UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

ТЕМА 8. ГРАФИЧЕСКИЕ 3D ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ТРЕХМЕРНЫЕ)

l.u., dr. NASTAS Andrei

СОДЕРЖАНИЕ

8.1. Геометрические преобразования 3D

3D-геометрическое преобразование изображения описывается как:

$$P\ (x, y, z) \rightarrow P'\ (x', y', z'), \tag{8.1}$$

где:

$$x' = F1(x, y, z),$$
$$y' = F2(x, y, z),$$
$$z' = F3(x, y, z).$$

К трехмерным геометрическим преобразованиям относятся:

- перенос,
- масштабирование,
- вращение,
- зеркальное отображение,
- наклон,
- проекция 3D объектов.

В однородных координатах точка в пространстве (x, y, z) представлена вектором [$xw\ yw\ zw\ w$], где: w — фактический параметр, и

$$x = xw/w,$$
$$y = yw/w, \tag{8.2}$$
$$z = zw/w,$$
$$w \neq 0.$$

8.1. Геометрические преобразования 3D. Матрицы преобразования

Обобщенная матрица преобразования 4х4 для однородных 3D координат имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

Эту матрицу можно разделить на четыре, следующим образом :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & 3\times 3 & & \times \\ & & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1\times 3 & & 1\times 1 \end{array}\right], \tag{8.4}$$

где: • матрица 3 х 3 включает в себя локальное масштабирование, перенос, зеркальное отображение и поворотные преобразования;

• матрица 1 х 3 представляет собой преобразование переноса;

• матрица 3 х 1 представляет собой перспективное преобразование;

• матрица 1 х 1 представляет собой преобразование общего масштабирования.

3D геометрическое преобразование изображения в матричную форму описывается следующим образом:

$$[x'\ y'\ z'\ 1] = [x\ y\ z\ 1][M]. \tag{8.5}$$

8.2. Перенос

***Перенос** — это преобразование, посредством которого объект перемещается из своего исходного положения в конечное положение, по заданному направлению*.

Если (*x, y, z*) — координаты точки *P* в пространстве, то путем переноса она перемещается в точку с координатами *P*' (*x*', *y*', *z*'), (рисунок 8.1), где:

$$x' = x + tx,$$
$$y' = y + ty, \qquad (8.6)$$
$$z' = z + tz,$$

или в матричной форме:

$$[x'\ y'\ z'\ 1] = [x\ y\ z\ 1]\ [T]. \qquad (8.7)$$

Матрица 3D-переноса выглядит следующим образом:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.8)$$

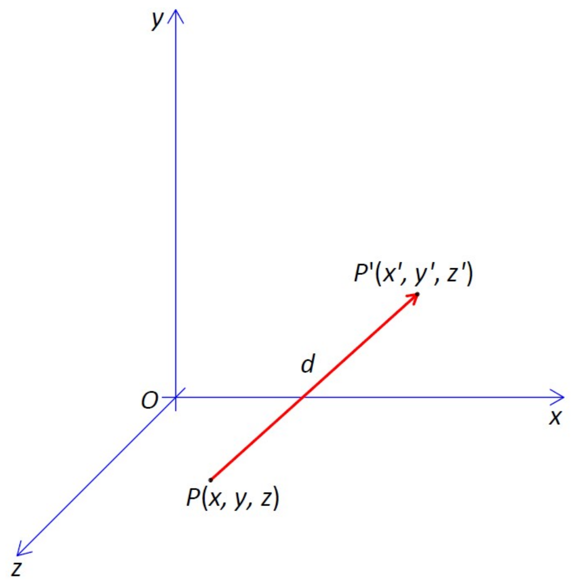


Рис. 8.1. Перенос в пространстве на расстояние *d*

8.3. Масштабирование

Масштабирование относительно точки начала координат.

Масштабирование *— это преобразование, с помощью которого объект увеличивается или уменьшается.*

Он задается тремя числами, называемыми *коэффициентом масштабирования по оси x*, соответственно *коэффициентом масштабирования по оси y* и *коэффициентом масштабирования по оси z*.

Если (x, y, z) — координаты точки P в пространстве, то путем масштабирования относительно начала координат она преобразуется в точку координат P' (x', y', z'), где:

$$x' = sx \cdot x,$$
$$y' = sy \cdot y, \qquad (8.9)$$
$$z' = sz \cdot z,$$

или в матричной форме:

$$[x'\ y'\ z'\ 1] = [x\ y\ z\ 1]\ [S]. \qquad (8.10)$$

Матрица локального масштабирования задается отношением:

$$[S] = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.11)$$

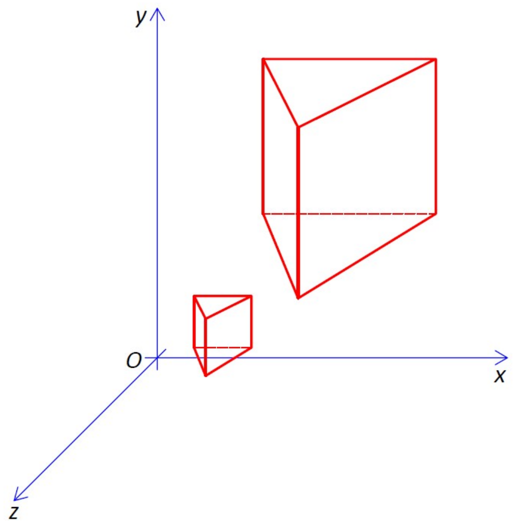


Рис. 8.2. Масштабирование относительно точки начала координат

8.3. Масштабирование

Глобальное масштабирование получается с помощью следующей матрицы:

$$[Sg] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \qquad (8.12)$$

Для точки *P* с координатами (*x, z, y*) глобальное масштабирование происходит следующим образом:

$$[x\ y\ z\ 1][\ S\ ] = [\ x\ y\ z\ s\ ] = [\ x/s\ y/s\ z/s\ 1\ ] = [\ x'\ y'\ z'\ 1\ ]. \qquad (8.13)$$

Если глобальный коэффициент масштабирования меньше единицы, $s < 1$, происходит увеличение вектора положения;

Если коэффициент масштабирования больше единицы, $s > 1$, происходит уменьшение вектора положения.

То же самое получается при локальном масштабировании, представленным матрицей:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.14)$$

8.3. Масштабирование

Пример:

Для куба определенным следующей матрицей координат его вершин:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ используют следующую локальную матрицу масштабирования: $$[S1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После масштабирования с различными коэффициентами масштабирования по трем осям получается параллелепипед с координатами вершин, представленными первыми тремя столбцами конечной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.3. Масштабирование

Пример:

Имея следующую матрицу глобального масштабирования: $[S2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

После масштабирования получается матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 0 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 4 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 4 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 4 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 4 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После глобального масштабирования также получается куб, имеющий координаты вершин, представленными полученной матрицей.

8.4. Вращение

Вращение вокруг оси системы координат

В случае вращения вокруг оси *x* координаты векторов положения не меняются.

Вращение происходит в плоскостях, перпендикулярных оси x.

Аналогично, в случае вращения вокруг оси *y* или *z* координаты *y* и *z* соответственно векторов положения не изменяются; вращение осуществляется в плоскостях, перпендикулярных осям *y* и *z* соответственно.

В случае вращения вокруг оси *x* на угол α матрица преобразования описана следующим образом:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.15}$$

Аналогичным образом матрица вращения вокруг оси *y* на угол β выглядит следующим образом:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

8.4. Вращение

Матрица вращения вокруг оси *z* на угол ϑ составляет:

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.17}$$

Рассмотрим параллелепипед со сторонами, параллельными осям системы координат и вершиной в начале координат (рисунок 8.3).

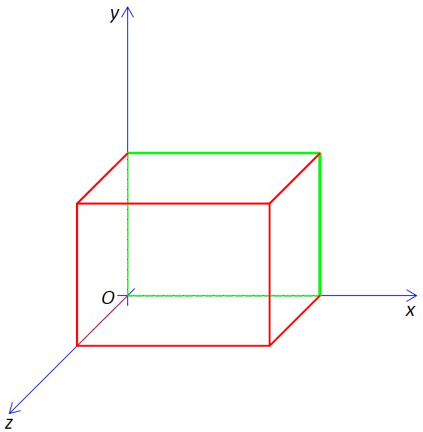


Рис. 8.3. Начальное положение параллелепипеда

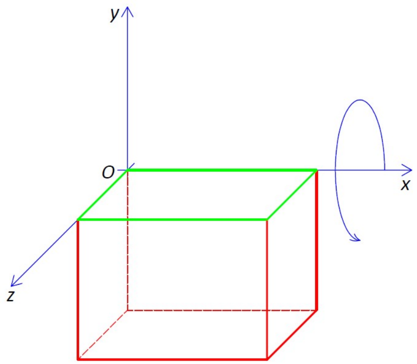


Рис. 8.4. Поворот по оси *x* с углом α = 90°

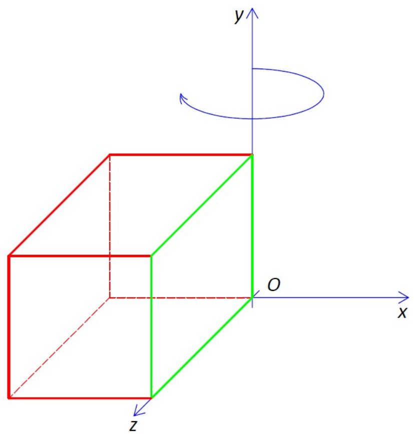


Рис. 8.5. Вращение вокруг оси *y* с углом β = 90°

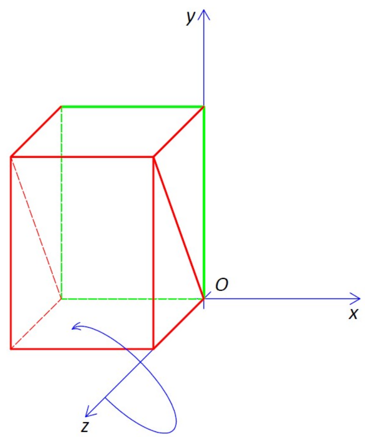


Рис. 8.6. Вращение вокруг оси *z* с углом θ = 90°

8.5. Обратные преобразования

Все матрицы преобразований имеют обратные значения:

$$
\begin{gathered}
[T(tx, ty, tz)]^{-1} = [T(-tx, -ty, -tz)],\\
[S(sx, sy, sz)]^{-1} = [S(1/sx, 1/sy, 1/sz)],\\
[Rx(\alpha)]^{-1} = [Rx(-\alpha)],\\
[Ry(\beta)]^{-1} = [Ry(-\beta)],\\
[Rz(\vartheta)]^{-1} = [Rz(-\vartheta)].
\end{gathered} \tag{8.18}
$$

8.6. Наклон (сдвиг – Shear)

Если (x, y, z) — координаты точки P в пространстве, то при наклоне она преобразуется в точку с координатами P' (x', y', z'), где:

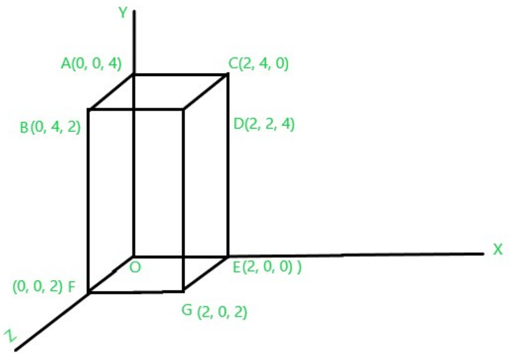
$$x' = x + y \cdot d + z \cdot g,$$
$$y' = x \cdot b + y + z \cdot i, \tag{8.19}$$
$$z' = x \cdot c + y \cdot f + z,$$

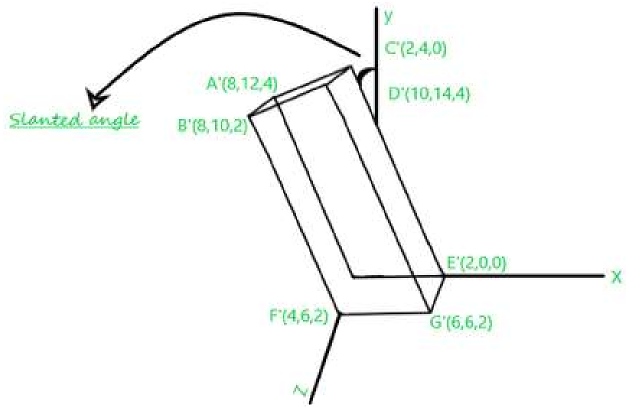
или в матричной форме:

$$[x' \; y' \; z' \; 1'] = [x \; y \; z \; 1] \; [F]. \tag{8.20}$$

Матрица сдвига выглядит следующим образом:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.21}$$





8.7. Зеркальное отображение относительно плоскости системы координат

В случае зеркального отображения относительно плоскости *xy* только координата *z* меняется на противоположную, координаты *x* и *y* остаются неизменными.

Таким образом, матрица зеркального преобразования относительно плоскости *xy* имеет вид:

$$[O_{xy}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.22}$$

Зеркальная матрица по отношению к плоскости *yz* выглядит следующим образом:

$$[O_{yz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.23}$$

Зеркальная матрица по отношению к плоскости *xz* выглядит следующим образом:

$$[O_{xz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.24}$$

8.8. Сложные трехмерные преобразования

Матрица, соответствующая составному преобразованию, получается путем умножения матриц элементарных преобразований.

Поскольку умножение матриц не является коммутативным, важен порядок, в котором эти преобразования применяются.

Матрица преобразования, ближайшая к вектору линии, соответствует первому примененному преобразованию, в то время как самая дальняя матрица преобразования является последней, которая будет применена.

Математически это выражается следующим образом:

$$[V]\,[M] = [V]\,[M_1]\,[M_2]\,[M_3]\,...\,[M_n], \qquad (8.25)$$

где $[Mi]$ может быть любая элементарная матрица преобразования:

- масштабирования,
- наклона,
- переноса,
- вращения,
- зеркального отображения,
- проекция.

8.9. Вращение вокруг случайной оси

Любая ось вращения (d) задается точкой A (x_0, y_0, z_0) и вектором направления $C = c_{xi} + c_{yj} + c_{zk}$, где c_x, c_y, c_z — косинусы направлений.

Вращательное преобразование с углом ϑ вокруг оси (d) состоит из:

1. Переноса, таким образом чтобы точка A достигла начала системы координат.
2. Выравнивание вектора C по одной из осей системы координат.
3. Поворот на угол ϑ вокруг оси, по которой производилось выравнивание.
4. Обратное выравнивание сторон согласно пункту 2.
5. Обратный перенос согласно пункту 1.

8.10. Зеркальное отображение относительно случайной плоскости

Рассмотрим плоскость зеркального отражения, заданную точкой P (x_0, y_0, z_0) и нормальным вектором к плоскости N.

Одна из процедур достижения зеркального преобразования по отношению к заданной плоскости выглядит следующим образом:

1. Перенос так, чтобы точка P (x_0, y_0, z_0) из плоскости достигала начала координатной системы.
2. Выравнивание нормального вектора N, к положительной оси z. Таким образом, зеркальная плоскость становится плоскостью $z = 0$.
3. Зеркальное отображение относительно плоскости $z = 0$.
4. Преобразование обратного выравниванию из шага (2).
5. Перенос, обратный шагу (1).

8.10. Зеркальное отображение относительно случайной плоскости

Матрица зеркального преобразования относительно любой плоскости состоит из произведения следующих матриц:

$$[M] = [T]\ [A_{N,z}]\ [O_z]\ [A_{N,z}]^{-1}\ [T]^{-1}, \qquad (8.26)$$

где: $[T]$ - представляет матрицу переноса,

$[A_{N,z}]$ – представляет матрицу выравнивания нормального вектора N с положительной осью z;

$[O_z]$ – представляет матрицу зеркальную отражения относительно плоскости $z = 0$;

$[A_{N,z}]^{-1}$ – представляет матрицу обратного выравнивания;

$[T]^{-1}$ – представляет обратный перенос.

ВОПРОСЫ