu laturile paralele cu axele de coordonate şi care conţine domeniul D şi examinăm funcţia

$$f_1(x,y) = f(x,y) \text{ dacă } (x,y) \in D \text{ şi } f_1(x,y) = 0 \text{ dacă } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D.$$

Funcţia $f_1(x,y)$ satisface condiţiile teoremei 3.5.6. Deci are loc egalitatea

$$\iint\limits_R f_1(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f_1(x,y)dy,$$

care este echivalentă cu egalitatea (3.5.34).□

Analog se demonstrează şi

Teorema 3.5.7. *Dacă funcţia f(x,y) este integrabilă pe domeniul regulat în direcţia axei Ox*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\}$$

şi pentru $\forall y \in [c,d]$ *există integrala* $\Phi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ *, atunci există şi integrala dublă iterată* $\int\limits_a^b dy \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)dx$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3.5.35)$$

Din teoremele 3.5.6. şi 3.5.7. rezultă

Teorema 3.5.8. *Dacă funcţia f(x,y) este integrabilă pe un domeniu regulat şi în direcţia axei Oy, şi în direcţia axei Ox, care poate fi scris în formele standarde* (3.5.23) *şi* (3.5.24) *şi există integralele*

$$F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \ x \in [a,b], \ \Phi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \ y \in [a,b],$$

atunci există şi integralele duble iterate (3.5.27) şi (3.5.30) şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{3.5.36}$$

Din egalitatea (3.5.36) rezultă că, în condiţiile teoremei 3.5.8., integrala dublă iterată nu depinde de ordinea de integrare. În unele exemple volumul de lucru necesar pentru calcularea integralei duble depinde de ordinea de integrare.

În unele cazuri domeniul D de integrare nu satisface condiţiile din teoremele precedente, dar poate fi divizat într-un număr finit de domenii D_1, D_2, ..., D_m, care satisfac aceste condiţii. În acest caz, pentru a calcula o integrală dublă, se foloseşte proprietatea

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + ... + \iint\limits_{D_m} f(x,y)dxdy.$$

Exemplul 3. *Să se calculeze integrala dublă* $\iint\limits_D xydxdy$*, unde* D *este mărginit de liniile* $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ *şi* $x = 1$.

Rezolvare. Reducem calculul integralei duble date la calculul unei integrale duble iterate. Pentru aceasta trebuie să alegem ordinea de integrare şi să determinăm limitele de integrare. Aceasta se face imediat după ce domeniul de integrare este scris în careva formă standardă. În acest scop este util să reprezentăm pe desen domeniul de integrare.

Evident (fig.2.5) că D poate fi scris în următoarea formă standardă:

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le \sqrt{x}\Big\}.$$

Conform egalităţii (3.5.34) avem

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} xydxdy = \int\limits_0^1 x[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{x}}]dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{6}s. \blacktriangleleft$$

Exemplul 4. *Să se calculeze* $\iint\limits_D x(1/y)^2dxdy$*, unde* D *este domeniul mărginit de liniile* $x = 2$, $y = x$ *şi* $y = 1x$.

Rezolvare. O reprezentare schematică a domeniului D ne sugerează ideea necesităţii determinării coordonatelor punctului de intersecţie a liniilor $y{=}x$ şi $y = 1/x$ (fig.2.6). Pentru aceasta rezolvăm sistemul alcătuit din ecuaţiile acestor linii:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}, \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{de unde } \{(1,1),(-1,-1)\}$$

Evident că $(1,1) \in D$, iar $(-1,-1) \notin D$. Deci domeniul D poate fi scris în forma standardă $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad 1/x \le y \le x\right\}$. Avem

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^2} dx\, dy = \int_1^2 dx \int_{1/x} \frac{x}{y^2} dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right] x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2-1)dx = \frac{4}{3}. \blacktriangleleft$$

Exemplul 5. *Să se schimbe ordinea de integrare în expresia*

$$I = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

Rezolvare. Notăm prin D_1 şi D_2 domeniile de integrare ale integralelor din suma I. Avem $D_1 = \left\{(x,y) :\ -2 \le x \le -\sqrt{3};\ \ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$,

$$D_2 = \left\{(x,y) :\ -\sqrt{3} \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2 - \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Graficul funcţiei $y = \sqrt{4-x^2}$ reprezintă semicircumferinţa de sus a circumferinţei $x^2+y^2 = 4$, iar graficul funcţiei $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$ reprezintă semicircumferinţa de jos a circumferinţei $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Găsim punctele de intersecţie ale acestor grafice, rezolvând sistemul alcătuit din ecuaţiile lor. În rezultat, obţinem punctele $M_1(-\sqrt{3}, 1)$ şi $M_2(\sqrt{3}, 1)$; punctul M_2 nu aparţine domeniului de integrare (fig.2.7).

Notăm: $D = D_1 \cup D_2$. Evident că

$$D = \left\{(x,y) :\ 0 \le y \le 1,\ \ -\sqrt{4-y^2} \le x \le -\sqrt{4-(y-2)^2}\right\}.$$

Cum $4-(y-2)^2 = 4y - y^2$, la schimbarea ordinii în integrala I obţinem

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx. \blacktriangleleft$$

Exemplul 6. *Să se calculeze integrala dublă* $\iint\limits_D e^{x/y} dxdy$ *, unde D este domeniul mărginit de liniile x=0, y=1 şi $x = y^2$.*

Rezolvare. Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy (fig.2.8) şi poate fi scris în următoarea formă analitică: $D = \left\{(x,y) : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$. Deci $\iint\limits_D e^{x/y} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{x/y} dy$. Integrala interioară nu poate fi calculată cu ajutorul formulei Newton-Leibniz, deoarece primitiva în raport cu variabila y a funcţiei $e^{x/y}$ nu este funcţie elementară.

Însă integrala dată poate fi calculată, dacă aplicăm o altă ordine de integrare. Cum domeniul de integrare D este regulat şi în direcţia axei Ox şi poate fi scris în forma analitică $D = \left\{(x, y) : \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y^2\right\}$, avem

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} y e^{\frac{x}{y}} d(\tfrac{x}{y}) = \int\limits_0^1 y[e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2}]dy =$$
$$= \int\limits_0^1 y(e^y - 1)dy = [(y-1)e^y - 0,5y^2] \,|_0^1 = 0,5. \blacktriangleleft$$

3.5.3 Schimbarea de variabile în integrala dublă

În unele cazuri calculul unei integrale duble devine mai uşor, dacă se efectuiază un schimb de variabile.

Teorema 3.5.9. *Fie*

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{3.5.37}$$

două funcţii, care au derivate parţiale continue pe un domeniu mărginit şi închis $D^* \in \mathbb{R}^2$, astfel încât pentru orice $(u, v) \in D^*$

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dacă transformarea (3.5.37) stabileşte o corespondenţă bijectivă între domeniile D^* şi D, atunci pentru orice funcţie $f(x, y)$ integrabilă pe domeniul D are loc egalitatea

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D^*} f[x(u, v), y(u, v)]|J|dxdy. \tag{3.5.38}$$

Formula (3.5.38) se numeşte *formula de transformare ale variabilelor* în integrala dublă. Determinantul J se numeşte *Jacobian.*

Exemplul 7. *Să se calculeze integrala dublă*

$$I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{2 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}}},$$

unde $D = \left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}.$

Rezolvare. Trecem la variabilele u şi v:

$$\begin{cases} x = 3u\cos v, \\ y = 2u\sin v. \end{cases}$$

Evident, că în variabilele u şi v domeniul de integrare D se scrie în forma (fig.3.1): $D = \{(u, v) : 0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 1\}$. Calculăm Jacobianul:

$$J = \begin{vmatrix} 3\cos v & -3u\sin v \\ 2\sin v & 2u\cos v \end{vmatrix} = 6u.$$

Aplicând formula (3.5.38), obţinem

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \frac{6udu}{\sqrt{2-u^2}} = \int_0^{2\pi} \left[-6\sqrt{2-u^2}\Big|_0^1 \right] dv = 12\pi(\sqrt{2}-1). \blacktriangleleft$$

Integrala dublă în coordonate polare.

Dacă în integrala dublă $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ se efectuiază trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad (\rho, \varphi) \in D^*,$$

atunci $J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$ şi deci din (3.5.38) obţinem

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f[\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi. \tag{3.5.39}$$

Formula (3.5.39) se numeşte *formulă de transformare de la coordonate carteziene la coordonate polare în integrala dublă.*

Exemplul 8. *Să se calculeze integrala dublă* $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$*, unde D este domeniul mărginit de liniile:* $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ *şi* $y = x,\ x \ge 0.$

Rezolvare. Dacă am calcula această integrală în coordonate carteziene rectangulare, atunci domeniul D ar trebui divizat în trei părţi şi de calculat trei integrale duble (fig.3.2). Vom calcula această integrală, trecând la coordonate polare.

Cum $D^* = \left\{(\rho, \varphi) :\quad 1 \le \rho \le 3,\ \pi/6 \le \varphi \le \pi/4\right\}$, avem

$$\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy = \iint\limits_{D^*} \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right) \rho d\rho d\varphi =$$
$$= \iint\limits_{D^*} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\, \rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*} \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{1}^{3} \rho d\rho \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \varphi d\varphi =$$
$$= \int\limits_{1}^{3} \rho d\rho \left[\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}\right] = \frac{5}{288}\pi^2 \int\limits_{1}^{3} \rho d\rho = \frac{5}{72}\pi^2. \blacktriangleleft$$