Derivate parţiale de ordinul I. Diferenţiala funcţiei. Aplicaţii

Derivate parţiale de ordinul I.

Considerăm funcţia de 2 variabile $z = f(x,y)$ şi fie că argumentul x primeşte o creştere Δx, iar y rămîne constant. Atunci funcţia z primeşte o creştere $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$, numită **creştere parţială a funcţiei *z* după *x***. Analog, dacă argumentul x rămîne constant, iar y primeşte o creştere Δy funcţia z primeşte o creştere $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$, numită **creştere parţială a funcţiei *z* după *y*.** În sfîrşit, atribuind lui x o creştere Δx, iar lui y o creştere Δy, funcţia z primeşte o creştere $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, numită **creştere totală a funcţiei *z***. În general, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ (de exemplu, $z = xy$)

Definiţia 1. Se numeşte **derivată parţială** a funcţiei $z = f(x,y)$ **în raport cu *x*** valoarea limitei $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, cu condiţia că această limită există.

Se notează cu $f_x'(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, z_x' .

Analog se defineşte **derivata parţială** a funcţiei $z = f(x,y)$ **în raport cu *y***:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Derivatele de mai sus se numesc **derivate parţiale de ordinul întîi** ale funcţiei $z = f(x,y)$.

Remarcă. Din definiţia derivatelor parţiale rezultă că **la calcularea derivatei parţiale în raport cu *x*, variabila *y* se consideră constantă**, iar atunci când se calculează **derivata parţială în raport cu variabila *y*, constantă se consideră variabila *x***. Acest fapt ne permite să folosim regulile şi formulele de derivare ale funcţiei de o singură variabilă.

Exemplu . Să se afle derivatele parţiale ale funcţiei $z = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 + y^3$.

Rezolvare. Avem $z_x' = 3x^2 - 6xy + 2y^2$, $z_y' = -3x^2 + 4xy + 3y^2$.

Exemplu. Să se afle derivatele parţiale ale funcţiei $z = x^y$.

Rezolvare. Avem $z_x' = yx^{y-1}$, $z_y' = x^y \ln x$,

În mod analog sunt definite derivatele parţiale de ordinul întâi pentru funcţia de n variabile.. De exemplu, o funcţie de 3 variabile $u = f(x,y,z)$ are trei derivate parţiale de ordinul întîi: u_x' , u_y', u_z'.

Exemplu. Pentru funcția $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ să se afle valoarea sumei $S = u'_x + u'_y + u'_z$ în punctul $M_0(1,1,1)$.

Rezolvare. Găsim derivatele parțiale u'_x , u'_y, u'_z .

$$u'_x = \frac{1}{1+x+y^2+z^3},\ u'_y = \frac{2y}{1+x+y^2+z^3},\ u'_z = \frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3}.$$

În continuare aflăm valorile acestor derivate în punctul $M_0(1,1,1)$: $u'_x(1,1,1) = \frac{1}{4}$, $u'_y(1,1,1) = \frac{2}{4}$, $u'_z(1,1,1) = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $S(1,1,1) = \frac{3}{2}$.

Diferențiala funcției. Aplicații. Derivata funcției compuse

Definiție. Funcția $z = f(x, y)$ se numeşte **diferențiabilă** în punctul $M(x, y)$ dacă creşterea totală a ei Δz poate fi reprezentată sub forma $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, unde α, β tind spre zero cînd $\Delta x, \Delta y \to 0$

Definiție. Partea liniară a creşterii Δz, adică $A\Delta x + B\Delta y$, se numeşte **diferențială totală de ordinul întâi** a funcției $z = f(x, y)$ în punctul $M(x, y)$ şi se notează prin dz. Deci, $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Se demonstrează că dacă funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în $M(x, y)$, atunci ea are *derivate* parțiale în M şi $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Creşterile $\Delta x, \Delta y$ ale argumenților se mai numesc diferențiale ale acestor argumenți şi se notează cu dx, dy. Atunci $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ şi $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ sau $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Ținând cont de faptul că $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ tinde spre 0, avem că $\Delta z \approx dz$, sau

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y -$$

formulă folosită la calculul aproximativ.

Exemplu. Să se găsească valoarea aproximativă a expresiei:

$$E = arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$$

Rezolvare. Considerăm funcția $f(x, y) = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$. Atunci $E = f(1{,}97; 1{,}02)$ şi $E \approx f(2,1) + f'_x(2,1) \cdot (-0{,}03) + f'_y(2,1) \cdot 0{,}02$. Avem $f(2,1) = \frac{\pi}{4}$, $f'_x(x, y) = \frac{1}{1+(x/y-1)^2} \cdot \frac{1}{y}$, $f'_y(x, y) = \frac{1}{1+(x/y-1)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$, şi $f'_x(2,1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(2,1) = -1$. Deci $E \approx 0{,}75$.

În mod analog se defineşte diferențiala funcției de 3 şi mai multe variabile.

Exemplu. Să se determine diferențiala de ordinul întâi pentru funcția

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + x\ln y + y\ln z + z\ln x$$

Rezolvare. Avem: $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 + \ln y + \frac{z}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{x}{y} + \ln z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 + \frac{y}{z} + \ln x$. Atunci $df = (y^2 z^3 + \ln y + \frac{z}{x})dx + \left(2xyz^3 + \frac{x}{y} + \ln z\right)dy + (3xy^2 z^2 + \frac{y}{z} + \ln x)dz$

Derivata funcției compuse

Fie funcția $z = f(x, y)$, iar $x = x(t), y = y(t)$. Atunci *z* este funcție de *t*. Dacă funcțiile $x(t), y(t)$ sunt derivabile cu derivate continui pe careva interval, atunci funcția z are derivată după t şi $z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t$, numită **derivată totală a funcției z.**

Fie funcția $z = f(x, y)$, iar $x = x(u, v), y = y(u, v)$. Atunci *z* este funcție de *u şi v*. În condițiile în care derivatele parțiale există, le putem găsi după formulele

$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u$, $z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v$.

Funcții definite implicit

Fie că valorile variabilelor *x* şi *y* sunt legate de o careva ecuație $F(x, y) = 0$. Dacă funcția $y = f(x)$, definită pe careva interval I, este de aşa natură încît înlocuind $f(x)$ în locul lui *y* în ecuația $F(x, y) = 0$, o transformă într-o identitate adevărată față de *x*, atunci se spune că $F(x, y) = 0$ defineşte **implicit** funcția de o singură variabilă $f(x)$.

Exemplu: Ecuația $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ defineşte *implicit* funcțiile $f(x) = \mp\sqrt{R^2 - x^2}$.

Însă nu orice funcție definită implicit poate fi definită explicit, adică sub forma $y = f(x)$. De exemplu, $y - x - \sin(xy) = 0$. Ne interesează derivata lui *y* în raport cu *x*.

Teoremă. Fie că funcția continuă *y* de *x* este dată de ecuația $F(x, y) = 0$, unde $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ sunt funcții continui în careva domeniu D, care conține punctul (x, y) şi $F'_y(x, y) \neq 0$. Atunci $y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Demonstrație. Atribuim variabilei independente *x* creşterea Δx. Atunci *y* va primi creşterea Δy, adică valorii creşterea $x + \Delta x$ îi corespunde valoarea funcției $y + \Delta y$. Atunci $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, de unde $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$. Partea stîngă a egalității reprezintă creşterea totală a unei funcții de două variabile şi $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, unde α, β tind spre zero cînd $\Delta x, \Delta y \to 0$. Obținem $F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0$, de unde $F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha + \beta\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, sau $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}$. Trecînd la limită cînd $\Delta x \to 0$, obținem $y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Analog, o ecuație $F(x, y, z) = 0$ definește implicit o funcție z de două variabile x, y, ale cărei **derivate parțiale** se găsesc după formula

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Exemplu: Să se găsească z'_x, z'_y, fiind dată ecuația $e^z + z - x^2y + 1 = 0$.

Avem $F(x, y, z) = e^z + z - x^2y + 1$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$.

Atunci $z'_x = \frac{2xy}{e^z+1}$, $z'_y = \frac{x^2}{e^z+1}$.

Ecuația planului tangent și a normalei la suprafață

Definiție. O dreaptă se numește **tangentă la suprafața** $F(x, y, z) = 0$ în careva punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe suprafață, dacă ea este tangentă la careva linie ce se află pe suprafață și care trece prin P_0.

Deoarece prin P_0 trec o infinitate de astfel de linii , atunci și tangente vor fi o infinitate.

Notă: Este cunoscut că dacă $\exists\ F'_x, F'_y, F'_z$ și măcar una nenulă în P_0, atunci toate tangentele se află într-un plan, numit **plan tangent la suprafață în** P_0.

Punctele în care măcar una dintre derivatele F'_x, F'_y, F'_z nu există, sau toate sunt egale cu 0, se numesc **puncte singulare**. Menționăm că în punctele singulare planul tangent poate nici să nu existe. În aceste puncte tangentele la suprafață pot să nu se afle toate într-un plan. De exemplu, vîrful suprafeței conice este punct singular. Tangentele la suprafață conică în vîrf nu se află într-un plan (ele însăși formează suprafața).

Teoremă: Pentru ca suprafața $z = f(x, y)$ să aibă plan tangent în P_0 este necesar și suficient ca funcția să fie diferențiabilă în acest punct.

Definiție: **Normală la suprafață** în punctul P_0 se numește perpendiculara la planul tangent, dus la suprafață în acest punct.

Dacă suprafața S este dată de ecuația $z = f(x, y)$, atunci:

- **Ecuația planului tangent la suprafață** în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, unde $z_0 = f(x_0, y_0)$, care nu este punct singular, este
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
- **Ecuația normalei la suprafață** în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$
$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Dacă suprafața S este dată de ecuația $F(x, y, z) = 0$ atunci:

- **Ecuația planului tangent la suprafață** în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, care nu este punct singular, este

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

- **Ecuația normalei la suprafață** în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$