NC 3.1

# INTEGRALE IMPROPRII

- **Integrale improprii de speța I. Definiții, proprietăți, criterii de convergență**
- **Integrale improprii de speța II. Definiții, proprietăți, criterii de convergență**

## Integrale improprii de speța I (cu limite infinite). Definiții, proprietăți, criterii de convergență

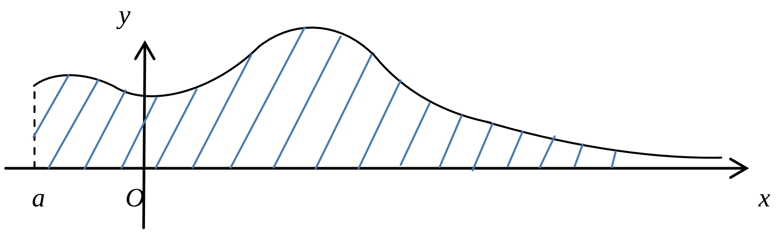
Dacă funcția nu este mărginită pe un segment, sau este definită pe un interval infinit, este imposibil de vorbit despre integrala Riemman. În cele ce urmează noțiunea de integrală se generează atât în cazul funcțiilor definite, dar nemărginite pe segment, cât și în cazul funcțiilor definite pe intervale nemărginite. Acest lucru se face cu ajutorul trecerii la limita limitei, cu ajutorul căreia se definește integrala Riemman.

**Definiție.** Fie că funcția $f(x)$ este definită pe intervalul $[a;\infty)$ și integrabilă pe orice segment $[a;b]$, $b>a$. Dacă $\exists \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, atunci această limită se numește **integrală improprie de speța I** a funcției $f(x)$ pe $[a;\infty)$. Se notează $\int_a^\infty f(x)dx$. Deci

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \quad \textbf{(1)}$$

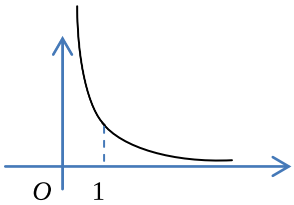
Dacă limita **(1)** este finită se mai spune, că **integrala improprie** $\int_a^\infty f(x)dx$ **converge**, iar funcția $f(x)$ este **integrabilă în sensul impropriu** pe $[a;\infty)$. În cazul cînd limita nu există sau este ∞, integrala improprie se numește **divergentă**.

Pentru o funcție continuă, nenegativă $y=f(x)$, $x\in[a;\infty)$, integrala improprie $\int_a^\infty f(x)dx$ este egală cu aria trapezului curbiliniu (nemărgint ca domeniu) mărginit de dreapta $x=a$, axa *ox* și graficul funcției $y=f(x)$



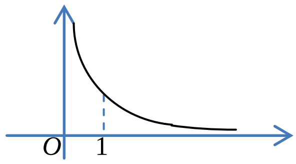

**Exemplu 1.** Să se calculeze aria trapezului curbiliniu infinit mărginit de dreapta $x=1$, axa *ox* și graficul funcției $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Aria este $A=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=1.$




**Exemplu 2.** Să se calculeze aria trapezului curbiliniu infinit mărginit de dreapta $x=1$, axa $ox$ şi graficul funcției $f(x)=\frac{1}{x}$

Aria este $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty.$




"Forma" figurilor din exemplele 1 şi 2 este asemănătoare, dar ariile diferă esențial: aria primului domeniu este finit, pe cînd al doilea domeniu are arie infinită.

Analog se defineşte: $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ – **integrala improprie cu limita inferioară infinită.**

Integrala improprie cu ambele limite infinite, se defineşte: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$, unde $c\in R$.

**Exemplu 3.** $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_2^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln 3.$

**Exemplu 4.** $\int_0^{\infty}\cos 2x\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\cos 2x\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\sin 2b)$ – această limită nu există.

**Exemplu 5.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{x+2}{\sqrt5}\right)\Big|_a^b=$

$\frac{1}{\sqrt5}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(arctg\frac{b+2}{\sqrt5}-arctg\frac{a+2}{\sqrt5}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt5}.$

**Exemplul 6.** Să se cerceteze convergența integralei $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\alpha\in R.$

Dacă $\alpha=1\Rightarrow I=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}(\ln x)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b)=\infty.$

NC 3.1

# INTEGRALE IMPROPRII

Dacă $\alpha \neq 1 \Rightarrow I = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, \alpha > 1 \\ \infty,\ \alpha < 1\end{cases}$.

Deci, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ **este divergentă pentru $\alpha \leq 1$, convergentă pentru $\alpha > 1$.**

## Proprietățile integralelor improprii

**1. Formula lui Newton – Leibniz**. Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a;\infty)$ și $F(x)$ – primitivă a lui $f(x)$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a)$, unde $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

**2. Linearitatea**. Dacă integralele improprii $\int_a^\infty f(x)dx$ și $\int_a^\infty g(x)dx$ sunt convergente, atunci pentru $\forall \alpha, \beta \in R$ este convergentă și integrala $\int_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ și are loc

$$\int_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^\infty f(x)dx + \beta\int_a^\infty g(x)dx.$$

**3**. Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, atunci pentru $\forall A > a, \int_A^\infty f(x)dx$ converge și invers. Are loc $\int_a^\infty = \int_a^A + \int_A^\infty$.

**4.** Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, atunci $\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)dx = 0$.

**5. Integrarea prin părți**. Dacă $u(x)$ și $v(x)$ sunt funcții derivabile și continui pe segmentul $[a;\infty)$, și fie că $\exists \lim\limits_{x\to\infty}(u \cdot v)$, atunci $\int_a^\infty u\,dv = uv\Big|_a^\infty - \int_a^\infty v\,du$, unde $uv\Big|_a^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}(u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a))$.

Formula de mai sus este adevărată în cazul convergenței măcar a unei integrale. Dacă măcar o integrală este divergentă, atunci este divergentă și cealaltă.

**6. Metoda substituției.** Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a;\infty)$,iar $\varphi(t)$ este derivabilă cu derivate continui pe $[\alpha;\beta]$, și $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim\limits_{t\to b-0}\varphi(t)=\infty$, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$.

**Exemple.**

1. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left|x=\frac{1}{t}\right|=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

2. $\int\limits_1^\infty \frac{arctg\,x}{x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=arctg\,x, dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=\frac{dx}{x^2+1}, v=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right|=\frac{-arctg\,x}{x}\Bigg|_1^\infty+\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x(x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+\int\limits_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Bigg|_1^\infty=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_1^\infty=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}.$$

**7. Integrarea inegalităților.** Dacă $f(x)\le g(x)$ pe intervalul $[a;\infty)$ și $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ sunt convergente, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\le\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

**Exemplu** . Să se demonstreze, că $0<\int\limits_2^\infty\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}dx<\frac{1}{10\sqrt{2}}$.

**Soluție.** Pentru $x\in[2;\infty)$ este adevărat că

$$0<\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}<\frac{\sqrt{x^3}}{x^5}=x^{-\frac{7}{2}}\Rightarrow 0<\int\limits_2^\infty\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}dx<\int\limits_2^\infty x^{-\frac{7}{2}}dx=\frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

## Criterii de convergență pentru funcții nenegative

Dacă funcția $f(x)\ge 0$, atunci integrala $\Phi(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx$ reprezintă o funcție monoton crescătoare de variabilă $A$. Problema existenței limitei finite a funcției pentru $A\to\infty$ se rezolvă simplu – pe baza teoremei despre limita funcției monotone:

Pentru convergența integralei improprii $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ în cazul $f(x)\ge 0$,este necesar și suficient, ca integrala la creșterea lui $A$ să rămînă mărginit superior: $\int\limits_a^A f(x)\,dx\le L$ ($L$- constant).

# INTEGRALE IMPROPRII

Dacă aceste condiții n-au loc $\int_a^{\infty} f(x)dx = \infty$.

Pe baza acestei informații are loc următoarea

**Teorema 1**. Dacă $0 \le f(x) \le g(x)$ pe intervalul $[A;\infty), A \ge a$, atunci din convergența integralei $\int_a^{\infty} g(x)dx$ rezultă convergența $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

**Demonstrație**. Fie că integrala $\int_a^{\infty} g(x)dx$ este convergentă. Atunci pentru $\forall A \ge a$, avem: $\int_a^{A} g(x)dx \le L \Rightarrow \int_a^{A} f(x)dx \le L$, de unde rezultă afirmația teoremei.

**Teorema 2**. Dacă $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, (0 \le k \le \infty)$, atunci pentru $k < \infty$ din convergența integralei $\int_a^{\infty} g(x)dx$ rezultă convergența integralei $\int_a^{\infty} f(x)dx$, iar pentru $k > 0$ din divergența integralei $\int_a^{\infty} g(x)dx$, rezultă divergența integralei $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Astfel, pentru $0 < \kappa < \infty$ **ambele integrale ori converg, ori diverg simultan**.

În caz particular, **dacă** $f \sim g$ **pentru** $x \to \infty$, **adică** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, **atunci** $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **și** $\int_a^{\infty} g(x)dx$ **ori converg, ori diverg simultan.**

**Exemplu 1**. Să se cerceteze convergența integralei $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$.

Avem: $0 \le \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$. Cum $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$ este convergentă $(\alpha = 4/3 > 1)$ rezultă că converge și integrala inițială.

**Exemplu 2**. Să se cerceteze convergența integralei $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$.

Avem că $\frac{x}{x^3+\sin x} \sim \frac{1}{x^2}$ pentru $x \to \infty$, iar integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ este convergentă. De unde rezultă convergența integralei inițiale.

# INTEGRALE IMPROPRII

**Definiție.** Integrala improprie $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ se numește **absolut convergentă**, dacă converge integrala $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

**Teoremă**. Dacă o integrală improprie este absolut convergentă, atunci este convergentă și însăși integrala.

Este posibil cazul ca o integrală să conveargă, dar să nu conveargă absolut. În acest caz, integrala se numește **condiționat convergentă** (**semiconvergentă**).

**Exemplu .** Să se cerceteze convergența absolută a integralei $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$.

Avem $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, dar integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ este convergentă, de unde rezultă că şi integrala $\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ este convergentă. Conform teoremei de mai sus integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ este absolut convergentă.

**Exemplu** . Să se cerceteze convergența absolută a integralei $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Avem $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_1^{\infty} \frac{1}{x}d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$. Cum integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ este convergentă, rezultă că şi integrala inițială $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă. Să arătăm însă că integrala $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ este divergentă. Într-adevăr, avem că $\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x}$.

Arătăm, că $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ este divergentă.

Avem că $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ şi $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{x}$, de unde $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^{\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$. Integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ este convergentă (valoarea ei este un număr finit, se demonstrează analog cazului integralei

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$), iar valoarea expresiei $\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^\infty$ este infinită. Astfel, integrala $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ este divergentă, de unde rezultă divergența integralei $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$. În rezultat, integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ este semiconvergentă.

## Integrale improprii de speța II (de la funcții nemărginite ). Definiții, proprietăți, criterii de convergență

**Definiție** . Considerăm funcția $f(x)$, definită pe intervalul $[a;b)$, dar nemărginită pe orice interval de forma $(b-\varepsilon, b)$, unde $\varepsilon > 0, b-\varepsilon > a$. În acest caz $x = b$ se numește **punct singular** pentru funcția $f(x)$.

**Definiție.** Fie $b$ un punct singular al funcției $f(x), x \in [a;b]$ și fie că $f(x)$ este integrabilă pe orice segment $[a;b-\varepsilon]$. Limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ se numește **integrală improprie de speța II** a funcției $f(x)$ de la *a* la *b*. Se notează obișnuit cu $\int_a^b f(x)dx$. Deci, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Dacă limita este finită, atunci se spune, că **integrala converge**, altfel că **diverge.**

Analog, dacă *a* este punct singular, avem $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

În caz general, segmentul $[a;b]$ poate conține un număr finit de puncte singulare $c_0, c_1, \ldots, c_m$ în vecinătatea cărora funcția $f(x)$ este nemărginită, iar pe fiecare segment fără puncte singulare, funcția fiind mărginită și integrabilă.

Pentru simplitate, fie că avem trei puncte singulare, două dintre care coincid cu capetele segmentului: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_3\to 0\\ \varepsilon_4\to 0}}\left(\int_{a+\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} f(x)dx\right)$.

**Exemplu**

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0+0}(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0|+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1.$$

# INTEGRALE IMPROPRII

**Exemplu.** Să se cerceteze convergența integralei $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in R$.

Dacă $\alpha = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x\Big|_0^1 = \infty$.

Dacă $\alpha \neq 1 \Rightarrow I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \\ \infty, \alpha > 1 \end{cases}$.

Deci, pentru $\alpha \geq 1$ diverge, iar pentru $\alpha < 1$ converge.

**Pentru integralele improprii de speța II au loc proprietăți, formule şi metode similare cazului integralelor improprii de speța I:formula Newton – Leibniz, liniaritatea, integrarea prin părți, substituția etc.**

**Exemplu.** Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx$.

Avem

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx = \left| \begin{matrix} x = 2t \\ dx = 2dt \end{matrix} \right| = 2\int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t\, dt = 2\int_0^{\pi/4} \left(\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t\right) dt =$$

$\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\, dt + + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\, dt$. În integrala $\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\, dt$ facem substituția $t = \frac{\pi}{2} - u$.

Obținem $\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\, du$. Avem $I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

## Criterii de convergență pentru funcții nenegative

**Teorema 1**. Fie că funcțiile $f(x), g(x) \geq 0$ pe $[a;b)$ și integrabile pe orice $[a;b-\varepsilon]$. Dacă $f(x) \leq g(x)$, atunci din convergența integralei $\int_a^b g(x)\,dx$ rezultă convergența integralei $\int_a^b f(x)\,dx$, iar din divergența integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ divergența integralei $\int_a^b g(x)\,dx$.

**Teorema 2**. Fie, că $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k$. atunci pentru $k<\infty$ din convergența integralei $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ rezultă convergența integralei $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, iar pentru $k>0$ din divergența integralei $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, rezultă divergența integralei $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Astfel, pentru $0<\kappa<\infty$ **ambele integrale ori converg, ori diverg simultan**.

**Notă**. În particular, **dacă** $f\sim g$ **pentru** $x\to b$**, adică** $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=1$**, atunci** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **şi** $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ **ori converg, ori diverg simultan.**

Deseori pentru comparație se ia o funcție concretă. O importanță practică are funcția $\frac{1}{(x-b)^{\alpha}}$.

**Exemplu.** Să se cerceteze convergența integralei $I=\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx$.

Avem $\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},x\to 0$. Deoarece integrala $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ este convergentă, rezultă că şi integrala inițială este convergentă.