

- Diverse ecuații ale dreptei: generală; „în segmente”; canonică; parametrice; ce trece prin două puncte; cu pantă
- Unghiul dintre drepte. Condițiile de paralelism și perpendicularitate
- Aria triunghiului. Distanța de la punct la dreaptă

Diverse ecuații ale dreptei: generală; în “segmente”; canonică; parametrice; ce trece prin două puncte; cu pantă

Fie ca într-un plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate OXY, iar l - o dreaptă, ce se include în acest plan.

Propoziția 1.5.1. Drepteii l îi corespunde o ecuație de gradul întâi cu două necunoscute $Ax + By + C = 0$. Și invers, fiecărei ecuații de tipul indicat îi corespunde o dreaptă bine determinată din plan.

Într-adevăr, fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct ce aparține drepteii l . Considerăm vectorul nenul $\vec{n} = \{A, B\}$, perpendicular drepteii l , numit **vector normal** al drepteii. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al drepteii l . Atunci $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$, de unde $\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Avem $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ Obținem : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ **(1.5.1)** - **ecuația drepteii ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ cu vectorul normal \vec{n}** . Această ecuație poate fi scrisă sub forma $Ax + By + C = 0$ **(1.5.2)**, unde $C = -Ax_0 - By_0$. **(1.5.2)** se numește **ecuație generală a drepteii**.

Ecuatii incomplete ale drepteii:

1. $C = 0$; ecuația $Ax + By = 0$ determină o dreaptă, care trece prin originea coordonatelor (coordonatele originii $O(0,0)$ verifică ecuația drepteii).
2. $B = 0$; ecuația $Ax + C = 0$ determină o dreaptă paralelă axei OY (vectorul normal $\vec{n} = \{A, 0\}$ al acestei drepte este perpendicular axei OY).
3. $A = 0$; ecuația $By + C = 0$ determină o dreaptă paralelă axei OX (vectorul normal $\vec{n} = \{0, B\}$ este perpendicular axei OX).
4. $B = C = 0$; ecuația $Ax = 0$ sau $x = 0$, determină însăși axa OY (cazurile 1 și 2).
5. $A = C = 0$, ecuația $By = 0$ sau $y = 0$, determină axa OX .

Dacă în ecuația **(1.5.2)** toți coeficienții sunt nenuli, atunci ecuația se numește **completă** și poate fi scrisă sub forma $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$ sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **(1.5.3)**, numită

ecuație a drepteii „în segmente”. Numerele a și b sînt segmente tăiate de dreaptă pe axele OX și OY , respectiv, un capăt fiind originea de coordonate. Semnele numerelor a și b determină direcția de la origine pe axele de coordonate. De exemplu, dreapta

$3x - 4y = 12$ poate fi scrisă sub forma $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ și $a = 4$, $b = -3$. Reprezentarea dreptei este

Definiție . Se numește **vector director** al dreptei orice vector nenul paralel dreptei date.

Este evident că există o singură dreaptă, ce trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$ având drept vector director vectorul $\vec{q} = \{m, n\}$. Să găsim ecuația acestei drepte. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al dreptei date, atunci vectorii \vec{q} și $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ sînt coliniari. Din condiția de coliniaritate rezultă: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ **(1.5.4)** numită **ecuația canonică** a dreptei.

Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Drept vector director al dreptei M_1M_2 poate servi vectorul $\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Folosind formula **(1.5.4)**, obținem: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ **(1.5.5)** – **ecuația dreptei ce trece prin două puncte**.

Ecuția **(1.5.5)** mai poate fi scrisă sub forma: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **(1.5.6)**

Din **(1.5.6)** rezultă că punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ sînt coliniare

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În ecuația canonică a dreptei **(1.5.4)**, notînd fiecare raport cu t , $t \in \mathbb{R}$, avem:

$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ **(1.5.7)** – numite **ecuații parametrice ale dreptei**.

Fie dată o dreaptă l . Notăm cu α unghiul format de direcția pozitivă a axei OX și dreapta l , măsurat împotriva mișcării acelor ceasornicului. Avem că $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ)$ (sau

$\alpha \in [0, \pi)$). Unghiul α se numește **unghi de înclinare** a dreptei l față de OX . Dacă $\alpha = 0^\circ$, dreapta se numește **orizontală**; dacă $\alpha = 90^\circ$, dreapta se numește **verticală**. În celelalte cazuri, dreapta se numește **oblică**. Pentru orice dreaptă neverticală se definește numărul $m = \operatorname{tg} \alpha$, numit **pantă** a dreptei. Dreapta verticală nu are pantă.

Fie dreapta M_1M_2 cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Evident, **panta** ei este $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(1.5.8)**.

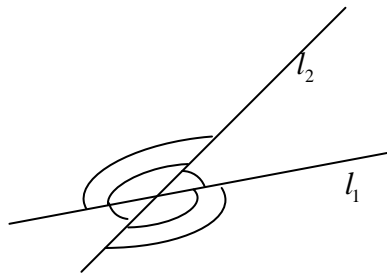
Ecuția **(1.5.5)** poate fi scrisă astfel: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ sau, folosind formula **(1.5.8)**, avem $y - y_1 = m(x - x_1)$ **(1.5.9)**. Ecuția poate fi folosită când se cunoaște panta m a dreptei și un punct $M_1(x_1, y_1)$ ce aparține dreptei. Ea se mai numește **ecuația dreptei cu pantă**. Din **(1.5.9)**, rezultă: $y = mx + n$, **(1.5.10)**, unde $n = y_1 - mx_1$.

Dacă avem ecuația generală a dreptei $Ax + By + C = 0$ cu $B \neq 0$, atunci panta dreptei este: $m = -A/B$.

Unghiul dintre drepte. Condițiile de paralelism și perpendicularitate

În cele ce urmează vom determina unghiul dintre drepte, fiind date diferite ecuații ale dreptei.

Fie dreptele $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ și $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Ele formează două perechi de unghiuri, congruente două câte două.



Vectorii normali respectivi $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ și $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ formează un unghi, congruent cu o pereche dintre unghiurile formate de l_1 și l_2 .

$$\text{Atunci } \cos(\sphericalangle l_1, l_2) = \cos(\sphericalangle \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Evident, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, adică $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ - **condiția de perpendicularitate** a dreptelor l_1 și l_2 .

Avem $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ - **condiția de paralelism** a dreptelor l_1 și l_2 .

Fie că dreptele l_1 și l_2 au ecuațiile canonice $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ și $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$.

Analog cazului ecuației generale, unghiul dintre drepte este determinat de unghiul dintre vectorii directori $\bar{q}_1 = \{m_1, n_1\}$ și $\bar{q}_2 = \{m_2, n_2\}$, adică

$$\cos(\sphericalangle l_1, l_2) = \cos(\sphericalangle \bar{q}_1, \bar{q}_2) = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

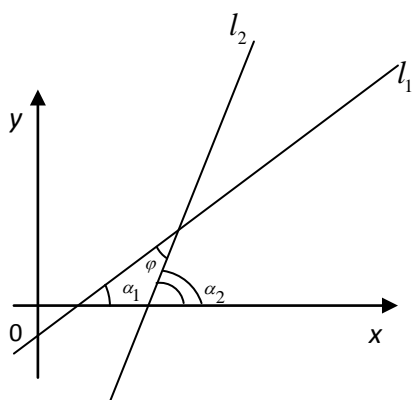
Condiția de **perpendicularitate** a dreptelor l_1 și l_2 rezultă din:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \perp \bar{q}_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 = 0, \text{ de unde } m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Avem: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \parallel \bar{q}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - **condiția de paralelism** a dreptelor l_1 și l_2 .

Fie dreptele definite prin ecuații cu pantă, adică $l_1: y = m_1 x + n_1$, $l_2: y = m_2 x + n_2$.
Să găsim măsura unghiului format de aceste drepte.

Fie că avem reprezentarea :



Avem: $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$. De unde $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ - unghiul dintre dreptele l_1 și l_2 .

Avem: $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$. Deoarece

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2, \text{ obținem } \operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

În general, $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$. Evident, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Cum $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ nu există, avem $1 + m_1 m_2 = 0$. sau

$$m_1 m_2 = -1 - \text{condiția de perpendicularitate a dreptelor.}$$

Dreptele l_1 și l_2 sunt **paralele**, dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Aria triunghiului. Distanța de la punct la dreaptă

Fie triunghiul $M_1 M_2 M_3$ cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

$$\text{Avem } A_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\overline{M_1 M_2}| \cdot |\overline{M_1 M_3}| \sin(\sphericalangle M_2 M_1 M_3).$$

Știm că: $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $|\overline{M_1M_3}| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$,

$$\sin(\sphericalangle M_2M_1M_3) = \sqrt{1 - \cos^2(\sphericalangle M_2M_1M_3)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}}{|\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{M_1M_3}|} \right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{|\overline{M_1M_2}|^2 \cdot |\overline{M_1M_3}|^2 - (\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3})^2}}{|\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{M_1M_3}|}$$

Fie $\overline{M_1M_2} = \{a_1, b_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{a_2, b_2\}$.

Găsim

$$|\overline{M_1M_2}|^2 \cdot |\overline{M_1M_3}|^2 - (\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3})^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2)^2 = a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 - a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - b_1^2b_2^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2.$$

Atunci, $\sin(\sphericalangle M_2M_1M_3) = \frac{|a_1b_2 - b_1a_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Deci, $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot \frac{|a_1b_2 - b_1a_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{1}{2} |a_1b_2 - b_1a_2| = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

Astfel $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ sau $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ **(1.5. 11)**

Fie dreapta $l: Ax + By + C = 0$ și punctul $M_0(x_0, y_0)$. Distanța de la M_0 până la l se găsește după formula $d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ **(1.5. 12)**. Lăsăm demonstrația acestei formule pe seama cititorului.