NC 5.4.

SERII FUNCȚIONALE. DOMENIUL DE CONVERGENȚĂ. SERII DE PUTERI. TEOREMA ABEL

- **Serii funcționale. Domeniul de convergență. Convergența uniformă. Proprietăți**
- **Serii de puteri. Teorema Abel. Raza de convergență**

Serii funcționale. Domeniul de convergență

Definiție. Se numeşte **serie funcțională** o expresie de forma $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, unde $f_n(x), n=1,2,...,$ sunt funcții reale de variabilă reală definite pe careva interval I.

Exemple:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x=\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+...+\ln^n x+...$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+...+\frac{\sin nx}{n^2}+...$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}=e^x+e^{2x}+...+e^{nx}+...$

Pentru o valoare concretă $x_0\in I$ seria funcțională $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se transformă într-o serie numerică, care poate fi convergentă sau divergentă. Dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă, atunci x_0 se numeşte **punct de convergență** al seriei funcționale. Mulțimea tuturor punctelor de convergență ale seriei funcționale se numeşte **domeniu de convergență** al acestei serii.Se spune că o serie este **convergentă pe o mulțime** M, dacă ea este convergentă în fiecare punct al acestei mulțimi.

Pentru fiecare valoare fixată a variabilei x din domeniul de convergență M al seriei funcționale suma seriei numerice obținute este un număr. Când x variază, variază şi valoarea acestei sume, adică în domeniul de convergență suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este o funcție. Notăm această funcție cu $S(x)$: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x\in M$.

Sumele $S_n(x)=f_1(x)+...+f_n(x)$ se numesc **sume parțiale** ale seriei funcționale.

Dacă notăm $R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + .$, atunci $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, $x \in M$. Cum pentru o serie convergentă $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $x \in M$.

Exemplu. Să se determine domeniul de convergență al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

Rezolvare. Seria dată reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice cu primul termen 1 şi cu rația x. Această serie este convergentă atunci şi numai atunci când $x \in (-1,1)$. Deci domeniul de convergență al seriei date este intervalul $(-1,1)$ şi suma ei este $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este **majorată** pe careva mulțime M, dacă există o serie numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi convergentă încât $|f_n(x)| \le a_n, \forall x \in M, n = 1,2,...$

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ este majorată de seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ pe intervalul $(-\infty,+\infty)$, deoarece $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in (-\infty,+\infty)$, $n = 1,2,...$ Δ

Definiție. Se spune că seria funcțională $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este **convergentă uniform** *(uniform convergentă)* pe mulțimea M, dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in M.$

În această definiție numărul n_0 depinde în caz general de ε, dar el nu depinde de x.

Teoremă. Dacă seria funcțională $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este majorată pe mulțimea M, atunci ea este uniform convergentă pe această mulțime.

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ este uniform convergentă pe intervalul $(-\infty,+\infty)$, deoarece ea este majorată pe acest interval de seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Teoremă . Dacă termenii seriei funcționale sunt funcții continue şi această serie este uniform convergentă pe segmentul $[a,b]$, atunci suma $s(x)$ a ei este o funcție continuă pe acest segment.

Demonstrație. Fie $x \in [a,b]$, $x + \Delta x \in [a,b]$, $s(x)$ este suma seriei uniform convergente pe $[a,b]$, iar $s_n(x)$ sunt sumele parțiale ale ei. Avem: $|s(x+\Delta x) - s(x)| =$

$= |[s(x+\Delta x) - s_n(x+\Delta x)] + [s_n(x+\Delta x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s(x)]| \le$

$\leq |s(x+\Delta x)-s_n(x+\Delta x)|+|s_n(x+\Delta x)-s_n(x)|+|s_n(x)-s(x)|.$

Fie $\varepsilon>0$ un număr oricât de mic ar fi el . Avem:

1) $\exists N: n>N \Rightarrow |s(x+\Delta x)-s_n(x+\Delta x)|<\varepsilon/3$ și $|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon/3$, deoarece seria funcțională este uniform convergentă pe $[a,b]$;

2) $\exists \delta>0: |s_n(x+\Delta x)-s_n(x)|<\varepsilon/3$, deoarece funcția $s_n(x)$ este continuă pe segmentul $[a,b]$.

Rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există un atare $\delta>0$ încât pentru n destul de mare din $|\Delta x|<\delta$ rezultă $|s(x+\Delta x)-s(x)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$, de unde avem $\lim\limits_{\Delta x\to 0} s(x+\Delta x)=s(x)$ ceea ce înseamnă că funcția $s(x)$ este continuă în punctul x. Cum x este un punct arbitrar din $[a,b]$, rezultă continuitatea acestei funcții pe $[a,b]$.

Teoremă . Dacă seria funcțională $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, suma ei $S(x)$ și termenii $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ sunt integrabile pe acest segment, atunci $\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Demonstrație. Din convergența uniformă pe $[a,b]$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon>0$, pentru un natural destul de mare N, avem: $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$, $n>N$. De aici rezultă că $\left|\int_a^b S(x)dx-\sum_{n=1}^{N}\int_a^b f_n(x)dx\right|=$ $\left|\int_a^b S(x)dx-\int_a^b S_n(x)dx\right|<$ $\int_a^b \varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$. Deci, șirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ tinde către numărul $\int_a^b S(x)dx$.

Teoremă. Fie că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă pe segmentul $[a,b]$ și suma ei este $S(x)$, funcțiile $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, sunt continuu derivabile pe $[a,b]$. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci funcția $S(x)$ este derivabilă pe acest segment și are loc egalitatea $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Serii de puteri. Teorema Abel. Raza de convergență

Definiție. Se numește **serie de puteri** o serie funcțională de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

unde x este o variabilă reală, $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sunt constante reale, care se numesc **coeficienți** ai acestei serii.

Se numeşte **serie de puteri** şi o serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$, care se reduce la seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu ajutorul substituției $x = X - a$. Vom studia mai întâi numai convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teoremă. (**Abel**) Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru careva valoare nenulă x_1, atunci ea este absolut convergentă pentru orice valoare a lui x care verifică condiția $|x| < |x_1|$.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru careva valoare x_2, atunci ea este divergentă şi pentru orice valoare a variabilei x, care verifică condiția $|x| > |x_2|$.

Demonstrație. Fie că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru valoarea x_1, adică este convergentă seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. Conform criteriului necesar de convergență avem: $a_n x_1^n \to 0$ când $n \to \infty$. Astfel, termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ sunt mărginiți, adică există un număr real M, încât $|a_n x_1^n| < M$, $n = 0,1,2,\ldots$ Scriem seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ în altă formă:

$$a_0 + a_1 x_1 \left(\frac{x}{x_1}\right) + a_2 x_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \ldots + a_n x_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \ldots$$

Termenii seriei $|a_0| + |a_1 x_1| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right| + |a_2 x_1^2| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots + |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots$ sunt pozitivi şi inferiori termenilor respectivi ai seriei $M + M\left|\frac{x}{x_1}\right| + M\left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots$, care este convergentă (fiind o serie geometrică). Astfel, seria $|a_0| + |a_1 x_1| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right| + |a_2 x_1^2| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots + |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots$ este convergentă , iar seria $a_0 + a_1 x_1\left(\frac{x}{x_1}\right) + a_2 x_1\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \ldots + a_n x_1\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \ldots$ este absolut convergentă.

Fie că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ este divergentă. Atunci ea este divergentă pentru orice valoare x care verifică condiția $|x| > |x_2|$, deoarece în caz contrar seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ar fi convergentă în x_2.

Din teorema lui Abel rezultă că dacă există valori pozitive în care seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă si există valori pozitive în care această serie este divergentă, atunci există un aşa număr pozitiv R încât ea este convergentă când $x \in (-R, R)$ şi este divergentă când $|x| > R$. În acest caz intervalul $(-R, R)$ se numeşte **interval de convergență**, iar numărul R se numeşte **rază de convergență** a seriei de puteri.

În cazul când seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă numai când $x = 0$, atunci se spune că raza de convergență a ei este egală cu zero. Dacă însă această serie este convergentă pentru toate valorile reale ale variabilei x, atunci se spune că raza de convergență este ∞, iar intervalul de convergență este $(-\infty, +\infty)$.

Formule de calcul ale razei de convergență. Examinăm seria termenii căreia sunt valorile absolute ale termenilor seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Pentru fiecare valoare a variabilei x seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este o serie numerică cu termeni pozitivi şi poate fi aplicat criteriul de convergență D'Alembert. Cum $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = L \cdot |x|$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă atunci şi când $L \cdot |x| < 1$, adică când $|x| < 1/L$, şi este divergentă atunci când $L \cdot |x| > 1$, adică când $|x| > 1/L$. Deci raza de convergență a seriei este $R = 1/L$, sau $R = \lim_{n=\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Dacă aplicăm criteriul de convergență Cauchy, atunci obținem $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemplu. Să se determine raza, intervalul şi domeniul de convergență ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$.

Rezolvare. Determinăm raza de convergență $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2.$ Intervalul de convergență este $(-2,2)$. Pentru a determina domeniul de convergență trebuie să cercetăm convergența seriei la extremitățile intervalului de convergență -2 şi 2. Pentru $x=-2$ seria dată devine o serie numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ care este convergentă. Pentru $x=2$ seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, fiind serie armonică, este divergentă. Deci, domeniul de convergență al seriei date este $[-2,2)$.

Exemplu. Să se determine domeniul de convergență al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$.

Rezolvare. Cum $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, rezultă că seria dată este convergentă numai când $x=0$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ are raza de convergență R, atunci ea este uniform convergentă pe segmentul $[-r,r]$ pentru orice r care verifică condiția $0<r<R$.

Demonstrație. Pentru orice $x\in[-r,r]$ are loc relația $|x|^n\le r^n$ şi deci şi relația $|a_n x^n|\le|a_n r^n|$, $n=1,2,...$ Cum, prin ipoteză, seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n r^n|$ este convergentă, rezultă că ea majorează seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ pe segmentul $[-r,r]$. Afirmația teoremei rezultă din criteriul Weierstrass de convergență uniformă.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ are raza de convergență $R>0$, atunci suma acestei serii este o funcție continue pe segmentul $[-r,r]$ pentru orice $r\in(0,R)$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ are raza de convergență $R>0$ şi suma ei este $S(x)$, atunci această serie poate fi integrată termen cu termen pe segmentul $[a,b]\subset[-r,r]$ pentru orice $r\in(0,R)$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ are raza de convergență $R>0$, atunci ea poate fi derivată termen cu termen pe segmentul $[-r,r]$ pentru orice $r\in(0,R)$.

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n = a_0 + a_1(X-a) + \ldots + a_n(X-a)^n + \ldots$

Pentru a determina raza, intervalul şi domeniul de convergență ale acestei serii procedăm astfel: efectuând trecerea la variabila x cu ajutorul relației $x = X - a$, obținem o serie de puteri de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dacă raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este R, atunci raza de convergență a seriei inițiale este acelaşi număr R, iar intervalul de convergență este $(a-R, a+R)$.

Exemplu. Să se determine raza, intervalul şi domeniul de convergență ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n^2+1)5^n}$.

Rezolvare. Cum $R = 5$, rezultă că raza de convergență este 5 şi intervalul de convergență este $(-2-5; -2+5) = (-7; 3)$. Pentru a determina domeniul de convergență rămâne să cercetăm convergența seriei date în extremitățile intervalului de convergență. Pentru $x = 3$ obținem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ care este convergentă, de unde rezultă convergența seriei pentru $x = -7$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Deci domeniul de convergență a seriei date este $[-7, 3]$.