NC 1.1

VECTORI. OPERAȚII LINIARE CU VECTORI. PROPRIETĂȚI

Mărimi scalare şi vectoriale

În fizică, precum şi în alte domenii ale ştiințelor exacte, se folosesc două tipuri de mărimi: **scalare** şi **vectoriale**.

Mărimile se numesc **scalare** (scalari), dacă sunt caracterizate numai de valori numerice. Exemple de mărimi scalare sunt temperatura, masa, densitatea, unghiul, aria, volumul, sarcina electrică, rezistenta. Cu toate acestea ar trebui să se distingă două tipuri de mărimi scalare: **pur scalare** şi **pseudoscalare**. Mărimile pur scalare sunt determinate de un număr care nu depinde de alegerea axelor de referință. Exemple de mărimi pur scalare pot servi temperatura, masa, densitatea. Mărimea pseudoscalară este determinată de un număr, valoarea absolută a căruia nu depinde de alegerea axelor de referință. Cu toate acestea, semnul acestui număr depinde de alegerea direcției pozitive pe axele de coordonate. Unghiul, aria, volumul sunt mărimi pseudoscalare.

Geometric, scalarul poate fi ilustrat (reprezentat) printr-un punct pe axa reală.

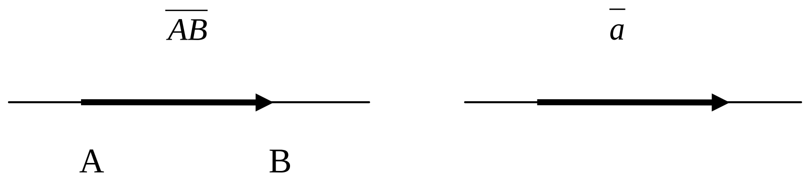
Mărimea **vectorială** (**vectorul**) este caracterizat de două elemente de natură diferită: elementul algebric - un număr care caracterizează lungimea vectorului şi elementul geometric – direcția vectorului. Există trei tipuri diferite de vectori: liberi, legați, glisanți. Fiecare dintre ele defineşte o totalitate de vectori cu proprietăți specifice. Mai exact, aceste tipuri diferă prin definirea noțiunii de egalitate a vectorilor. În cele ce urmează vom descrie aceste clase de vectori.

Vectori liberi, legați, glisanți

Vectori liberi.

Definiția 1.1.1. Vom numi **vector** orice segment orientat.

Direcția vectorului este determinată de faptul că unul dintre capete este considerat **origine**, iar celălalt - **extremitate**. Prin urmare, vectorul poate fi considerat ca o pereche ordonată de puncte. Vectorul se notează cu una din următoarele notații: $\overline{AB}$; $\overline{a}$.



Definiția 1.1.2. Lungimea segmentului ce reprezintă vectorul se numeşte **modul** sau **lungime**, sau valoare absolută a vectorului. Se notează prin $\left|\overline{AB}\right|, \left|\overline{a}\right|$.

Definirea unui vector $\overline{AB}$ (sau $\overline{a}$) determină transformarea spațiului care pune în corespondență fiecărui punct M un alt punct M' în modul următor. Din punctul M se duce o raza l, paralelă vectorului $\overline{a}$ (evident, are aceeaşi direcție cu $\overline{a}$), pe ea se determină un punct M' astfel încât $\left|MM'\right| = \left|\overline{a}\right|$. Această transformare este numită **translație paralelă** şi se notează

$\overline{a}(M)=M'$. În fig.1 $\overline{a}(N)=N'$, $\overline{a}(P)=P'$, $\overline{a}(Q)=Q'$. Astfel, fiecare vector poate fi interpretat ca o translație paralelă, iar mulțimea vectorilor – ca o totalitate de translații.

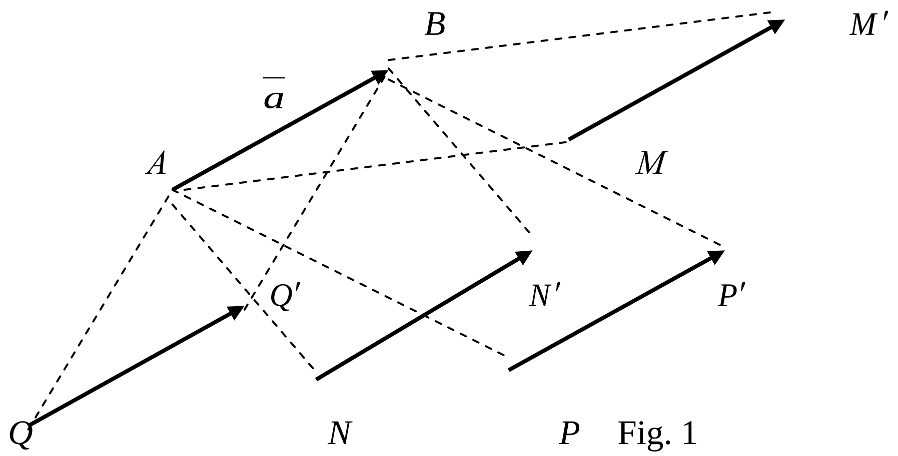


Fig. 1

Definiția 1.1.3. Doi vectori se numesc **coliniari** dacă se află pe o dreaptă sau pe drepte paralele.

Vectorii coliniari pot fi **coorientați** (au acelaşi sens) (în fig.2 - $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ şi $\overline{c}$, $\overline{f}$) sau **opus orientați** (au sens opus) (în fig.2 $\overline{a}$ şi $\overline{c}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, $\overline{a}$ şi $\overline{f}$, $\overline{b}$ şi $\overline{f}$, $\overline{c}$ şi $\overline{d}$, $\overline{f}$ şi $\overline{d}$).

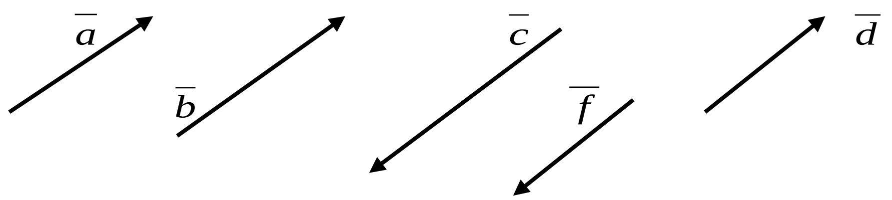


Fig. 2

Definiția 1.1.4. Doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se numesc **egali** ($\overline{a}=\overline{b}$), dacă sunt coliniari, au acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Menționăm că, noțiunea de mai sus de egalitate a vectorilor este dată pentru vectorii liberi.

Vectori legați.

Pentru definirea vectorului legat, în afară de lungime, direcție şi sens, trebuie să se cunoască şi originea sa fixată .

Doi **vectori legați** se numesc **egali** dacă sunt coliniari, au acelaşi sens, au lungimi egale şi o origine comună fixată.

Legați vor fi, de exemplu, vectorii cîmpului vitezei, cîmpului de forță, cîmpului electric.

NC 1.1

VECTORI. OPERAȚII LINIARE CU VECTORI. PROPRIETĂȚI

Vectori glisanți.

Pentru definirea vectorului glisant trebuie ținut cont de coliniaritate, lungime, sens şi axa pe care este plasat. Originea vectorului poate fi oriunde pe această axă.

Doi **vectori glisanți** se numesc **egali** dacă sunt coliniari, au acelaşi sens, aceeaşi lungime şi se aflǎ pe aceeaşi axǎ.

Forțele studiate în mecanica statică sunt vectori glisanți. Într-adevăr, nimeni nu poate perturba echilibrul unui corp rigid, deplasînd punctul de aplicare a forței de-a lungul liniei de acțiune a acestei forțe.

În continuare vor fi studiați doar vectori liberi.

Definiția 1.1.5. Vectorul a cărui origine coincide cu extremitatea se numeşte **vector nul**. Se notează $\overline{O}$.

Lungimea vectorului nul $\overline{O}$ este zero, iar sensul lui nu este determinat.

Definiția 1.1.6. Vectorul a cărui lungime este egală cu unitatea se numeşte **vector unitar**.

Definiția 1.1.7. Vectorul unitar coorientat vectorului dat se numeşte **versorul** (**ortul**) acestui vector. Versorul vectorului $\overline{a}$ se notează $\overline{a}_0$.

Operații liniare cu vectori. Proprietăți

Adunarea vectorilor.

Definiția 1.1.8. Vom numi **sumă** a vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ vectorul $\overline{c}$ originea căruia coincide cu originea primului vector $\overline{a}$ şi extremitatea căruia coincide cu cea a vectorului $\overline{b}$, cu condiția că originea lui $\overline{b}$ coincide cu extremitatea lui $\overline{a}$. (fig. 3). Se notează $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

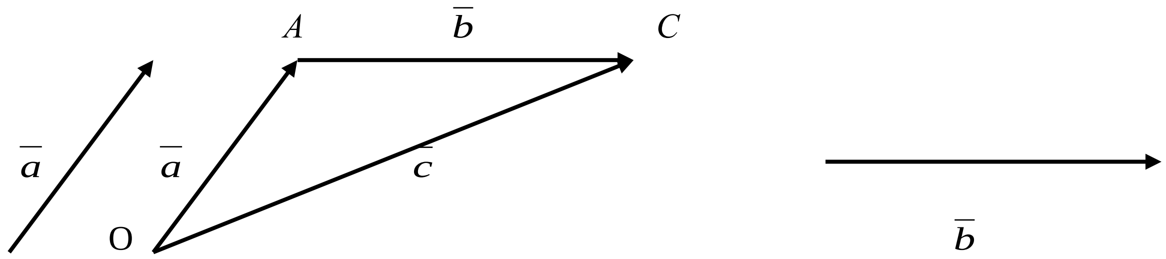


Fig.3

Regula de adunare a vectorilor descrisă în definiția de mai sus se numeşte ***regula triunghiului.***

Regula paralelogramului. Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori. Din punctul arbitrar O trasăm vectorul $\overline{OA}$, egal vectorului $\overline{a}$ şi vectorul $\overline{OB}$, egal vectorului $\overline{b}$. Construim paralelogramul $OACB$ cu laturile OA şi OB (fig. 4).

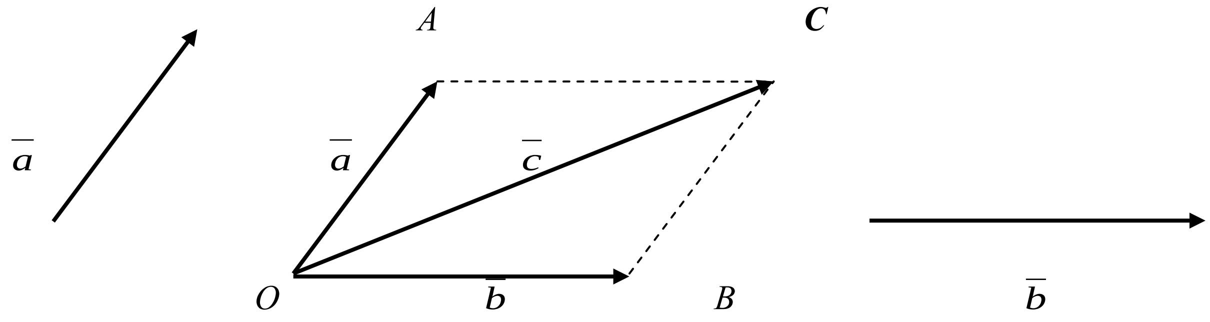


Fig. 4

Cum vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{AC}$ sunt egali, avem că diagonala $\overline{OC}$ a paralelogramului reprezintă suma $\overline{c}$ a vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Regula de adunare a vectorilor descrisă mai sus se numeşte ***regula paralelogramului.***

Se ştie că acțiunea a două forțe $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$, asupra punctului M a corpului poate fi înlocuită cu o forță unică $\overline{R}$ (rezultanta acestora), găsită după regula paralelogramului (fig. 5).

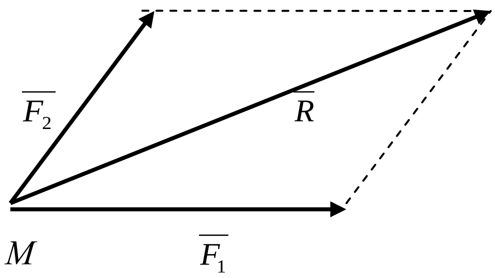


Fig. 5

Regula poligonului. În caz general, dacă este definită suma a $n-1$ vectori, atunci suma a n vectori $\overline{a}_1+\overline{a}_2+\ldots+\overline{a}_{n-1}+\overline{a}_n$ se determină după formula:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k=\left(\overline{a}_1+\overline{a}_2+\ldots+\overline{a}_{n-1}\right)+\overline{a}_n .$$

Observăm, că vectorul $\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k$ va avea drept origine originea primului vector $\overline{a}_1$, iar drept extremitate - extremitatea ultimului vector $\overline{a}_n$ cu condiția că, fiecare vector succesiv, începînd cu al doilea, îşi are originea în extremitatea vectorului precedent.

Definiția 1.1.9. Vom numi **diferență** a vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ vectorul $\overline{d}$, astfel încît $\overline{a}=\overline{d}+\overline{b}$.

Notă. 1) Deoarece lungimea unei laturi a triunghiului nu înrece suma lungimilor celorlalte două laturi, atunci modulul sumei a doi vectori nu întrece suma modulelor lor $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\leq|\bar{a}|+\left|\bar{b}\right|$. Egalitatea are loc doar în cazul cînd vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sînt coliniari şi coorientați.

2) Dacă vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se aduc la aceeaşi origine O, atunci, construind cu ajutorul lor paralelogramul $OACB$, suma lor va reprezenta diagonala $\overline{OC}$, iar diferența - diagonala $\overline{BA}$ (fig. 6).

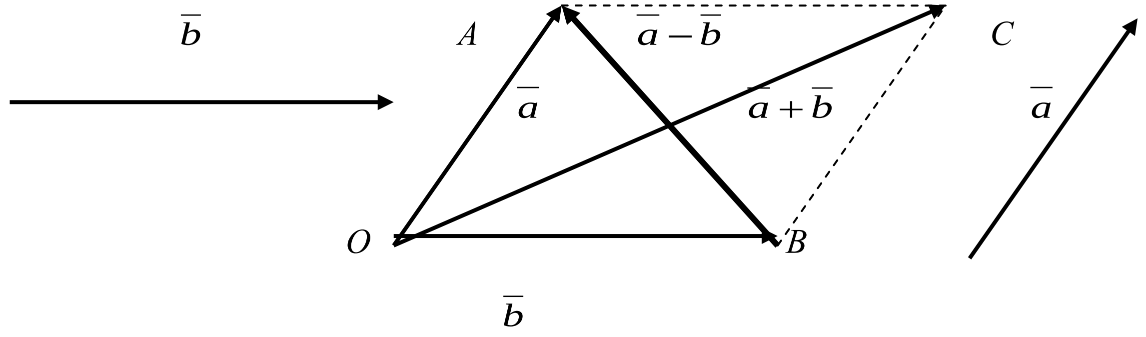


Fig. 6

Definiția 1.1.10. Prin **produs al vectorului $\overline{a}$ la scalarul real λ** înțelegem vectorul $\overline{b}$, ce verifică condițiile:

1) $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$;

2) vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{a}$ sunt cooorientați, dacă $\lambda > 0$ şi opus orientați, dacă $\lambda < 0$;

3) $\overline{b} = \overline{0}$, dacă $\lambda = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$.

Produsul vectorului $\overline{a}$ la numărul λ se notează cu $\lambda\,\overline{a}$.

Proprietățile operațiilor liniare asupra vectorilor. Operațiile de adunare şi înmulțire cu un scalar definite mai sus se numesc liniare. Vom examina proprietățile de bază ale acestor operații şi anume :

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$,

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$,

3) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

4) pentru orice vector $\overline{a}$ există un astfel de vector, care adunat cu vectorul $\overline{a}$, are ca sumă vectorul nul. Acesta-i vectorul notat cu $-\overline{a}$, numit **opusul** vectorului $\overline{a}$: $\overline{a}+(-\overline{a}) = \overline{0}$;

5) $(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a})$;

6) $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$,

7) $\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$,

8) $\overline{a}\cdot 1 = \overline{a}$, pentru orice numere reale α, β, γ şi pentru orice vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Oricare dintre aceste proprietăți sunt uşor de demonstrat, folosind definiția egalității vectorilor şi a operațiilor liniare cu ei. Demonstrăm proprietatea 6. Egalitatea $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ este evidentă pentru $\overline{a}=\overline{0}$ sau $\alpha+\beta=0$. Vom examina cazul cînd α şi β au acelaşi semn ($\alpha\cdot\beta>0$). Atunci vectorii $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ sunt coorientați. Aşa cum $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ şi $|\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}|=|\alpha\overline{a}|+|\beta\overline{a}|$, atunci:

$$|(\alpha+\beta)\overline{a}|=|\alpha+\beta||\overline{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\overline{a}|=|\alpha||\overline{a}|+|\beta||\overline{a}|=|\alpha\overline{a}|+|\beta\overline{a}|==|\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}|.$$

Astfel, pentru $\alpha\beta>0$ egalitatea 7 este demonstrată. Dacă însă numerele α şi β au semne diferite ($\alpha\cdot\beta<0$) şi, de exemplu, $|\alpha|>|\beta|$,atunci numerele $\alpha+\beta$ şi $-\beta$ vor avea acelaşi semn şi conform celor demonstrate:

$$[(\alpha+\beta)+(-\beta)]\overline{a}=(\alpha+\beta)\overline{a}-\beta\overline{a},$$

deci $\alpha\overline{a}=(\alpha+\beta)\overline{a}-\beta\overline{a}$ sau $\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}=(\alpha+\beta)\overline{a}$.

Notă

1) Dacă vom înmulți lungimea vectorului cu versorul său, atunci vom obține însăşi vectorul. Deci, orice vector $\overline{a}$ este egal cu produsul dintre modulul său şi versorul (ortul) său $\overline{a_o}$: $\overline{a}$ = $|\overline{a}|\,\overline{a_o}$. De unde obținem că $\overline{a_o}$ = $\frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$ (cu $|\overline{a}|\neq 0$).

2) Dacă se cunoaşte vectorul nenul $\overline{a}$, atunci orice vector $\overline{b}$ coliniar cu el, poate fi reprezentat (în mod unic) sub forma $\overline{b}$ = $\lambda\ \overline{a}$. Evident,

$$\lambda=\begin{cases} |\bar{b}|/|\bar{a}|, \textit{dacă vectorii sunt coorientați}, \\ -|\bar{b}|/\ |\bar{a}|, \textit{dacă vectorii sunt opus orientați} \end{cases}$$