NC 1.7.

DREAPTA ÎN SPAȚIU. DIVERSE ECUAȚII. POZIȚIA RECIPROCĂ A DREPTEI ŞI PLANULUI

- **Diverse ecuații ale dreptei în spațiu: canonică; parametrice; ce trece prin două puncte; generală**
- **Unghiul dintre două drepte. Condițiile de paralelism și perpendicularitate**
- **Unghiul dintre dreaptă și plan. Distanța de la punct la dreaptă. Distanța minimă dintre două drepte neconcurente**

Diverse ecuații ale dreptei în spațiu: canonică; parametrice; ce trece prin două puncte; generală

În spațiu, o dreaptă este bine determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ce-i aparține şi un **vector director** $\overline{q} = \{m, n, p\}$ (nenul şi paralel dreptei date). Să deducem ecuația acestei drepte. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al dreptei. Atunci vectorii $\overline{q}$ şi $\overline{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$ sunt coliniari, verificând condiția $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ **(1.7.1),** numită **ecuație canonică** a dreptei. Notând în **(1.7.1)** fiecare raport cu t, obținem $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, $t \in R$, **(1.7.2)**, numite **ecuații parametrice** ale dreptei.

Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ecuația ce trece prin punctele M_1 şi M_2 rezultă din **(1.7.1)**, având drept vector director vectorul $\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, adică $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ **(1.7.3) - ecuația dreptei ce trece prin două puncte.**

Intersecția a două plane neparalele $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0$ şi $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ reprezintă o dreaptă în spațiu. Atunci sistemul $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ **(1.7.4)** se numeşte **ecuație generală a dreptei.**

Dreapta cu ecuație generală dată nu este „comodă” pentru „lucru”. Mai comodă este ecuația canonică **(1.7.1)**. Trecerea de la ecuația **(1.7.4)** la ecuația **(1.7.1)**, se poate face folosind, de exemplu, următoarea cale: în calitate de vector director al dreptei **(1.7.4)** putem lua vectorul $\vec{q} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$ (într-adevăr, vectorii $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$ sunt perpendiculari dreptei, de unde vectorul $\vec{q} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$ este paralel dreptei date), iar un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ce aparține dreptei, poate fi găsit, aflînd o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului **(1.7.4)**.

Unghiul dintre drepte. Condițiile de paralelism şi perpendicularitate

Analog, cazului dreptei în plan cu ecuația canonică, putem determina unghiul dintre drepte în spațiu.

Fie date dreptele $l_1: \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ şi $l_2: \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$.

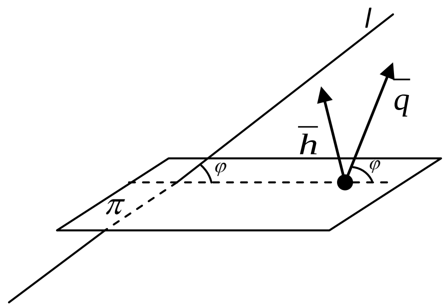
Atunci, $\cos\left(\sphericalangle l_1, l_2\right) = \cos\left(\sphericalangle \overline{q_1}, \overline{q_2}\right) = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **perpendiculare** în cazul când $\cos\left(\sphericalangle l_1, l_2\right) = 0$ sau $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **paralele**, dacă vectorii $\overline{q_1}$ şi $\overline{q_2}$ sunt coliniari, adică: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

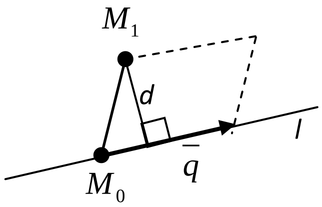
Unghiul dintre dreaptă şi plan. Distanța de la punct la dreaptă. Distanța minimă dintre două drepte neconcurente

Fie planul $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$ şi dreapta $l: \dfrac{x-x_0}{m_0} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$. Unghiul dintre dreapta l şi planul π este complementar unghiului dintre vectorul director $\overline{q} = \{m, n, p\}$ şi vectorul normal $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Avem: $\sin\left(\sphericalangle l, \pi\right) = \left|\cos\left(\sphericalangle \overline{q}, \overline{n}\right)\right| = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.



Evident, **dreapta** l **este perpendiculară planului** π, dacă şi numai dacă vectorii $\overline{q}$ şi π sunt coliniari, adică $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$. **Dreapta** l **este paralelă planului** π, dacă şi numai dacă $\sin\left(\sphericalangle l, \pi\right) = 0$, adică $Am + Bn + Cp = 0$.

Fie dată dreapta $l:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ şi punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$. **Distanța de la M_0 la dreapta** l este egală cu $d(M_0,l)=\frac{A}{|\overline{q}|}$, unde A este aria paralelogramului, construit pe vectorii $\overline{q}=\{m,n,p\}$ şi $\overrightarrow{M_0M_1}$, cu $M_1(x_1,y_1,z_1)$.



Mai putem scrie $d(M_0,l)=\frac{\left|\overline{q}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\overline{q}|}$.

Fie dreptele neconcurente: $l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ şi $l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

Distanță minimă între două drepte se numeşte lungimea segmentului de perpendiculară, comună ambelor drepte, cu extremitățile situate pe aceste drepte. Avem vectorii directori $\overline{q_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$, $\overline{q_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$ şi punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ce aparțin dreptelor l_1 şi l_2, respectiv. Construim un paralelipiped pe vectorii $\overline{q_1},\overline{q_2}$ şi $\overline{M_1M_2}$ (evident, aduşi la origine comună). Distanța minimă dintre dreptele date va fi egală cu distanța dintre planele fețelor paralele ale paralelipipedului, care conțin dreptele date, şi se poate calcula ca fiind înălțimea acestui paralelipiped. Prin urmare, distanța $d=\frac{V_p}{A_b}$. Cum volumul $V_p=\left|\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}\right|$, iar aria bazei $A_b=\left|\overline{q_1}\times\overline{q_2}\right|$, atunci distanța minimă dintre drepte va fi $d=\frac{\left|\overrightarrow{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}\right|}{\left|\overline{q_1}\times\overline{q_2}\right|}$.