PLANUL. DIVERSE ECUAȚII ALE PLANULUI

- Diverse ecuații ale planului: generală; „în segmente”; ce trece prin trei puncte necoliniare
- Unghiul dintre plane. Condițiile de paralelism şi perpendicularitate
- Distanța de la punct la plan

Diverse ecuații ale planului: generală; „în segmente”; ce trece prin trei puncte necoliniare

Raționamentele din acest paragraf sînt similare celui precedent: **Dreapta în plan**.

Fie că în spațiu este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$, iar π - un plan în spațiu.

Propoziția 1.6.1. Planului π îi corespunde o ecuație de gradul întâi cu trei necunoscute $Ax+By+Cz+D=0$. Şi invers, fiecărei ecuații de tipul indicat îi corespunde un plan bine determinat.

Într-adevăr, fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct ce aparține planului π. Considerăm vectorul nenul $\overline{n}=\{A,B,C\}$ perpendicular planului π, numit **vector normal** al planului. Fie $M(x,y,z)$ un punct arbitrar al planului π. Atunci $\overline{M_0M}\perp\vec{n}$, de unde $\overline{M_0M}\cdot\overline{n}=0$. Cum $\overline{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$, obținem $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ **(1.6.1)**, numită **ecuația planului ce trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ cu vectorul normal dat $\overline{n}$.** Ecuația **(1.6.1)** poate fi scrisă sub forma $Ax+By+Cz+D=0$ **(1.6.2)**, cu $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, care se numeşte **ecuația generală a planului.**

Ecuații incomplete ale planului

1. $D=0$; ecuația $Ax+By+Cz=0$, determină un plan ce trece prin originea coordonatelor (coordonatele punctului $O(0,0,0)$ verifică ecuația de mai sus).
2. $A=0$; ecuația $By+Cz+D=0$, determină un plan paralel axei OX (vectorul normal $\overline{n}=\{O,B,C\}$ este perpendicular axei OX).
3. $B=0$; ecuația $Ax+Cz+D=0$ determină un plan paralel axei OY.
4. $C=0$; ecuația $Ax+By+D=0$ determină un plan paralel axei OZ.
5. $A=D=0$; ecuația $By+Cz=0$ determină un plan ce conține axa OX (cazurile 1 şi 2).
6. $B=D=0$; ecuația $Ax+Cz=0$ determină un plan ce conține axa OY.
7. $C=D=0$; ecuația $Ax+By=0$ determină un plan paralel axei OZ.
8. $A=B=0$; ecuația $Cz+D=0$ determină un plan paralel planului OXY (deoarece este paralel şi axei OX, şi axei OY).
9. $B=C=0$; ecuația $Ax+D=0$, determină un plan paralel planului OXY.
10. $A=C=0$; ecuația $By+D=0$, determină un plan paralel planului OXZ.

11. $A = B = D = 0$; ecuația $Cz = 0$ sau $z = 0$ - ecuația planului OXY (din 8) şi 1)).
12. $A = C = D = 0$; ecuația $By = 0$ sau $y = 0$ - ecuația planului OXZ.
13. $B = C = D = 0$; ecuația $Ax = 0$ sau $x = 0$ - ecuația planului OYZ.

Dacă în ecuația **(1.6.2)** toți coeficienții sunt nenuli, atunci ecuația se numeşte **completă.** Atunci ea poate fi scrisă sub forma: $\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$ sau $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ **(1.6.3)**, numită **ecuația planului „în segmente".**

Ca şi în cazul ecuației dreptei „în segmente", numerele a, b, c reprezintă valorile segmentelor tăiate de plan pe axele OX, OY, OZ, respectiv.

Fie punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Există un singur plan ce trece prin aceste puncte. Să găsim ecuația lui. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului.

Atunci vectorii

$\overline{M_1M} = \{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$ sunt coplanari. Condiția de coplanaritate a acestor vectori este ca produsul lor mixt să fie egal cu zero, adică $\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$ sau $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ **(1.6.4)**

Ecuația **(1.6.4)** se numeşte **ecuația planului ce trece prin trei puncte necoliniare.**

Unghiul dintre plane. Condițiile de paralelism şi perpendicularitate

Fie planele $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Evident, ele formează două perechi de unghiuri diedre, unul dintre care este congruent cu unghiul format de vectorii normali $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ şi $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ ai acestor două plane.

Atunci, $\cos(\sphericalangle \pi_1, \pi_2) = \cos(\sphericalangle \overline{n_1}, \overline{n_2}) = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Condiția de paralelism ale planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiției de coliniaritate a vectorilor $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$, adică $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Condiția de perpendicularitate a planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiției de ortogonalitate a vectorilor $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$: $\cos(\sphericalangle \pi_1, \pi_2) = \cos(\sphericalangle \overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0$ sau $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Distanța de la punct la plan

Fie punctul $M_0\left(x_0 y_0\right)$ şi planul $\pi : Ax+By+Cz+D=0$. Atunci distanța de la punctul M_0 la π se calculează după formula $d\left(M_0,\, \pi\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.