- **Puncte de extrem pentru funcții de două şi mai multe variabile**
- **Extreme condiționate pentru funcții de două variabile**
- **Cea mai mare şi cea mai mică valori a unei funcții de două variabile pe un domeniu închis şi mărginit**

Puncte de extrem pentru funcții de două variabile

Fie funcția $z = f(x,y)$ definită pe un domeniu $D \in R^2$, iar $M_0(x_0, y_0)$ un punct interior al domeniului *D*.

Definiție. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte punct de **maxim** (**minim**) **local**, dacă există o vecinătate *V* a lui $M_0(x_0, y_0)$, astfel încît pentru orice $M(x, y)$ din $V \cap D(f)$ avem că $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ $\left(f(x_0, y_0) \leq f(x,y)\right)$.

Punctele de maxim şi cele de minim local se numesc **puncte de extrem local**. Valorile funcției în punctele de maxim şi cele de minim local se numesc **maximele**, respectiv **minimele funcției**. Minimele şi maximele funcției se mai numesc sau **extreme ale funcției**.

Analog se definesc punctele de extrem pentru funcții de trei şi mai multe variabile.

Exemplu. Fie funcția $f(x,y) = (x+3)^2 + (y-4)^2 + 5$. Avem că $M(-3,4)$ este punct de minim, deoarece pentru orice *M*(*x*,*y*) avem $f(x,y) \geq 5 = f(-3,4)$.

Definiția de mai sus poate fi "tratată" şi în felul următor. Fie $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$. Atunci creşterea funcției este $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ şi

- **Dacă** $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ **pentru creşterile** $\Delta x, \Delta y$ **mici ale argumenților, atunci** $M_0(x_0, y_0)$ **este punct de maxim;**
- **Dacă** $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ **pentru creşterile** $\Delta x, \Delta y$ **mici ale argumenților, atunci** $M_0(x_0, y_0)$ **este punct de minim**.

Remarcă. Definițiile de mai sus se formulează analog pentru funcțiile de *n* variabile.

Teoremă (**condițiile necesare de existență a punctului de extrem**). Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este punct de extrem şi există derivatele parțiale finite $z'_x(x_0, y_0),\ z'_y(x_0, y_0)$, atunci $z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $y = y_0$, atunci $f(x, y_0)$ este funcție de o singură variabilă *x*, pentru care x_0 este punct de extrem. Conform teoremei Fermat $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Analog $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Această teoremă nu reprezintă şi condiții suficiente. De exemplu, fie funcția $f(x,y)=x^2-y^2$. Evident, $z'_x=2x, z'_y=-2y$ şi $z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0$, dar punctul $M_0(0,0)$ **nu** este punct de extrem, graficul acestei funcții este "şaua", iar $(0,0)$ este punct "şa".

Definiție. 1. Punctul $M_0(x_0,y_0)$ în care derivatele parțiale se anulează simultan, se numeşte **punct staționar**.

2. Punctul $M_0(x_0,y_0)$ în care derivatele parțiale se anulează simultan sau cel puțin una nu există, se numeşte **punct critic.**

Fie funcția $z=f(x,y)$ şi $M_0(x_0,y_0)$ un punct, în care există derivatele parțiale de ordinul doi şi sînt continui. Notăm cu

$$H(M_0)=\begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix},$$

numită **matrice hessiană** (Hesse) a punctului $M_0(x_0,y_0)$. Notăm minorii principali $\Delta_1=z''_{xx}(M_0)$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}$.

Teoremă. Fie că funcția $z=f(x,y)$ are derivate parțiale pînă la ordinul 3, inclusiv, continui în careva domeniu ce conține punctul staționar $M_0(x_0,y_0)$.

1) Dacă $\Delta_1>0\, şi\, \Delta_2>0$, atunci $M_0(x_0,y_0)$ este **punct de minim**.
2) Dacă $\Delta_1<0\, şi\, \Delta_2>0$, atunci $M_0(x_0,y_0)$ este **punct de maxim.**
3) Dacă $\Delta_2<0$, atunci $M_0(x_0,y_0)$ nu este punct de extrem (este **punct "şa"**).
4) Dacă $\Delta_2=0$, atunci nu putem afirma nimic despre $M_0(x_0,y_0)$ (este nevoie de un studiu suplimentar)

Teorema de mai sus poate fi demonstrată folosind formula Taylor pentru funcții de 2 variabile.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $z=x^3+6xy+3y^2-9x$.

Găsim punctele staționare ale funcției. Avem $z'_x=3x^2+6y-9$, $z'_y=6x+6y$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6y-9=0, \\ 6x+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ 3x^2-6x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}, \\ \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Avem două puncte staționare $M_1(-1,1)$ şi $M_2(3,-3)$. Găsim derivatele parțiale de ordinul doi $z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=z''_{yx}=6$, $z''_{yy}=6$ Matricea hessiană a punctului $M_1(-1,1)$ este

$H(M_1)=\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. Minorii principali sunt: $\Delta_1=-6<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=-72<0$. Astfel $M_1(-1,1)$ nu este punct de extrem. Matricea hessiană a punctului $M_2(3,-3)$ este $H(M_2)=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. Minorii principali sunt: $\Delta_1=18>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=72>0$. Astfel $M_2(3,-3)$ este punct de minim.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $z=x^2+y^3$.

Găsim punctele staționare ale funcției. Avem $z'_x=2x$, $z'_y=3y^2$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ 3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$. Punctul $M(0,0)$ este punct staționar. Găsim derivatele parțiale de ordinul doi $z''_{xx}=2,\ z''_{xy}=z''_{yx}=0,\ z''_{yy}=6y$ Matricea hessiană a punctului $M(0,0)$ este $H(M)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Minorii principali sunt $\Delta_1=2>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$. Nu putem afirma nimic despre acest punct. Pornim de la definiție. Găsim creşterea funcției în punctul $M(0,0)$. Avem $\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-0=(\Delta x)^2+(\Delta y)^3$. Dacă $\Delta x=0,\Delta y>0$, atunci $\Delta f(0,0)>0$; dacă $\Delta x=0,\Delta y<0$, atunci $\Delta f(0,0)<0$. Astfel $M(0,0)$ nu este punct de extrem, dar este punct „şa”.

Notă. Mai general, pentru o funcție de n variabile $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ folosim criteriul Sylvester pentru a determina punctele de extrem.

1. Aflăm punctele staționare ale funcției, rezolvînd sistemul $\begin{cases} u'_{x_1}=0, \\ u'_{x_2}=0, \\ \dots\dots\dots \\ u'_{x_n}=0 \end{cases}$.
2. Formăm hessiana $H(M_0)=\begin{pmatrix} u''_{x_1x_1}(M_0) & u''_{x_1x_2}(M_0) & \dots & u''_{x_1x_n}(M_0) \\ u''_{x_2x_1}(M_0) & u''_{x_2x_2}(M_0) & \dots & u''_{x_1x_n}(M_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u''_{x_nx_1}(M_0) & u''_{x_nx_2}(M_0) & \dots & u''_{x_nx_n}(M_0) \end{pmatrix}$ fiecărui punct staționar M_0.
3. Găsim minorii principali

$$\Delta_1 = u''_{x_1x_1}(M_0), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{x_1x_1}(M_0) & u''_{x_1x_2}(M_0) \\ u''_{x_2x_1}(M_0) & u''_{x_2x_2}(M_0) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} u''_{x_1x_1}(M_0) & u''_{x_1x_2}(M_0) & u''_{x_1x_3}(M_0) \\ u''_{x_2x_1}(M_0) & u''_{x_2x_2}(M_0) & u''_{x_2x_3}(M_0) \\ u''_{x_3x_1}(M_0) & u''_{x_3x_2}(M_0) & u''_{x_3x_3}(M_0) \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u''_{x_1x_1}(M_0) & u''_{x_1x_2}(M_0) & \ldots\ldots & u''_{x_1x_n}(M_0) \\ u''_{x_2x_1}(M_0) & u''_{x_2x_2}(M_0) & \ldots\ldots & u''_{x_1x_n}(M_0) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ u''_{x_nx_1}(M_0) & u''_{x_nx_2}(M_0) & \ldots\ldots & u''_{x_nx_n}(M_0) \end{vmatrix}$$

4. Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, atunci M_0 este punct de minim.
5. Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$, atunci M_0 este punct de maxim.
6. Dacă toți $\Delta_i \neq 0$, iar semnele lor variază altfel decît în cazurile de mai sus, atunci M_0 nu este punct de extrem.
7. Dacă măcar un $\Delta_i = 0$, atunci nu putem afirma nimic şi este nevoie de cercetat acest punct suplimentar.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$.

Găsim punctele staționare ale funcției. Avem $u'_x = 2x - 2$, $u'_y = 2y - 4$, $u'_z = 2z - 6$.

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \\ u'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$. Punctul $M(1,2,3)$ este punct staționar. Găsim derivatele parțiale de ordinul doi

$$u''_{xx} = 2,\ u''_{xy} = u''_{yx} = 0,\ u''_{xz} = u''_{zx} = 0, u''_{yy} = 2,\ u''_{yz} = u''_{zy} = 0, u''_{zz} = 0.$$

Matricea hessiană a punctului $M(1,2,3)$ este $H(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Minorii principali sunt $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$. Deci $M(1,2,3)$ este punct de minim.

Extreme condiționate pentru funcții de două variabile

La rezolvarea unor probleme, legate de extremele funcției, variabilele independente sunt „dependente” printr-o relație funcțională. Fie că se cere de găsit punctele de extrem ale funcției, de exemplu de două variabile $z = f(x, y)$, unde variabilele x şi y sunt legate de relația $\varphi(x, y) = 0$. În acest caz punctele de extrem sînt numite **puncte de extrem condiționat**. În acest caz este evident că numai o variabilă (fie x) este independentă, iar cealaltă –y (din relația $\varphi(x, y) = 0$) – dependentă. Problema despre punctele de extrem poate fi rezolvată înlocuind în $z = f(x, y)$ valoarea lui y exprimată prin x, găsită din relația $\varphi(x, y) = 0$, obținînd astfel z funcție de o singură variabilă x şi studiind-o la extrem prin metode cunoscute.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem condiționat ale funcției $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ cu condiția $x + y + 3 = 0$.

Din condiție rezultă că $y = -x - 3$, de unde $z = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x + (-x-3) - 4$, sau $z = g(x) = 3x^2 + 9x + 2$. Pentru funcția *g(x)* avem: $g'(x) = 6x + 9$, de unde uşor se arată că $x = -3/2$ este punct de minim pentru funcția *g(x)*, iar $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ este punct de minim pentru funcția z.

Problema poate fi rezolvată prin altă metodă, fără a exprima y prin x (metodă "bună" mai ales în cazul cînd exprimarea lui y prin x este dificilă sau chiar imposibilă). Din relația $z = f(x, y)$ avem $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. În punctele de extrem avem $\frac{dz}{dx} = 0$, de unde $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$. Derivînd după x ambele părți ale relației $\varphi(x, y) = 0$, obținem $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$. Înmulțind ultima relație la λ şi adunînd-o la penultima, obținem $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$ sau $\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$ - egalitate justă pentru orice punct de extrem. Alegem λ astfel încît $\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, de unde $\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

Obținem sistemul $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ cu trei necunoscute *x*, *y* şi λ. Sistemul reprezintă condiții necesare pentru extremele condiționate. Pentru a determina dacă punctele găsite sunt puncte de extrem trebuie un studiu suplimentar.

Observvăm că părțile stîngi ale ecuațiilor sistemului de mai sus sunt derivate parțiale ale funcției de trei variabile $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, numită **funcția Lagrange**, iar λ - **multiplicator Lagrange**. Astfel pentru a găsi punctele de extrem condiționat ale funcției $z=f(x,y)$, legate de condiția $\varphi(x,y)=0$, alcătuim funcția auxiliară Lagrange $F(x,y,\lambda)$, găsim derivatele parțiale după *x*, *y* şi λ. Apoi găsim punctele staționare (x_0,y_0,λ_0) ale funcției *F*, şi repectiv (x_0,y_0) - **punctele staționare condiționat** ale funcției *z*.

Teoremă. Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct staționar condiționat ale funcției $z=f(x,y)$ cu funcția Lagrange $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. Fie că $z=f(x,y)$ şi $F(x,y,\lambda)$ sunt continui în $M_0(x_0,y_0)$, respectiv $M_0'(x_0,y_0,\lambda_0)$, împreună cu derivatele lor pînă la ordinul doi inclusiv. Fie $\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(M_0) & \varphi_y'(M_0) \\ \varphi_x'(M_0) & F_{xx}''(M_0') & F_{xy}''(M_0') \\ \varphi_y'(M_0) & F_{yx}''(M_0') & F_{yy}''(M_0') \end{vmatrix}$. Atunci dacă $\Delta<0$, $M_0(x_0,y_0)$ este punct de maxim condiționat; dacă $\Delta>0$, $M_0(x_0,y_0)$ este punct de minim condiționat pentru funcția $z=f(x,y)$.

Metoda de determinare a punctelor de extrem condiționat, expusă mai sus, se numeşte **metoda multiplicatorilor Lagrange**.

Să examinăm exemplul de mai sus folosind metoda multiplicatorilor Lagrange.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem condiționat ale funcției $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ cu condiția $x+y+3=0$.

Funcția Lagrange este $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-xy+x+y-4+\lambda(x+y+3)$. Găsim derivatele parțiale ale ei: $F_x'=2x-y+1+\lambda,\ F_y'=2y-x+1+\lambda,\ F_\lambda'=x+y+3$. Găsim punctele staționare ale funcției F: $\begin{cases} 2x-y+1+\lambda=0, \\ 2y-x+1+\lambda=0, \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3/2, \\ y=-3/2, \\ \lambda=1/2 \end{cases}$ Deci, $(-3/2,-3/2,1/2)$ este punct staționar al funcției F, iar $(-3/2,-3/2)$ este punct staționar condiționat al funcției *z*.

Avem $\varphi_x'=1, \varphi_y'=1, F_{xx}''=2,\ F_{xy}''=-1,\ F_{yy}''=2$, şi $\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6>0$, de unde $(-3/2,-3/2)$ este punct de minim condiționat al funcției *z*.

Notă. Dacă este dată funcția de n variabile $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definită pe un domeniu $D \subseteq R^n$ şi un sistem de $m < n$ legături $\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$ unde φ_i sunt funcţii definite pe $D \subseteq R^n$, se alcătuieşte funcţia Lagrange

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_m\varphi_m.$$

Apoi se găsesc punctele staționare ale funcției F şi repectiv punctele staționare condiționate ale funcției u. Iar cercetarea lor la extrem se face cu ajutorul diferențialei de ordinul II.

Cea mai mare şi cea mai mică valori a unei funcții de două variabile pe un domeniu închis şi mărginit

Fie funcţia $z = f(x, y)$ continuă pe careva domeniu închis şi mărginit *D*, şi fie că *z* are derivate parţiale finite în D (cu excepţia, posibil, a unor puncte). Conform proprietăților funcţiei continui, funcţia *z* îşi atinge valorile maximă şi minimă pe acest domeniu. Pentru a găsi cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcţiei *z* pe domeniul *D*, se procedează analog cazului funcţiei de o singură variabilă. Se ia în consideraţie că aceste valori pot fi atinse atît în punctele de extrem care aparţin domeniului *D*, cît şi pe frontiera lui. Deci, **trebuie găsite punctele "suspecte la extrem", care aparţin lui *D* (punctele critice)**, apoi **se calculează valorile funcţiei în aceste puncte**. La pasul următor **se cercetează funcția pe frontiera domeniului**, găsindu-i valori în punctele critice condiționate. În final **se selectează cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcţiei** pe domeniul *D*.

Exemplu. Să se găsească cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcţiei $z = xy$ pe discul $D: x^2 + y^2 \le 1$.

Găsim punctele critice $\begin{cases} z'_x = y = 0, \\ z'_y = x = 0 \end{cases}$. Avem un punct critic (0,0) care aparține domeniului şi $z(0,0) = 0$. Cercetăm funcția pe frontiera domeniului care este cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Găsim punctele critice ale funcției Lagrange $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ care sunt potențiale puncte de extrem condiționat ale funcției z. Găsim derivatele parțiale ale funcției F: $F'_x = y + 2\lambda x,\ F'_y = x + 2\lambda y,\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Obținem următoarele puncte staționare ale funcției F:

$$M_1'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right),\quad M_2'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right),\quad M_3'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right),\quad M_4'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

şi respectiv punctele staționare condiționat al funcției z:

$$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Găsim $z(M_1) = z(M_2) = \frac{1}{2},\ z(M_3) = z(M_4) = -\frac{1}{2}$. Comparînd valorile obținute cu $z(0,0) = 0$, avem că cea mai mare valoare a funcției pe domeniul dat este $\frac{1}{2}$, iar cea mai mică este $-\frac{1}{2}$.