### 3.7.1 Integrale triple

Acest capitol este consacrat teoriei integralelor triple şi aplicaţiilor ale lor. Întrucât o întreagă serie de propoziţii stabilite pentru integralele duble se pot transpune, împreună cu demonstraţiile lor, la cazul integralelor triple, ne vom limita la formularea acestor propoziţii.

**Definiţia integralei triple.**

Fie $f(x,y,z)$ o funcţie definită pe un domeniu mărginit şi închis $T$, numit *corp*, din spaţiul $\mathbb{R}^3$, frontiera căruia este o suprafaţă netedă pe părţi. Divizăm cu ajutorul unor suprafeţe netede pe părţi corpul $T$ în părţi $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$, volumele cărora sunt, respectiv, $\Delta V_1$, $\Delta V_2$, ..., $\Delta V_n$ şi notăm cu $\lambda$ cel mai mare dintre diametrele acestor părţi. Din fiecare parte $T_i$ luăm câte un punct $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (fig.6.1). Suma

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \sigma_i)\Delta V_i \tag{3.7.1}$$

se numeşte *sumă integrală* a funcţiei $f$ pe domeniul $T$. Dacă există limita finită a sumelor integrale (3.7.1), când $\lambda \to 0$, care nu depinde nici de modul de divizare a lui $T$ în părţi, nici de alegerea punctelor $Pi$, atunci această limită se numeşte *integrală triplă* a funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul $T$ şi se notează cu $\iiint\limits_T f(P)dV$, sau $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$, sau $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV$.

Conform definiţiei avem

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.. \tag{3.7.2}$$

care se numeşte *integrală triplă*, funcţia $f(x,y,z)$ se numeşte *funcţie de integrare*, $T$ se numeşte *domeniu de integrare*, iar $dV$ şi $dxdydz$ se numesc *element de volum* şi, respectiv, *element de volum în coordonate carteziene rectangulare*. Dacă există integrala (3.7.1), atunci se spune că funcţia $f$ este *integrabilă* pe domeniul $T$.

Fig. 6.1

**Condiţii de existenţă a integralei triple**

***1) Condiţie necesară.*** Dacă funcţia $f(x,y,z)$ este integrabilă pe domeniul $T$, atunci ea este mărginită pe acest domeniu.

***2) Condiţii suficiente.*** Pentru ca funcţia $f(x,y,z)$ să fie integrabilă pe domeniul $T$, este suficientă una din condiţiile:

a) $f$ este continuă pe $T$ şi $T$ este mărginit şi închis cu frontiera netedă pe părţi.

b) $f$ este mărginită şi continuă pe domeniul mărginit şi închis $T$, frontiera căruia este o suprafaţă netedă pe părţi, în afară poate de o mulţime de puncte de discontinuitate, volumul căreia este nul.

**Sensul geometric al integralei triple.**

Dacă $V$ este volumul domeniului $T$, atunci pentru orice divizare a acestui domeniu în părţi $T_1, T_2, \ldots, T_n$, volumele cărora sunt, respectiv, $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, are loc egalitatea $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$. Trecând în această egalitate la limită, când $\lambda \to 0$, obţinem

$$V = \iiint\limits_T dxdydz. \tag{3.7.3}$$

**Sensul fizic al integralei triple.**

Fie în domeniul spaţial, mărginit şi închis $T$, este repartizată masa cu densitatea $\mu(x,y,z)$. Masa $m$ a acestui domeniu se calculează conform formulei

$$m = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)dxdydz. \tag{3.7.4}$$

**Proprietăţile integralei triple**

$1^0$ Dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe domeniul spaţial $T$ şi $A$ este o constantă, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi funcţia $Af(x,y,z)$ şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_T Af(x,y,z)dxdydz = A\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz.$$

$2^0$ Dacă funcţiile $f_1(x,y,z)$ şi $f_2(x,y,z)$ sunt integrabile pe domeniul $T$, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi suma lor şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_T [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_T f_1(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_T f_2(x,y,z)dxdydz.$$

$3^0$ Dacă domeniul $T$ este divizat în două domenii conexe $T'$ şi $T''$, fără puncte interioare comune, şi $f(x,y,z)$ este integrabilă pe $T$, atunci această funcţie este integrabilă pe fiecare din domeniile $T'$ şi $T''$ şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{T''} f(x,y,z)dxdydz.$$

$4^0$ Dacă funcţiile $f_1(x,y,z)$ şi $f_2(x,y,z)$ sunt integrabile pe domeniul $T$ şi $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in T$, atunci

$$\iiint\limits_T f_1(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_T f_2(x,y,z)dxdydz.$$

$5^0$ Dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe domeniul spaţial $T$, atunci este integrabilă pe acest domeniu şi funcţia $|f(x,y,z)|$ şi are loc egalitatea

$$\left|\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_T |f(x,y,z)|\, dxdydz.$$

$6^0$ Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe domeniul $T$, $m = \min f(x,y,z)$, $M = \max f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in T$, şi $V$ este volumul lui $T$, atunci

$$mV \le \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \le MV.$$

$7^0$ Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe domeniul mărginit, închis şi conex $T$ atunci există un astfel de punct $(x^*,y^*,z^*) \in T$ încât

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = f(x^*,y^*,z^*)\cdot V.$$

**Domenii spaţiale regulate**

***Definiţie.*** Se spune că domeniul $T$ din spaţiul $\mathbb{R}^3$, raportat la un sistem cartezian rectangular de coordonate $Oxyz$, este *regulat în direcţia axei* $Oz$, dacă:

a) orice dreaptă paralelă cu axa $Oz$, care trece printr-un punct interior al domeniului $T$, intersectează frontiera acestui domeniu exact în două puncte;

b) proiecţia ortogonală pe planul $Oxy$ a lui $T$ este un domeniu plan $D$ regulat (într-o direcţie);

c) orice parte a domeniului $T$, determinată de intersecţia lui cu plane paralele cu planele de coordonate, verifică condiţiile a) si b).

La fel se definesc domeniile regulate în direcţia axei $Ox$ şi în direcţia axei $Oy$;

De exemplu, domeniul $T$ mărginit de jos de graficul funcţiei continue $z = z_1(x,y)$, $(x,y) \in D$, de sus de graficul funcţiei continue $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in D$, unde $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$, $\forall(x,y) \in D$, şi din părţi de o suprafaţă cilindrică cu două generatoarele paralele cu axa $Oz$ şi cu directoarea $\Gamma$, care este frontiera domeniul $D$, $D$ fiind un domeniu plan regulat, este regulat în direcţia axei $Oz$. Un astfel de domeniu poate fi scris în forma analitică

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad (x,y) \in D, \quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$

Dacă domeniul plan $D$ poate fi scris în forma standardă

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

atunci $T$ poate fi scris în forma

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}. \tag{3.7.5}$$

Exemple de domenii regulate în direcţia axei $Ox$ şi în direcţia axei $Oy$ sunt, respectiv, domeniile:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad c \le y \le d, \quad z_1(y) \le z \le z_2(y), \quad x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z)\}. \tag{3.7.6}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad k \le z \le l, \quad x_1(z) \le x \le x_2(z), \quad y_1(x, z) \le y \le y_2(x, z)\}. \tag{3.7.7}$$

**Integrale triple iterate**

Fie functia $f$ continuă pe domeniul $T$ de forma (3.7.5). Expresia

$$I_1 = \int\limits_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, x)dz \tag{3.7.8}$$

se numeşte *integrală triplă iterată*. Calculul integralei (3.7.8) se reduce la calculul consecutiv al integralelor

$$F(x, y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz, \Phi(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y)dy, I_1 = \int\limits_a^b \Phi(x)dx.$$

La fel se definesc integralele triple iterate

$$I_2 = \int\limits_c^d dy \int\limits_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx, \tag{3.7.9}$$

unde domeniul de integrare $T$ are forma analitică (3.7.6) şi

$$I_3 = \int\limits_k^l dz \int\limits_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy \tag{3.7.10}$$

în cazul când domeniul de integrare $T$ are forma (3.7.7).

**Calculul integralei triple.**

Dacă funcţia $f(x,y,z)$ este continuă pe domeniul regulat $T$, atunci integrala triplă $\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdyd$ este egală cu:

a) integrala (3.7.8), dacă $T$ are forma analitică (3.7.5);
b) integrala (3.7.9), dacă $T$ are forma analitică (3.7.6);
c) integrala (3.7.10), dacă $T$ are forma analitică (3.7.7).

**Exemplul 1.** *Să se calculeze integrala triplă* $I = \iiint\limits_T xdxdydz$, *unde* $T$ *este domeniul mărginit de suprafeţele* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

**Rezolvare.** Domeniul de integrare $T$ este un tetraedru (fig.6.3), care poate fi scris în forma analitică

$$T = \{(x, y, z) : \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\},$$

adică are forma (3.7.5). Deci avem:

$$\iiint\limits_T xdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xdz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} \left[ z\Big|_0^{1-x-y} \right] dy =$$
$$= \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy = \int\limits_0^1 x \left[ \left( y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right] dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{1}{24}. \blacktriangleleft$$

**Schimbarea variabilelor în integrala triplă.**

Fie domeniul de integrare, mărginit şi închis $T$ din spaţiul $Oxyz$, se aplică biunivoc în domeniul mărginit şi închis $T^*$ din spaţiul $O'uvw$ cu ajutorul funcţiilor continuu diferenţiabile $x{=}x(u,v,w)$, $y{=}y(u,v,w)$, $z{=}z(u,v,w)$ şi pentru orice $(u,v,w){\in}T^*$ avem

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci are loc *formula de schimbare a variabilelor* în integrala triplă:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{T*} f[x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)]|J|dxdydz. \qquad (3.7.11)$$

**Integrala triplă în coordonate cilindrice**

**Definiţie.** Fie în spaţiu este dat un sistem cartezian rectangular de coordonate $Oxyz$. Se numesc *coordonate cilindrice* ale punctului $M(x,y,z)$ mărimile $\rho$, $\varphi$ şi $z$, unde $\rho$ şi $\varphi$ sunt coordonatele polare ale proiecţiei ortogonale $M_0$ a punctului $M$ pe planul $Oxy$, iar $z$ este a treia coordonată rectangulară (fig.6.4a).

Faptul că punctul $M$ are coordonatele cilindrice $\rho$, $\varphi$ şi $z$ se notează cu $M(\rho,\varphi,z)$. Vom stabili relaţia dintre coordonatele cilindrice şi cele carteziene rectangulare. Cum $M_0(x,y,0)$, avem:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{3.7.12}$$

unde $0\leq\rho<\infty$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ , $-\infty<z<+\infty$..

Calculând jacobianul, obtinem:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \rho.$$

Conform (3.7.11) *formula de trecere la coordonate cilindrice* în integrala triplă este

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\, d\rho d\varphi dz. \tag{3.7.13}$$

**Exemplul 2.** *Să se calculeze integrala triplă* $\iiint\limits_T z^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, *unde* $T$ *este domeniul mărginit de suprafeţele* $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$, $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$.

**Rezolvare.** Ecuaţia $x^2+y^2 = 2x$ poate fi scrisă în forma $(x-1)^2+y^2 = 1$, de unde rezultă ca ea este ecuaţia unei suprafeţe cilindrice cu generatoarele paralele cu axa $Oz$ şi cu directoarea $\Gamma : \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$ din planul $Oxy$. Domeniul $T$ este reprezentat în fig.6.4b. Vom trece la coordonatele cilindrice $\rho$, $\varphi$ şi $z$. Ecuaţia semicircumferinţei $\Gamma$ este $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ care se obţine din ecuaţia $x^2 + y^2 = 2x$, substituind $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ şi simplificând ambele părţi prin $\rho$. Deci domeniul $T$ poate fi scris în coordonate cilindrice astfel:

$$T = \{(\rho,\varphi,z): \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi, \quad 0 \leq z \leq 3\}.$$

Avem:

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} d\rho \int\limits_0^3 z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \int\limits_0^3 z\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \left[\frac{z^2}{2}\Big|_0^3\right] d\rho =$$

$$= \frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right] d\varphi = 12\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = 12\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) =$$

$$= 12\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]\Big|_0^{\pi/2} = 8 \blacktriangleleft$$

**Integrala triplă în coordonate sferice.**

Fie în spaţiu este dat un sistem cartezian rectangular de coordonate $Oxyz$. Prin *coordonate sferice* ale punctului $M(x,y,z)$ se înteleg mărimile $r$, $\varphi$ şi $\theta$, unde $r{=}|OM|$, $\varphi$ este a doua coordonată polară a proiecţiei ortogonale $M0$ a punctului $M$ pe planul $Oxy$ şi $\theta$ este unghiul dintre $Oz$ şi $|OM|$ (fig.6.5).

Cum $|OM_0| = r\sin\varphi$ şi $z{=}r\cos\varphi$, relaţiile dintre coordonatele sferice şi cele carteziene rectangulare sunt:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{3.7.14}$$

unde $0\leq r<+\infty$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$ .

Calculând jacobianul $J$ de trecere la coordonate sferice obtinem

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

Deci (3.7.11) trecerea la coordonate sferice se efectuează cu ajutorul formulei

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T*} f(\rho\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)r^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta. \tag{3.7.15}$$

**Exemplul 3.** *Să se calculeze integrala triplă* $\iiint\limits_T x^2\,dxdydz$, *unde* $T$ *este sfera* $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

**Rezolvare.** Trecem la coordonatele sferice $\rho$, $\varphi$ şi $\theta$ (fig.6.6). În aceste coordonate domeniul $T$ poate fi scris în forma:

$$T = \{(\rho,\varphi,\theta): \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2\}.$$

Deci

$$\iiint\limits_T x^2\,dxdydz = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi \cdot \rho^2 \sin\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^2 \rho^4 d =$$

$$= \int_0^\pi (\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi \cdot \frac{1}{5}\left[r^5\Big|_0^2\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^\pi\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right] \cdot \frac{32}{5} = \frac{128}{5}\pi. \blacktriangleleft$$

### 3.7.2 Exerciţii

1) Să se scrie în formă analitică şi să se deseneze domeniile de integrare pentru următoarele integrale:

a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-x/2} dy \int\limits_0^{2y^2+1} x\,dz$;

b) $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{2y}^2 dx \int\limits_0^{(x-2)^2} dz$.

2) Să se calculeze integralele triple iterate:

a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-x/2} dy \int\limits_0^{2y^2+1} x\,dz$;

b) $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{2y}^2 dx \int\limits_0^{(x-2)^2} dz$.

3) Să se calculeze integrala triplă a funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul $T$, dacă:

a) $T: \quad x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1;\ f(x,y,z) = xy$;

b) $T: \quad x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=4-x^2-y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0;\ f(x,y,z)=xyz$;

c) $T = \{(x,y,z): 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0, \quad y \ge 0,\ z \ge 0\}; \qquad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

d) $T = \{(x,y,z): \quad 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \le 4, \quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\};\ f(x,y,z) = xyz$.

### 3.7.3 Aplicaţiile integralei triple

**Calculul volumelor.**

Conform sensului geometric al integralei triple, volumul $V$ al corpului (domeniului) $T$ se calculează conform formulei

$$V = \iiint_T dxdydz. \tag{3.7.16}$$

**Exemplul 4.** *Să se calculeze volumul corpului, mărginit de suprafeţele* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y = 6$, $y^2 + z - 4 = 0$, $y \geq 0$.

**Rezolvare.** Suprafeţele $x$=0, $y$=0 şi $z$=0 sunt planele de coordonate $Oyz$, $Oxz$ şi, respectiv, $Oxy$. Ecuaţia $2x$+$3y$=6 este ecuaţia unui plan paralel cu axa $Oz$ (deoarece în această ecuaţie lipseşte variabila $z$) şi care intersectează planul $Oxy$ prin dreapta $2x$+$3y$=6 de pe acest plan (fig.7.1). Suprafaţa $y^2 + z - 4 = 0$ este o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa $Ox$ (deoarece în ecuaţia ei lipseşte variabila $x$) şi cu directoarea $y^2 + z - 4 = 0$ din planul $Oxy$.

Fie $T$ domeniul spaţial, mărginit de suprafeţele date, şi $D$ proiecţia ortogonală a lui pe planul $Oxy$. Evident că

$$D = \left\{(x, y) : \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x\right\}$$

$$T = \left\{(x, y, z) : \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x, \quad 0 \leq z \leq 4 - y^2\right\}.$$

Aplicând formula (3.7.16), obţinem

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int_0^{4-y^2} dz = \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(4 - y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{8}{81}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}\right) dx = 10. \blacktriangleleft$$

**Calculul masei domeniilor spaţiale.**

Din sensul fizic al integralei triple rezultă că, dacă în domeniul spaţial $T$ este repartizată masa cu densitatea $\mu(x,y,z)$, atunci masa $m$ a acestui domeniu se calculează conform formulei

$$m = \iiint_T \mu(x, y, z)dxdydz. \tag{3.7.17}$$

**Exemplul 5.** *Să se calculeze masa corpului* $T$ *mărginit de suprafeţele* $z = 0$, $z = \sqrt{5}$ *şi* $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, *dacă densitatea lui este* $\mu(x,y,z)$=$z$.

**Rezolvare.** Suprafaţa $x^2+y^2-z^2=4$ reprezintă un hiperboloid de rotaţie cu o pânză. Deci $T$ este domeniul, cuprins înăuntrul acestui hiperboloid şi între planele $z$=0 şi $z=\sqrt{5}$ (fig.7.2). Determinăm intersecţia hiperboloidului cu planul $z=\sqrt{5}$. Din sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=4, \\ z=\sqrt{5}. \end{cases} \quad \text{obtinem} \quad x^2+y^2=9,$$

Deci proiecţia lui $T$ pe planul $Oxy$ este cercul $x^2+y^2\leq 9$.

Divizăm domeniul $T$ în două parţi $T_1$ şi $T_2$ cu ajutorul suprafeţei cilindrice $x^2+y^2=4$. Proiecţiile pe $Oxy$ ale acestor parţi $D_1$ şi $D_2$ sunt cercul $x^2+y^2\leq 4$ şi, respectiv, inelul $4\leq x^2+y^2\leq 9$. Vom trece la coordonate cilindrice. Cum

$$T_1=\left\{(\rho,\varphi,z): \quad 0\leq\varphi\leq 2\pi, \quad 0\leq\rho\leq 2, \quad 0\leq z\leq\sqrt{5}\right\}$$

şi

$$T_2=\left\{(\rho,\varphi,z): \quad 0\leq\varphi\leq 2\pi, \quad 2\leq\rho\leq 3, \quad \sqrt{\rho^2-4}\leq z\leq\sqrt{5}\right\}$$

, avem

$$m=\iiint\limits_T zdxdydz=\iiint\limits_{T_1} zdxdydz+\iiint\limits_{T_2} zdxdydz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \rho\, d\rho\int_0^{\sqrt{5}} z\, dz+\int_0^{2\pi} d\varphi\int_2^3 \rho d\rho\int_{\sqrt{\rho^2-4}}^{\sqrt{5}} zdz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \frac{5}{2}\rho\, d\rho+\int_0^{2\pi} d\varphi\int_2^3 \rho\left(\frac{9}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=$$

$$=5\int_0^{2\pi} d\varphi+\frac{25}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{65}{4}\varphi.\Delta$$

**Calculul momentelor statice ale unui domeniu spaţial în raport cu planele de coordonate.**

Fie $T$ un domeniu spaţial cu densitatea $\mu(x,y,z)$ (fig.7.3). Analog aplicaţiei respective a integralei duble se demonstrează că momentele statice $m_{xy}$, $m_{xz}$ şi $m_{yz}$ ale lui $T$ în raport cu planele de coordonate $Oxy$, $Oxz$ şi, respectiv, $Oyz$:

$$\begin{aligned} m_{xy} &= \iiint_T z\mu(x,y,z)dxdydz, \\ m_{xz} &= \iiint_T y\mu(x,y,z)dxdydz, \\ m_{yz} &= \iiint_T x\mu(x,y,z)dxdydz. \end{aligned} \tag{3.7.18}$$

**Exemplul 6.** *Să se calculeze momentele statice $m_{xy}$, $m_{xz}$ şi $m_{yz}$ ale cubului $T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1\}$, dacă densitatea lui este $\mu(x,y,z) = x+y+z$.*

**Rezolvare.** Cubul dat este reprezentat în fig.7.4. Conform (3.7.18) avem

$$m_{xy} = \iiint_T z(x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z(x+y+z)\,dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{12}\right) dx = \frac{5}{6}.$$

Analog obtinem $m_{xz} = m_{yz} = \dfrac{5}{6}$. ◀

**Calculul coordonatelor centrului maselor.**

Dacă $C(x_c,\, y_c,\, z_c)$ este centrul maselor unui domeniu spaţial $T$, în care este repartizată masa cu densitatea $\mu(x,y,z)$, atunci

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_{yz}}{m}, \\ y_c &= \frac{m_{xz}}{m}, \\ z_c &= \frac{m_{xy}}{m}, \end{aligned} \tag{3.7.19}$$

unde $m$ este masa lui $T$, iar $m_{yz}, m_{xz}$ şi $m_{xy}$ sunt momentele statice ale lui în raport cu planele de coordonate $Oyz$, $Oxz$ şi, respectiv, $Oxy$.

**Exemplul 7.** *Să se calculeze coordonatele centrului maselor cubului*
$T = \{(x,y,z) : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1\}$ *cu densitatea $\mu(x,y,z)=x+y+z$.*

**Rezolvare.** Momentele statice au fost calculate în exemplul 6.. Calculăm masa cubului dat:

$$m = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy = \int\limits_0^1 (x+1)dx =$$

$$= \frac{3}{2}.$$

Conform (3.7.19) avem: $x_c = \frac{m_{yz}}{m} = \frac{5}{9}$. Analog obţinem $y_c = z_c = \frac{5}{9}$. ◀

**Calculul momentelor de inerţie ale domeniului spaţial în raport cu planele de coordonate, axele de coordonate şi cu originea de coordonate.**

Fie $T$ un domeniu spaţial cu densitatea $\mu(x,y,z)$. Notăm cu $I_{xy}$, $I_{xz}$, $I_{yz}$, $I_x$, $I_y$, $I_z$ şi $I_0$ momentele de inerţie ale domeniului $T$ în raport cu planele de coordonate *Oxy, Oxz, Oyz,* axele de coordonate *Ox, Oy, Oz* şi, respectiv, cu originea de coordonate $O$. Judecând ca şi în cazul aplicaţiei respective a integralei duble, obţinem:

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \iiint\limits_T z^2\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_{xz} &= \iiint\limits_T y^2\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_{yz} &= \iiint\limits_T x^2\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_x &= \iiint\limits_T (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_y &= \iiint\limits_T (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_z &= \iiint\limits_T (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz,\\
I_0 &= \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,
\end{aligned} \tag{3.7.20}$$

Din (3.7.20) rezultă relaţiile:

$$\begin{aligned}
I_0 &= I_{xy} + I_{xz} + I_{yz};\\
I_x &= I_{xy} + I_{xz},\\
I_y &= I_{xy} + I_{yz},\\
I_z &= I_{xz} + I_{yz};\\
2I_0 &= I_x + I_y + I_z;\\
2I_{xy} &= I_x + I_y - I_z,\\
2I_{xz} &= I_x + I_z - I_y,\\
2I_{yz} &= I_y + I_z - I_x.
\end{aligned} \tag{3.7.21}$$

**Exemplul 8.** *Să se calculeze momentul de inerţie a unui con circular omogen cu densitatea* $\mu_0$

*în raport cu axa sa, dacă raza bazei lui este $R$, iar generatoarea formează cu înălţimea unghiul $\alpha = 45°$.*

**Rezolvare.** Alegem sistemul cartezian rectangular de coordonate $Oxyz$ astfel ca $O$ să coincidă cu vârful conului şi înălţimea lui să se afle pe semiaxa pozitivă a axei $Oz$ (fig.7.5). Dacă notăm prin $T$ conul dat, atunci, în coordonate cilindrice, avem $T = \{(\rho, \varphi, z) : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad \rho \leq z \leq R\}$. Aceasta rezultă din faptul că $\alpha = 45°$ şi deci înălţimea conului este egală cu raza lui, iar suprafaţa care mărgineşte conul este partea suprafeţei conice $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, situate în semispaţiul de sus. Această parte are ecuaţia $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sau, în coordonate cilindrice, $z = \rho$.

Dacă notăm cu $\mu_0 = \text{const}$ densitatea conului, atunci din (3.7.20) avem

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\mu_0 \, dxdydz =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R d\rho \int\limits_\rho^R (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)\rho \, dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 \, d\rho \int\limits_\rho^R dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 (R - \rho) d\rho =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{20} R^5 \, d\varphi = \frac{1}{10} \pi R^5 \mu_0. \blacktriangleleft$$

### 3.7.4 Exerciţii

1) Să se calculeze volumul corpului $T$, mărginit de suprafeţele:
a) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = y^2 + 1$, $x + y = 1$;
b) $y = 2x^2$, $z = 1 - \dfrac{y^2}{4}$, $z = 0$.

2) Să se calculeze masa corpului $T$ mărginit de suprafeţele date, având densitatea dată $\mu(x,y,z)$:
a) $T$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\mu(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$;
b) $T$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\mu(x, y, z) = x + y + z$.

3) Corpurile $T_1$ şi $T_2$ au densităţile $\mu_1(x, y, z) = x + y + z$ şi, respectiv, $\mu_2(x, y, z) \equiv 1$ şi sunt mărginite de suprafeţele: $T_1$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $T_2$: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$. Pentru fiecare corp să se determine:
a) masa;
b) momentele statice faţă de planele de coordonate;
c) coordonatele centrului maselor; d) momentele de inerţie faţă de planele de coordonate, faţă de axele de coordonate şi faţă de originea de coordonate.