NC 2.4.

DERIVATE PARŢIALE ŞI DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR. TEOREMA SCHWARZ.

Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior

Fie funcţia de două variabile $z = f(x, y)$, ce posedă în careva domeniu $D \in R^2$ derivate parţiale de ordinul I: $f'_x(x, y),\ f'_y(x, y)$, ultimele fiind la rîndul lor funcţii de două variabile şi care „au dreptul” să aibă şi ele derivate parţiale.

Derivatele parţiale în raport cu x şi y ale funcţiilor $f'_x(x, y),\ f'_y(x, y)$, dacă ele există, se numesc **derivate parţiale de ordinul II ale funcţiei** $z = f(x, y)$ şi se notează astfel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ sau } \left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2} = z''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ sau } \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ sau } \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ sau } \left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2} = z''_{yy}.$$

Analog se definesc derivatele de ordinul 3 şi mai mare.

Derivatele parţiale de ordin superior luate după diferite variabile se numesc **mixte.** De exemplu, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ etc.

Exemplu. Să se găsească $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pentru $z = arctg\frac{y}{x}$. Găsim

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Observăm că $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$. Acest rezultat nu este întîmplător, dar nu este nici „regulă” pentru orice funcţie.

Exemplu. Fie funcţia

$$z = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}.$$

Avem $z'_x = y \cdot \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$ pentru $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Fie $x = 0 \Rightarrow z'_x(0,y) = -y$. Derivînd apoi după *y*, avem $z''_{xy}(0,y) = -1$, de unde $z''_{xy}(0,0) = -1$. Analog se arată că $z''_{yx}(x,0) = 1$, de unde $z''_{yx}(0,0) = 1$. Deci, $z''_{yx}(0,0) \neq z''_{xy}(0,0)$.

Teoremă (Schwarz). Dacă într-o vecinătate oarecare a punctului (x_0, y_0) există derivatele parțiale $f'_x(x,y), f'_y(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ ale funcției $z = f(x,y)$, iar derivatele mixte $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ sunt continui în (x_0, y_0), atunci ele sunt egale în acest punct.

Notă. Din teorema de mai sus rezultă următoarele:

1. Dacă derivatele parțiale $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ ale funcției $z = f(x,y)$ sunt continui pe un domeniu $D \in R^2$, atunci $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ pe acest domeniu.
2. Dacă funcția $z = f(x,y)$ admite pe domeniul $D \in R^2$ derivate parțiale pînă la ordinul *k* inclusiv, continui pe *D*, atunci derivatele mixte de ordinul $n \leq k$, care diferă numai prin ordinea derivărilor efectuate, coincid una cu alta.

De exemplu, $f^{(4)}_{xyxx} = f^{(4)}_{yxxx} = f^{(4)}_{xxxy}$ etc.

Pentru funcțiile de 3 şi mau multe variabile sunt juste afirmații similare.

Pentru funcția $z = f(x,y)$ **diferențiala de ordinul I** are forma $dz = z'_x dx + z'_y dy$ şi depinde atît de punctul (x,y) cît şi de dx, dy. Fixînd dx, dy, obținem o funcție de două variabile *x* şi *y*, definită pe *D*. Diferențiala totală a funcției *dz*, dacă există, se numeşte **diferențială de ordinul II**, şi se notează cu $d^2 z$ sau $d^2 f(x,y)$. Deci, $d^2 z = d(dz)$. Avem $d^2 z = d(z'_x dx + z'_y dy) = dx \cdot d(z'_x) + dy \cdot d(z'_y) = dx(z''_{xx} dx + z''_{xy} dy) + dy(z''_{yx} dx + z''_{yy} dy)$ sau $d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$, sau $d^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Simbolic se mai scrie $d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$. Iar în cazul diferențialei de ordinul *n*, dacă există, are loc $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$.