1.3 Baza a unui spațiu vectorial. Dimensiune

Definiția 1.3.1 *Se numeşte bază a spațiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplineşte condițiile de mai jos:*

a) B este liniar independentă;

b) B este sistem de generatori pentru spațiul V.

Din definiția de mai sus şi din Teorema 1.2.2 putem deduce că orice vector $x \in V$ se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei B şi că această scriere este unică.

Într-adevăr, dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V, atunci orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n .$$

Definiția 1.3.2 *Scalarii $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ din relația de mai sus se vor numi coordonatele vectorului x în baza B. Vom folosi notația $x_B = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ pentru coordonatele lui x în baza B.*

Definiția de mai sus se extinde în mod natural şi la baze indexate după familii oarecare de indici. Astfel, scalarii ξ_i, coeficienții vectorilor u_i, $i \in I$ (I familie oarecare de indici) din scrierea unică a lui x ca o combinație liniară de vectori ai bazei B se vor numi coordonatele vectorului x în baza B.

Exemplul 1.3.1 *Considerăm spațiul vectorial de la Exemplul 1.1.5. Mulțimea infinită a monoamelor de orice grad, $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ este familie liniar independentă şi sistem de generatori pentru spațiul vectorial real P(t), deci bază.*

Într-adevăr, fie $0 = \sum_{i\in N} \alpha_i t^i$ *o combinaţie liniară nulă formată cu vectorii familiei B, în care numai un număr finit de coeficienţi sunt nenuli. Vom arăta că toţi coeficienţii sunt nuli. Fie r cel mai mare indice pentru care* $\alpha_r \neq 0$. *Din relaţia* $0 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_r t^r$, *adevărată pentru orice* $t \in \mathbf{R}$ *deducem că* $\alpha_i = 0,\ i = 1,\ldots, r$, *(deoarece avem de a face cu un polinom de gradul r care este identic nul. Deci B este o familie liniar independentă. Faptul că B este sistem de generatori pentru P(t) rezultă observând că orice polinom* $f \in P(t)$ *de grad k este o combinaţie liniară a primilor k vectori ai familiei B. De exemplu, coordonatele vectorului* $f = t^7 + 5t^3 - 4t^2 + 1$ *în baza B sunt (1, 0, -4, 5, 0, 0, 0, 1, 0, …, 0,…).*

Exemplul 1.3.2 *Familia* $B = \{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 0, 0), u_4 = (1, 0, 0, 0)\}$ *a spaţiului vectorial real* $\mathbf{R}^4$ *este o bază pentru acesta. Într-adevăr, este uşor de constatat că rangul matricei A*

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este 4 şi, conform Teoremei 1.2.3, familia B este liniar independentă. Mai rămâne de arătat faptul că B este sistem de generatori pentru $\mathbf{R}^4$. *În baza Definiţiei 1.2.2, vom demonstra că pentru orice* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, *există scalarii reali* α_i, $i = 1,\ldots,4$ *astfel încât* $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$ *sau, echivalent,*

(1.3.1) $$A^T \alpha^T = x^T, \qquad \text{unde } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Acum este clar că existenţa scalarilor α_i, $i = 1,\ldots,4$ *este echivalentă cu faptul că sistemul (1.3.1) este compatibil. Deoarece rang* A^T = *rang* $(A^{T,}\ x^T) = 4$, *rezultă că sistemul (1.3.1) este compatibil (vezi paragraful* *din secțiunea 1.5 dedicat rezolvării sistemelor liniare) şi în consecință B este sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{R}^4$. *Deci B este o bază pentru* $\boldsymbol{R}^4$. *Coordonatele vectorului x în baza B sunt date de soluția sistemului (1.3.1). De exemplu, dacă* $x = (4, 3, 2, 1)$, *atunci* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Un spațiu vectorial poate avea mai multe baze, aşa cum rezultă din exemplul următor:

Exemplul 1.3.3 *Considerăm în spațiul* $\boldsymbol{R}^3$ *următoarele familii de vectori* $B = \{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$ *şi* $B_1 = \{ u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$. *Se observă că orice vector* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ *se poate scrie* $x = x_1 E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$, *deci B este sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{R}^3$. *B este şi sistem liniar independent deoarece matricea A =* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *care are pe coloane componentele vectorilor familiei B, are rangul egal cu trei, adică cu numărul vectorilor din B. În concluzie B este bază pentru* $\boldsymbol{R}^3$. *Analog se arată că şi* B_1 *este o bază a lui* $\boldsymbol{R}^3$.

Observația 1.3.1 Baza B din exemplul de mai sus se numeşte bază canonică a lui $\mathbf{R}^3$. După cum am văzut, coordonatele unui vector $x\in \mathbf{R}^3$, în baza canonică, coincid cu componentele sale. Acest rezultat rămâne valabil dacă considerăm în locul spațiului $\boldsymbol{R}^3$, spațiul vectorial real $\mathbf{R}^n$, $n\in \mathbf{N}$, $n>3$, cu precizarea că baza canonică în $\mathbf{R}^n$ este $\{E_1 = (1, 0,\ldots,0), E_2 = (0, 1,\ldots, 0), \ldots, E_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots0), \ldots, E_n = (0, 0,\ldots,1)\}$.

Teorema 1.3.1 *Fie* $G= (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *un sistem de generatori din spațiul vectorial* $V \neq (0)$. *Atunci există o bază B a lui V conținută în G.*

Demonstraţie. Deoarece $V \neq (0)$, putem deduce că există $x_i \in G$, $i = 1,\dots,m$ astfel încât $x_i \neq 0$. Într-adevăr, dacă presupunem prin absurd că toţi $x_i = 0$, atunci nici un vector $x \neq 0$ din V nu poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei G (vezi Observaţia 1.1.1). Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $x_1 \neq 0$. Atunci familia $\{x_1\}$ este liniar independentă. Deci există sisteme liniar independente incluse în G. Fie $\Im(G)$ familia tuturor sistemelor de vectori liniar independente din G şi fie $F \in \Im(G)$ astfel încât numărul de elemente din F să fie maxim. Vom arăta că F este o bază a lui V. Din construcţie, F este sistem de vectori liniar independent, deci este suficient să arătăm că F este sistem de generatori pentru V. Fie $x \in G$, $x \notin F$. Familia $F \cup \{x\}$ este liniar dependentă, căci altfel este contrazisă maximalitatea lui F (dacă familia $F \cup \{x\}$ ar fi liniar independentă ea ar avea un element în plus faţă de F şi am obţine o contradicţie). Aplicăm Teorema 1.2.1 şi deducem că x este o combinaţie liniară a vectorilor din F. Deci orice vector din G este o combinaţie liniară de vectori ai familiei F. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, putem deduce, conform Exerciţiului 1.2.1, că F este sistem de generatori pentru V, şi demonstraţia este încheiată.

Teorema 1.3.2 *Dacă $G = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ este un sistem de generatori în V, iar $F = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un sistem liniar independent atunci $n \leq m$.*

Demonstraţie. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, atunci orice vector din V se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din G, în particular şi vectorii din F. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ astfel încât

(1.3.1) $$v_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Deoarece $v_1 \neq 0$ (altfel F nu ar mai fi familie liniar independentă), deducem că există $i \in \{1,\ldots,n\}$ astfel încât $\alpha_i \neq 0$ şi putem presupune că $\alpha_1 \neq 0$, eventual în urma unei renumerotări. Prin adunarea în ambii membrii ai relaţiei (1.3.1) a vectorului $- \alpha_1 x_1 - v_1$ şi prin înmulţirea relaţiei rezultate cu $(- \alpha_1)^{-1}$, obţinem

$$x_1 =(- \alpha_1)^{-1}(-v_1) + (- \alpha_1)^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots +(- \alpha_1)^{-1}\alpha_m x_m.$$

Deci x_1 este o combinaţie liniară de vectori ai familiei $G_1 = \{v_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Folosind Exerciţiul 1.2.1 deducem că G_1 este un sistem de generatori pentru V. Continuăm procedeul de mai sus considerând în locul lui G sistemul G_1 şi următorul vector din familia F, dacă acesta există. La acest pas avem

$$v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m. \tag{1.3.2}$$

şi este clar că cel puţin unul din coeficienţii vectorilor $x_2,\ldots, x_m$ este nenul. În caz contrar, aplicăm Teorema 1.2.1 şi deducem că F nu este liniar independentă, ceea ce contrazice ipoteza. Raţionând ca mai sus vom înlocui în G_1 pe x_2 cu v_2 şi vom obţine familia G_2 care va fi de asemenea sistem de generatori pentru V. Aplicăm procedeul descris mai sus în continuare şi, după un număr finit de paşi, putem întâlni următoarele situaţii: fie am folosit toţi vectorii din F pentru a înlocui vectori din G, caz în care demonstraţia este încheiată, căci rezultă că $n \leq m$, fie am înlocuit toţi vectorii din G cu vectori din F şi mai avem încă vectori în F.

În acest caz, fie $x \in F$ care nu a fost încă înlocuit. Conform procedeului, în locul lui G avem acum o familie de vectori din F care este sistem de generatori pentru V. Deci acest x se va scrie ca o combinaţie liniară de vectori din F, ceea ce contrazice faptul că F este familie liniar independentă (a se vedea Teorema 1.2.1). În concluzie, acest ultim caz nu este posibil şi demonstraţia a fost încheiată.

Corolarul 1.3.1 *Dacă o bază dintr-un spaţiu vectorial are un număr finit de vectori atunci orice altă bază din acel spaţiu va avea acelaşi număr de vectori.*

Demonstraţie. Fie B şi B_1 baze în spaţiul vectorial V. Presupunem că B este formată dintr-un număr (finit) de m vectori. Vom demonstra că şi B_1 are tot m vectori. Dacă ţinem cont de faptul că B este în particular sistem de generatori şi B_1 este sistem liniar independent, aplicăm Teorema 1.3.2 şi deducem că numărul de vectori ai lui B_1 pe care îl vom nota k satisface inegalitatea $k \leq m$. Acum schimbăm rolul lui B cu cel al lui B_1 şi aplicând aceeaşi teoremă deducem că avem şi inegalitatea $m \leq k$. Din cele două inegalităţi obţinem $m = k$ şi rezultă concluzia.

Deci numărul de vectori dintr-o bază a unui spaţiu vectorial este un element caracteristic al spaţiului vectorial şi nu depinde de baza aleasă. Din corolarul de mai sus arată rezultă că, dacă spaţiul vectorial V admite o bază formată dintr-un număr infinit de vectori, atunci orice altă bază a acestuia va conţine tot un număr infinit de vectori.

Astfel putem introduce definiţia următoare:

Definiţia 1.3.3 *Prin dimensiune a unui K - spaţiu vectorial V, notată $\dim_K(V)$, înţelegem numărul de vectori dintr-o bază a acestuia. Dacă spaţiul vectorial V admite o bază cu un număr infinit de vectori, vom spune că acesta are dimensiunea infinită şi vom scrie $\dim_K(V) = \infty$. Altfel, V este un spaţiu vectorial de dimensiune finită.*

În cele ce urmează ne vom referi la spații vectoriale de dimensiune finită, dacă nu vom face alte precizări.

Observația 1.3.2. O consecință directă a Corolarului 1.3.1 este următoarea: o familie de vectori dintr-un spațiu vectorial de dimensiune *n*, formată din *m* vectori, $m \geq n+1$ este liniar dependentă.

Exemplul 1.3.4 *Spațiul vectorial de la Exemplul 1.1.5, pentru care a fost găsită o bază cu un număr infinit de vectori (vezi Exemplul 1.3.1) are dimensiune infinită, în timp ce spațiul* $\boldsymbol{R}^4$ *va avea dimensiunea 4 (vezi Exemplul 1.3.2).*

Teorema 1.3.3 *Într-un spațiu vectorial de dimensiune finită, orice familie de vectori liniar independentă poate fi extinsă la o bază.*

Demonstrație. Fie B $= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în spațiul vectorial V şi fie F $= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ o familie liniar independentă. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este un sistem de generatori pentru V şi este liniar dependentă, deoarece orice vector x_i se scrie ca o combinație liniară de vectori ai bazei B. Atunci, conform Teoremei 1.2.1 există un prim vector care este combinație liniară de precedenții. Evident, acesta va fi unul din vectorii bazei B. Fie u_i acest prim vector. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ este tot un sistem de generatori pentru V. Procedeul continuă (dacă este posibil) cu eliminarea următorului vector u_k, care este combinație liniară de vectorii precedenți lui. La fiecare pas familia nou obținută este fie liniar independentă, caz în care am obținut baza care va conține familia F, fie este liniar dependentă şi în această situație se continuă eliminarea. Într-un număr finit de paşi se obține concluzia.