

1. Aflați derivatele parțiale de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

1.1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

1.2. $f(x, y, z) = x^4 - y^3 + xy^2 - z^4 + 2x^2y^3z^4$

1.3. $f(x, y) = xy + \frac{y}{x}$

1.4. $f(x, y) = y \cos(x - y)$

1.5. $f(x, y) = \frac{x}{\sin y^2}$

1.6. $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$

1.7. $f(x, y) = ye^x$

1.8. $f(x, y) = e^y (\cos x + y \sin x)$

1.9. $f(x, y) = z^2 + \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1.10. $f(x, y, z) = (\cos x)^{\sin y} + (\sin x)^z.$

2. Să se arate că următoarele funcții verifică relațiile indicate:

2.1. $f(x, y) = e^x \cos y$ verifică $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

2.2. $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$ verifică $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$

2.3. $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ verifică $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

2.4. $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ verifică $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2$

2.5. $f(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ verifică $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

2.6. $f(x, y) = x^y y^x$ verifică $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y + \ln f(x, y))f(x, y)$

2.7. $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$ verifică $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

2.8. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ verifică $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

2.9. $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ verifică $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$

2.10. $f(x, y) = \frac{x-y}{z-t} + \frac{t-x}{y-z}$ verifică $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

3. Să se scrie diferențiala de ordinul al doilea pentru fiecare dintre următoarele funcții:

3.1. $f(x, y) = x^4 + 4y^3 - 3x^4y + 3xy^2$

3.2. $f(x, y, z) = x^4 - y^3 + xy^2 - z^4 + 2x^2y^3z^4$

3.3. $f(x, y) = xy + \frac{y}{x}$

3.4. $f(x, y) = y\cos(x - y)$

3.5. $f(x, y) = \frac{x}{\sin y^2}$

3.6. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

3.7. $f(x, y) = z^2 + \operatorname{arcsin} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3.8. $f(x, y, z) = (\cos x)^{\sin y} + (\sin x)^z$

3.9. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3.10. $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$.