SERII CU TERMENI POZITIVI. CRITERII DE CONVERGENȚĂ

Definiție. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **serie cu termeni pozitivi** dacă $a_n > 0,\ n = 1, 2, ...$

Criteriul de comparație. Fie că termenii seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ verifică condiția $a_n \geq b_n > 0$, $n = 1,2,...$ Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci este divergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstrație. Notăm cu s_n şi p_n sumele parțiale ale seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ respectiv. Cum termenii acestor serii sunt pozitivi, rezultă că şirurile sumelor parțiale ale lor: $\{s_n\}$ şi $\{p_n\}$ sunt crescătoare.

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci există limita finită $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Atunci $s_n \leq p_n < p$, $n = 1,2,...$, şi deci şirul $\{s_n\}$, fiind crescător şi mărginit, are limită finită: $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Astfel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, iar suma ei este mai mică decît suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Cum $s_n \leq p_n$, $n = 1,2,...$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Când se aplică acest criteriu, comparația se face cu o serie despre care se ştie că ea este convergentă sau este divergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Rezolvare. Cum pentru $n \geq 1$ avem $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} > 0$, din divergența seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ rezultă divergența seriei date.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

Rezolvare. Cum pentru $n \geq 1$ are loc relația $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n + 1} > 0$, atunci din convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ rezultă convergența seriei date.

Criteriul D'Alambert. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Atunci :

a) dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă;
b) dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Demonstrație. a) Fie că $l < 1$. Luăm un număr q, astfel încât $l < q < 1$. Atunci din (2.5) rezultă că există un așa număr natural k încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ pentru orice $n \geq k$, adică $a_{k+1} < a_k q$, $a_{k+2} < a_k q^2$, ..., $a_{k+n} < a_k q^n$,... Examinăm seriile cu termeni pozitivi

$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n} + ..., \quad a_k q + a_k q^2 + ... + a_k q^n + ...$$

Cum $|q| < 1$, seria $a_k q + a_k q^2 + ... + a_k q^n + ...$ este convergentă. Folosind criteriul de comparație, demonstrăm convergența seriei $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n} + ...$ și deci convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Fie că $l > 1$. Atunci există un număr natural M, încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pentru orice $n \geq M$. Deci $a_M < a_{M+1} < ...$ și seria $a_M + a_{M+1} + ...$ este divergentă (din criteriului necesar de convergență), de unde rezultă divergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă avem $l = 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poate fi divergentă sau poate fi convergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Rezolvare. Avem $a_n = \frac{1}{n!}$ și $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Cum $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1:(n+1)!}{1:n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, seria dată este convergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4+1}$.

Rezolvare. Cum $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^4+}:\frac{3^n}{n^4+1}\right) = 3$, seria dată este divergentă.

Criteriul radical Cauchy. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ atunci:

a) dacă $l<1$, atunci seria dată este convergentă;
b) dacă $l>1$, atunci seria este divergentă.

Demonstrație. a) Fie că $l<1$ şi q este un număr care satisface condiția $l<q<1$. Atunci există un număr natural k încât $\sqrt[n]{a_n} < q$ pentru orice $n \geq k$ de unde rezultă că $a_n < q^n$ $, \forall n > N$. Examinăm seriile: $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots,$ $q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \dots$Cum $0<q<1$, seria $q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \dots$ este convergentă şi deci sunt convergente şi seriile $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots,$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Dacă $l>1$, atunci există un număr natural M, astfel încât $\sqrt[n]{a_n} > 1$ pentru orice $n \geq M$ şi deci nu este verificată condiția din criteriul necesar de convergență. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^{2n}$.

Rezolvare. Cum $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{1}{9}$ seria dată este convergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{4n+5}{4n}\right)^{n^2}$.

Rezolvare. Cum $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{4n+5}{4n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{4n+5}{4n}\right)^n =$ $\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{4n}\right)^n = \frac{e\sqrt[4]{e}}{2} > 1$, seria dată este divergentă.

Criteriul integral de convergență. Fie că termenii seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifică condiția $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, şi fie că există o funcție $f(x)$ continuă şi descrescătoare pe $[1, +\infty)$ şi care verifică condiția $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Atunci:

a) dacă integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

b) dacă integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci este divergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstrație. Din monotonia funcției $f(x)$ rezultă că pentru orice m natural mai mare ca 1 avem: $a_m < \int_{m-1}^{m} f(x)dx < a_{m-1}$ şi deci:

$$s_m - a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_m < \int_1^m f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} = s_{m-1}.$$

a) Fie că integrala $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este convergentă. Atunci şirul $\{s_m - u_1\}$, deci, şi şirul $\{s_n\}$ sunt convergente. În acest caz seria dată este convergentă.

b) Dacă integrala $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci din inegalitatea de mai sus rezultă că $\lim_{m\to\infty} \int_1^m f(x)dx = \infty$ şi deci şi $\lim_{m\to\infty} s_{m-1} = \infty$. Astfel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Rezolvare. Pentru $n = 1, 2, \ldots$ avem $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = a_{n+1}$. Funcția $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ este continuă şi monoton descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$ şi verifică condiția $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}} = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Deci putem aplica criteriul integral de convergență. Cum $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha - 1}, .\alpha > 1, \\ \infty, .\alpha \leq 1, \end{array} \right.$ rezultă că

seria Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ este convergentă când $\alpha > 1$ şi este divergentă când $\alpha \leq 1$.

Criteriul câtului. Fie că pentru seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Dacă

- $0 < k < \infty$, atunci seriile date au aceeaşi natură de convergență,
- $k = 0$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- $k = \infty$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci este divergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Consecință. Dacă termenii respectivi ai seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt echivalenți când $n \to \infty$, adică $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, atunci seriile date sunt convergente sau divergente simultan.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{3n^3+n+1}$.

Rezolvare. Considerăm seria Dirichlet cu $\alpha = 3/2 > 1$ Notăm cu a_n termenul general al seriei date și cu b_n termenul general al seriei Dirichlet. Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n\sqrt{n}+1}{3n^3+n+1} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \frac{2}{3}$ din convergența seriei Dirichlet cu $\alpha = 3/2 > 1$ rezultă convergența seriei date.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{\sqrt{(n^2+1)^3}}$

Rezolvare. Cum $\sin \frac{n}{\sqrt{(n^2+1)^3}} \sim \frac{n}{\sqrt{(n^2+1)^3}} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ cînd $n \to \infty$, din convergența seriei Dirichlet cu $\alpha = 2$ rezultă convergența seriei date.

Criteriul Raabe - Duhamel. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = l$. Atunci :

- dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.
- dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă;

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$.

Rezolvare. Avem $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$, $a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)}$, de unde $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}$ şi $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, care este divergentă.