NC 5.5.

SERII TAYLOR.
SERII TAYLOR ALE UNOR FUNCȚII ELEMENTARE

- **Polinomul Taylor. Serii Taylor. Serii Mac Laurin**
- **Serii Taylor pentru funcții elementare**

Polinomul Taylor. Serii Taylor. Serii Mac Laurin

Fie , că funcția $f(x)$ posedă derivate pînă la ordinul $n+1$ inclusiv în careva vecinătate a punctului $x=a$. Să găsim un polinom $T_n(x)$ de grad n astfel încît

$$T_n(a)=f(a),\ T_n'(a)=f'(a),\ T_n''(a)=f''(a),\ldots T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Este de așteptat, ca acest polinom să ”aproximeze” în careva măsură funcția f în vecinătatea lui $x=a$. Căutăm polinomul $T_n(x)$ sub forma $T_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\ldots+C_n(x-a)^n$, unde coeficienții $C_0, C_1,\ldots, C_n$ sunt necunoscuți și vor fi găsiți din condițiile puse mai sus. Avem $T_n(a)=C_0=f(a)$,

$$T_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+\ldots+nC_n(x-a)^{n-1},\ T_n'(a)=C_1=f'(a),$$

$$T_n''(x)=2C_2+3\cdot 2\cdot C_3(x-a)+\ldots+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},\ T_n''(a)=1\cdot 2\cdot C_2=f''(a),\ \ldots$$

$$T_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot C_n,\ T_n^{(n)}(a)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot C_n=f^{(n)}(a).$$

Astfel, $C_0=f(a),\ C_1=\dfrac{f'(a)}{1!},\ C_2=\dfrac{f''(a)}{2!},\ldots,\ C_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, de unde $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Polinomul $T_n(x)$ se numește **polinom Taylor** de gradul n al funcției $f(x)$ în punctul $x=a$.

Exemplu. Pentru funcția $f(x)=e^x$ cu $a=0$, avem polinoamele Taylor:

$$T_1(x)=1+x;\ T_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!};\ T_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!};\ \text{etc.}$$

Dacă $R_n(x)$ este diferența dintre $f(x)$ și $T_n(x)$, atunci $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$. Termenul $R_n(x)$ se numește **termen de rest**. Una din reprezentările lui $R_n(x)$ este $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, unde ζ situat între a și x, numită forma Lagrange a termenului de rest. Atunci $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)$ se numește **formula Taylor** a funcției $f(x)$ în punctul $x=a$. În caz particular când $a=0$ formula $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$ se numeşte formulă Mac Laurin.

NC 5.5.

SERII TAYLOR.
SERII TAYLOR ALE UNOR FUNCȚII ELEMENTARE

Dacă funcția $f(x)$ posedă derivate de orice ordin în $x=a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, atunci trecând la limită când $n\to\infty$ în egalitatea $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)$ obținem $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^n+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ numită **serie Taylor** a funcției $f(x)$ în vecinătatea punctului a. În cazul când $a=0$ obținem **seria Mac Laurin**: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

Serii Taylor ale unor funcții elementare

Seria Taylor pentru $f(x)=e^x$ în punctul $x=0$. Pentru a scrie seria Taylor pentru această funcție calculăm derivatele ei în punctul 0. Avem:

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ ..,\ f^{(n)}(x)=e^x,..\ ;\ f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1\,.$$

Obținem seria $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

Suma seriei din partea dreaptă a egalității este egală cu e^x pentru orice $x\in(-\infty,+\infty)$, deoarece din termenul de rest $R_n(x)=\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}$, pentru orice $x\in[-b,b]$ avem: $\left|R_n(x)\right|\le\frac{e^b b^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ când $n\to\infty$.(numărul b fiind arbitrar)

Seria Taylor pentru funcția $f(x)=\sin x$. Avem $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x,\ldots$; $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0,\ldots$

Obținem $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.,$ $x\in(-\infty,+\infty)$ (se demonstrează analog că descompunerea are loc pentru orice x real).

Seria Taylor pentru funcția $f(x)=\cos x$. Avem $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, ...; $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1$, ...

Obținem $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ $x\in(-\infty,+\infty)$.

Seria Taylor pentru funcția $f(x)=(1+x)^m$**, unde** m **este o constantă reală.** Avem: $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$, $f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ...,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, ...; $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$, ..., $f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1)$, ...

Obținem seria Taylor pentru funcția $(1+x)^m$, care se numeşte şi **serie binomială**:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ x \in (-1,1).$$

Am acceptat domeniul de convergență a seriei de sus fără demonstrație.

În cazul $m=-1$, avem $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}x^n + \ldots.\ x \in (-1,1).$

Seria Taylor pentru funcția $f(x)=\ln(1+x)$**.** Folosim formula de mai sus, integrând ambele părți ale acestei egalități pe segmentul $[0,x],\ x\in(0,1)$:

$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)dx$, obținem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\quad x\in(-1,1).$$

Seria Taylor pentru funcția $f(x)=arctgx$**.** Integrând pe segmentul $[0,x],\ x\in(0,1)$, egalitatea $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n+1}x^{2(n-1)} + \ldots,\quad x\in(-1,1)$, obținem

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,\ x\in(-1,1).$$

Seria Taylor pentru $f(x)=\arcsin x$**.** Cum $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2}$, din seria binomială

obținem $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 - \frac{1}{2}(-t) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}t^2 + \ldots + (-1)^n\frac{(-1/2)(-3/2)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}t^n + \ldots$

Înlocuind t cu x^2 avem $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}x^{2n} + \ldots$ Integrând această egalitate pe segmentul $[0,x],\ x\in(0,1)$, avem:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\quad x\in(-1,1).$$

Seria Taylor pentru $f(x)=\arccos x$ Cum $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, obținem

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \ldots,\quad x\in(-1,1).$$

Seria Taylor pentru funcțiile hiperbolice shx şi chx. Cum $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ şi $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, pentru $x\in(-\infty,+\infty)$ obținem:

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\qquad chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots$$