NC 1.3

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI. PROPRIETĂȚI. APLICAȚII

- Produsul scalar a doi vectori. Proprietăți
- Produsul scalar în coordonate. Aplicații

Produsul scalar a doi vectori. Proprietăți

În cadrul algebrei vectoriale se studiază două tipuri de produse a doi vectori: produsul scalar şi produsul vectorial.

Vom numi **unghi dintre doi vectori**, unghiul format de alți doi vectori, egali celor dați, dar cu origine comună.

Definiția 1.3.1. Prin **produs scalar** a doi vectori vom înțelege numărul egal cu produsul dintre lungimile acestor vectori şi cosinusul unghiului dintre ei.

Produsul scalar al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se notează prin unul $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ sau $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Deci,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\left(\widehat{\overline{a}\, , \overline{b}}\right).$$

Produsul scalar al vectorilor posedă următoarele **proprietăți**:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot pr_{\overline{a}} \overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot pr_{\overline{b}} \overline{a}.$

3) Pentru ca doi vectori să fie ortogonali e necesar şi suficient ca $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

4) $(\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = \overline{a} \cdot (\lambda \overline{b})$, $(\lambda \in R)$

5) $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

6) $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2$

7) Din proprietatea 6) rezultă că $\overline{i} \cdot \overline{i} = \left|\overline{i}\right|^2 = 1 = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k}$ **,** iar din proprietatea 3) avem că $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot \overline{i} = 0$

Produsul scalar în coordonate. Aplicații

Fie că se cunosc coordonatele vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ în baza ortonormată

$$\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k} \quad ; \quad \overline{b} = x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k} \quad .$$

Atunci, aplicînd proprietățile produsului scalar, obținem:

1. $$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left(x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}\right) \cdot \left(x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k}\right) = x_1 x_2 \cdot \overline{i}^2 + x_1 y_2 \overline{i} \cdot \overline{j} + x_1 z_2 \overline{i} \cdot \overline{k} +$$

$$+ y_1 x_2 \overline{j} \cdot \overline{i} + y_1 y_2 \overline{j}^2 + y_1 z_2 \overline{j} \cdot \overline{k} + z_1 x_2 \overline{k} \cdot \overline{i} + z_1 y_2 \overline{k} \cdot \overline{j} + z_1 z_2 \overline{k}^2 =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI. PROPRIETĂȚI. APLICAȚII

2. Fie vectorul $\bar{a} = \{x, y, z\}$. Folosind proprietatea 6 şi formula de calcul al produsului scalar în coordonate, avem că $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, adică lungimea vectorului este egală cu rădăcina pătrată din suma pătratelor coordonatelor sale rectangulare.

3. . Distanța $|AB|$ dintre punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ este egală cu modului vectorului $\overline{AB}$, adică $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

4. Fie α, β, γ unghiurile pe care le formează vectorul $\bar{a}$ cu axele de coordonate O_x, O_y, O_z. Atunci versorul vectorului $\bar{a}$ poate fi scris sub forma $\bar{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Dar $|\bar{a}_0|^2 = 1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$.

5. Fie $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ careva vectori nenuli, iar φ unghiul dintre ei. Avem $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

6. Proiecția vectorului $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ pe vectorul nenul $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ poate fi calculată după formula $pr_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$.

7. Vectorii $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, şi $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

8. În mecanică lucrul A al forței $\bar{F}$ la deplasarea punctului material de-a lungul unei axe S este: $A = \bar{F}\cdot\bar{S} = |\bar{F}|\cdot|\bar{S}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{F}, \bar{S}}\right)$, unde $\bar{S}$ - este vectorul deplasării.