NC 3.5.

ÎNTEGRALE CURBILINII DE SPEȚA II

I. Să se calculeze integralele curbilinii de speța II:

1. $\int_L x^3dx + x^2dy,\ L - arcul\ y = x^2\ de\ la\ punctele\ A(1,1)\ la\ B(3,9)$

2. $\int_L \frac{y}{x}dx + dy,\quad L - arcul\ y = \ln x, 1 \le x \le e$ în direcția creşterii lui x.

3. $\int_L 2xydx - x^2dy,\ L - arcul\ y = \sqrt{\frac{x}{2}},\ 0 \le x \le 2$

4. $\int_L \frac{x}{y}dx - \frac{y-x}{x}dy,\ L - arcul\ y = x^2\ de\ la\ punctele\ A(2,4)\ la\ B(1,1)$

5. $\int_L xdy,\ L: cercul\ x^2 + y^2 = 16,\ x > 0,\ A(0,-4)\ spre\ B(0,4)$

6. $\int_L \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dy,\ L: segment\ de\ dreapt$ $de\ la\ A(1,0)\ la\ B(3,4)$

7. $\int_L xy^2dx,\ L: arcul\ cercului\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi/2$

8. $\int_L ydx - xdy,\ L: elipsa: x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

9. $\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}},\ L: arcul\ astroidei\ x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

10. $\int_L (2a - y)dx + (y - a)dy,\ L: arcul\ cicloidei \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$

11. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (x - 2y)^2 dy,\ L -$ conturul dreptunghiului format de dreptele x $x = 1, x = 3, y = 1, y = 5$, parcurs împotriva mişcării acelor ceasornicului.

12. $\int_L (3x^2 - y)dx + (1 - 2x)dy,\ L -$conturul triunghiului cu vîrfurile $(0,0),(1,0),(1,1)$, parcurs în sens pozitiv.

13. $\int_L \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2},\ L: cercul\ x^2 + y^2 = 9$, parcurs în sens pozitiv.

14. $\int_L yzdx + z\sqrt{4 - y^2}dy + xydz,$ unde L este linia elicoidală $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = t/\pi,\quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

15. $\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz,\ L: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$

ÎNTEGRALE CURBILINII DE SPEȚA II

16. $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz,\ L: segmentul\ AB,\ de\ la\ A(1,1,1) \to B(2,3,4)$.

II. Folosind formula Green, să se calculeze integralele curbilinii după conturile închise în sens pozitiv:

1. $\oint_L (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy,\ a) L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ b) L: x^2 + y^2 = 4x$
2. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy,\ L: conturul\ triunghiului\ cu\ vârfurile\ (1,1); (3,2); (2,5)$
3. $\int_L \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2},\ L: cercul\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
4. $\oint_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy,\ L: cercul\ x^2 + y^2 = R^2$
5. $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dx,\ L: cercul\ x^2 + y^2 = 16$
6. $\oint_L (x+y)^2 dx - y(x-y)^2 dy,\ L:$ frontiera domeniului, mărginit de segmentul AB, cu $A(1,1)$ și $B(2,6)$ și de arcul parabolei $y = ax^2 + bx + c$, ce trece prin punctele A, B și $O(0,0)$.

III. Să se demonstreze că expresia de sub semnul integralei este o diferențială totală, a careiva funcții U care trebuie găsită, apoi să se calculeze integrala curbilinie pe arcul L prima extremitate punctul A și a doua extremitate punctul B.

1. $\int_L xdy + ydx,\ A(-1,3),\ B(2,2)$
2. $\int_L xdx + ydy,\ A(-1,0),\ B(-3,4)$
3. $\int_L 2xydx + x^2dy,\ A(0,0),\ B(-2,-1)$
4. $\int_L (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy,\ A(3,0),\ B(0,-3)$
5. $\int_L e^x \cos ydx - e^x \sin ydy,\ A(0,0),\ B(x_0, y_0)$
6. $\int_L xdx + y^2dy - z^3dz,\ A(-1,0,2),\ B(0,1,-2)$
7. $\int_L yzdx + xzdy + xydz,\ A(2,-1,0),\ B(1,2,3)$

INTEGRALE CURBILINII DE SPEȚA II

IV. Să se găsească aria figurii mărginite de liniile, folosind integrala curbilinie de speța II:

1. $y^2 = 4 - x,\ x = 4,\ y = 1;$
2. $y = 1 - x^2,\ x - y - 1 = 0;$
3. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ și $x = 1;$
4. $\begin{cases} x = \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \\ y = \cos 2\varphi \sin^2 \varphi \end{cases} \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$
5. $(y - x)^2 + x^2 = 1$
6. $y^2 = x^2 - x^4$

V. 1. Să se găsească lucrul forței $F = \{xy, x + y\}$ la deplasarea punctului material de-a lungul arcului AB cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, dacă: a) AB ester arcul $y = x$; b) AB arcul $y = x^2$.

2. Să se găsească lucrul forței $F = \{-y, x\}$ la deplasarea punctului material de la punctul $A(1,0)$, la $B(-1,0)$:

- De-a lungul liniei frânte $AMNB$ cu $M(1,1)$, $N(-1,1)$;
- De-a lungul semicercului $x^2 + y^2 = 1$;
- De-a lungul liniei frânte APB cu $P(0,1)$.