NC 1.4

PRODUSELE VECTORIAL ŞI MIXT. PROPRIETĂȚI. APLICAȚII

Produsul vectorial a doi vectori. Proprietăți

Definiția 1.4.1. Prin **produs vectorial** al vectorului $\overline{a}$ la vectorul $\overline{b}$ vom înțelege vectorul $\overline{c}$, care verifică condițiile:

a) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}\right)$;

b) $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$;

c) vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ formează un triplet de dreapta

Produsul vectorial al vectorului $\overline{a}$ la vectorul $\overline{b}$ se notează astfel $\overline{a} \times \overline{b}.$

Produsul vectorial verifică următoarele proprietăți:

1) $\overline{a} \times \overline{b}. = \overline{0}$ dacă şi numai dacă aceşti vectori sunt coliniari.

Demonstrație: Dacă cel puțin unul din vectori este nul, atunci afirmația este evidentă. Presupunem că nici unul din vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu este egal cu vectorul nul, atunci expresia $\overline{a} \times \overline{b}. = \overline{0}$ este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, deoarece $\sin\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}\right) = 0$

2) $\overline{a} \times \overline{b}. = -\overline{b} \times \overline{a}$.
3) $\lambda\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda\overline{b}\right)$
4) $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$

Produsul vectorial în coordonate. Aplicații

5) $\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}$, $\overline{i} \times \overline{j} = -\overline{j} \times \overline{i} = \overline{k}$, $\overline{j} \times \overline{k} = -\overline{k} \times \overline{j} = \overline{i}$, $\overline{k} \times \overline{i} = -\overline{i} \times \overline{k} = \overline{j}$
6) Fie $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$.
Folosind proprietățile produsului vectorial, avem:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right) \times \left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = x_1x_2\overline{i} \times \overline{i} +$$
$$+ y_1x_2\overline{j} \times \overline{i} + z_1x_2\overline{k} \times \overline{i} + x_1y_2\overline{i} \times \overline{j} + y_1y_2\overline{j} \times \overline{j} + z_1y_2\overline{k} \times \overline{j} + x_1z_2\overline{i} \times \overline{k} +$$

$+ y_1z_2\overline{j} \times \overline{k} + z_1z_2\overline{k} \times \overline{k}$. De unde

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{i}\left(y_1z_2 - y_2z_1\right) - \overline{j}\left(x_1z_2 - x_2z_1\right) + \overline{k}\left(x_1y_2 - x_2y_1\right) \text{ sau}$$

NC 1.4

PRODUSELE VECTORIAL ŞI MIXT. PROPRIETĂŢI. APLICAŢII

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Aplicaţii ale produsului vectorial

1. Modulul produsului vectorial este egal numeric cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

2. Aria triunghiului construit pe vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ cu aceeaşi origine este egală cu jumătate din modulul produsului vectorial a acestora $\frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

3. În dinamica mişcării de rotaţie, produsul vectorial poate fi interpretat ca momentul vectorului $\bar{a}$, aplicat în punctul *A,* relativ la punctul *O*:

$$\overline{M} = mom_O \bar{a} = \left[\overline{OA}, \bar{a}\right],$$

$$\left|mom_O \bar{a}\right| = \left|\overline{OA}\right| \cdot |\bar{a}| \sin\left(\overline{OA} \,\hat{,}\, \bar{a}\right) = |\bar{a}| \cdot h, \text{ unde } h = \left|\overline{OA}\right| \sin\left(\overline{OA} \,\hat{,}\, \bar{a}\right).$$

4 . În cinematica mişcării de rotaţie vectorul vitezei liniare $\bar{v}$ a punctului *M* al corpului ce se roteşte se determină după formula lui Euler $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, unde $\bar{r}$ - este raza vectoare , dusă în punctul *M* din punctul arbitrar *O* al axei de rotaţie a corpului. Valoarea numerică a vitezei liniare a punctului *M*- $|\bar{v}|$ este direct proporţională distanţei ei *R* de la axa de rotaţie:

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \sin(\alpha) = |\bar{\omega}| R$$

Produsul mixt a trei vectori. Proprietăţi Produsul mixt în coordonate. Aplicaţii

Avînd trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ putem forma următoarele trei tipuri de produse diferite:

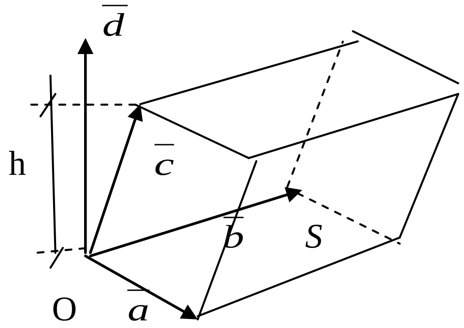
$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c};\ (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c},\ (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

Primul produs este un vector coliniar vectorului $\bar{c}$. Al doilea produs este numit **produs dublu vectorial** şi reprezintă un vector. Al treilea produs se numeşte. **produs mixt**

Definiţia 1.4.2. Se numeşte **produs mixt** a trei vectori un număr egal cu produsul scalar dintre vectorul, ce reprezintă produsul vectorial al primilor doi, şi vectorul al treilea, adică $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ al vectorilor. Se notează cu $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

Teorema 1.4.1. Modulul produsului mixt a trei vectori necoplanari $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, este egal cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii translaţi spre una şi aceeaşi origine.

Demonstraţie . Fie vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ necoplanari, care formează un triplet de dreapta. Îi translăm spre una şi aceeaşi origine *O.* Construim pe aceşti vectori un paralelipiped (considerînd vectorii drept muchii). Vom nota prin S aria bazei sale, înălțimea prin *h*, iar volumul său prin *V*. Fie $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{d}$. Atunci $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{d}\cdot\overline{c}=|\overline{d}|pr_{\overline{d}}\overline{c}$. Dar $|\overline{d}|=S$, iar $pr_{\overline{d}}\overline{c}=h$. Deci am obținut că $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=S\cdot h$. Astfel $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=V$.



Proprietăți:

1. Valoarea produsului mixt nu se schimbă la permutarea ciclică a vectorilor în triplet, adică:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}.$$

Permutarea a doi vectori vecini schimbă semnul produsului:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=-\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}$$

2. . Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$

Vom exprima produsul mixt al vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ prin coordonatele lor carteziene rectangulare. Fie $\overline{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overline{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\overline{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

Deoarece $\overline{a}\times\overline{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$, avem

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Aplicațiile produsului mixt al vectorilor

1. Volumul piramidei, construită pe vectorii cu aceeaşi origine $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, este numeric egal cu $\frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$.

PRODUSELE VECTORIAL ŞI MIXT. PROPRIETĂȚI. APLICAȚII

2. Condiția necesară şi suficientă de independență liniară a trei vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ este expresia: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \neq 0$, sau, dacă se cunosc coordonatele vectorilor

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \overline{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \overline{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

atunci

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. După semnul produsului mixt se poate judeca despre orientarea tripletului de vectori. Şi anume, dacă $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ >0 ($\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ <0), tripletul $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ este de dreapta (stînga).