NC 5.1.

SERII NUMERICE. NOȚIUNI GENERALE. CRITERIUL NECESAR DE CONVERGENȚĂ EXEMPLE

- **Şiruri numerice (recapitulare)**
- **Serii numerice. Definiții, exemple**
- **Proprietăți ale seriilor numerice. Operații cu serii numerice**

Şiruri numerice (recapitulare)

Se numeşte **şir numeric** o funcție f definită pe mulțimea numerelor naturale **N** (sau pe o submulțime a ei) cu valori în mulțimea numerelor reale **R**.

Dacă notăm cu $x_n = f(n)$, atunci şirul numeric definit de funcția f poate fi notat cu $\{x_n : n \in N\}$, sau mai succint (x_n). Şirul (x_n) se mai scrie şi astfel: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Termenul x_n se numeşte **termen general** sau **termen de rang** *n* al şirului.

Exemple de şiruri numerice:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$
3. $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$
4. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Un şir (x_n) se numeşte:

majorat sau **mărginit de sus**, dacă există aşa număr real M încât $x_n \le M, \forall n \in$ **N**;

minorat sau **mărginit de jos** dacă există aşa număr real m încât $x_n \ge m, \forall n \in$ **N**;

mărginit, dacă el este majorat şi minorat.

Şirurile 1), 2) şi 3) sunt mărginite, iar şirul 4) este minorat şi nu este majorat.

Un şir numeric (x_n) se numeşte:

strict crescător, dacă $x_n < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

strict descrescător, dacă $x_n > x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

descrescător, dacă $x_n \ge x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

crescător, dacă $x_n \le x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

monoton, dacă el este sau crescător, sau descrescător, sau strict crescător, sau strict descrescător;

strict monoton, dacă el este crescător sau descrescător.

Şirurile 2) şi 4) sunt crescătoare, şirul 1) este descrescător, iar şirul 3) nu este monoton.

Numărul real a se numeşte **limită** a şirului (x_n), dacă:

SERII NUMERICE. NOŢIUNI GENERALE. CRITERIUL NECESAR DE CONVERGENŢĂ EXEMPLE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon.$$

Dacă a este limita şirului (x_n), atunci se scrie $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Şirul (x_n) care admite o limită finită a se numeşte **convergent**. Un şir care nu este convergent se numeşte **divergent.**

Un şir crescător şi mărginit de sus este convergent; un şir descrescător şi mărginit de jos este convergent; un şir monoton şi mărginit este convergent.

Serii numerice

Definiție. Se numeşte **serie numerică** o expresie de forma $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$,unde $a_1, a_2, ..., a_n, ..$ sunt numere reale. Seria numerică se mai notează cu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Numerele $a_1, a_2, ..., a_n, ..$ se numesc **termeni** ai seriei, iar a_n se numeşte **termen general** sau **termen de rang n** al acestei serii.

Exemple de serii numerice.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ (seria armonică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ...$(seria Dirichlet)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... + n + ...$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ (seria geometrică)

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$

Definiție. Suma primilor n termeni ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **sumă parțială de rang** n a acestei serii şi se notează cu S_n.

Din definiție rezultă că $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, ...,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$

Definiție. Dacă există limita finită S a şirului sumelor parțiale (S_n): $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, atunci se spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este **convergentă**, iar numărul S se numeşte **sumă** a acestei serii. Dacă limita sumelor parțiale nu există sau este infinită, atunci se spune că seria dată este **divergentă**.

SERII NUMERICE. NOȚIUNI GENERALE. CRITERIUL NECESAR DE CONVERGENȚĂ EXEMPLE

Exemple:

1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1+2+...+n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1)=\infty$

2) Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ este divergentă, deoarece $S_n=1$, dacă n este impar, şi $S_n=0$, dacă n este par. Deci nu există limita şirului sumelor integrale.

3) Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ este convergentă, deoarece ea reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice infinit descrescătoare cu primul termen $\frac{1}{2}$ şi cu rația $\frac{1}{2}$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1$$

4) Considerăm seria $a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $a\neq 0$.

Această serie reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice cu primul termen a şi cu rația q. Cum pentru această serie $S_n = a+aq+aq^2+aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q}$, avem:

a) dacă $|q|<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$;

b) dacă $|q|>1$, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$;

c) dacă $q=1$ atunci $S_n = a+a+...+a = na \to \pm\infty$ când $n\to\infty$;

d) dacă $q=-1$, atunci $S_n=0$, dacă n este par, şi $S_n=a$, dacă n este impar.

Rețineți !!! Seria $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ este convergentă cu suma $S=\frac{a}{1-q}$ dacă $|q|<1$.

Altfel, seria dată este divergentă.

5) Seria $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ care se numeşte **serie armonică** este divergentă.

Într-adevăr, putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right]+... > 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right]+... = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

Din aceste relaţii avem: $S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ S_4 > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2,\ S_8 > 1 + \frac{1}{2} \cdot 3, \ldots, S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} n, \ldots$

Evident că sumele parţiale cresc nemărginit când $n \to \infty$, ceea ce înseamnă că seria armonică este divergentă.

Teoremă (**Criteriul necesar de convergenţă**) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstraţie. Fie că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi suma ei este *S*. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

A cerceta convergenţa unei serii înseamnă a determina dacă ea este convergentă sau este divergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei de termen general $a_n = \frac{n-1}{n}$.

Rezolvare. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \neq 0$, seria dată este divergentă.

Menţionăm că condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nu este suficientă pentru convergenţa seriei. De exemplu, termenul general al seriei armonice verifică această condiţie, dar seria este divergentă.

Proprietăţile seriilor convergente. Operaţii cu serii şi proprietăţile lor

Teoremă. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci şi numai atunci, când este convergentă seria obţinută din ea prin suprimarea unui număr finit de termeni.

Demonstraţie. Fie că din seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ au fost înlăturaţi k termeni, suma cărora este egală cu p_k, şi ei se află printre primii m termeni ai acestei serii. Atunci, pentru $n > m$, avem $s_n = p_k + q_{n-k}$, unde s_n sunt sumele parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iar q_{n-k} sunt sumele parţiale ale seriei noi obţinute. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p_k + \lim\limits_{n\to\infty} q_{n-k}$, limitele $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} q_{n-k}$ există şi sunt finite simultan. Deci şi seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi cea nouă sunt convergente sau divergente simultan.

Definiţie. Fie date seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

1) se numeşte **sumă** a seriilor date seria de termen general $a_n + b_n$
2) se numeşte **produs dintre seria** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi **numărul** c seria de termen general ca_n
3) se numeşte **produs al seriilor** date seria de termen general $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

SERII NUMERICE. NOȚIUNI GENERALE. CRITERIUL NECESAR DE CONVERGENȚĂ EXEMPLE

Teoremă . Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$, atunci sunt convergente şi seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ şi au loc egalitățile: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + \sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs$.

La demonstrare teoremei se folosesc proprietățile şirurilor convergente.