UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

ТЕМА 7. ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 2D (ДВУМЕРНЫЕ)

l.u., dr. NASTAS Andrei

СОДЕРЖАНИЕ

7.1. Геометрические преобразования

Преобразования часто используются при создании и обработке изображений.

Преобразования позволяют:

— представление изображений в нужном масштабе,

— выполнение операций детализации и уменьшения изображений,

— создание анимации и т.д.

Существуют два взаимодополняющих взгляда на преобразования.

Таким образом, систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + d \\ y' = y \end{cases}. \qquad (7.1)$$

можно трактовать двумя способами:

1. Точка в плоскости (*x*, *y*) была переведена вправо на расстояние *d* (рисунок 7.1).

2. Ось Y системы координат переведена на расстояние *d* влево (рисунок 7.2).

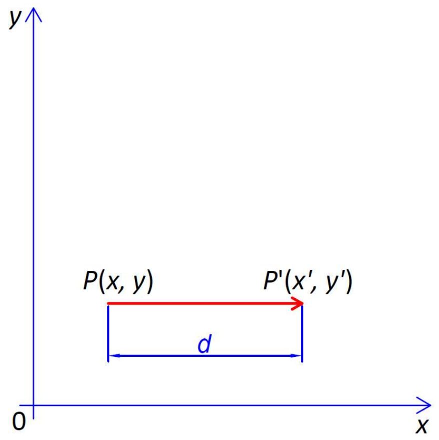

Рис. 7.1. Перенос вправо на расстояние *d*

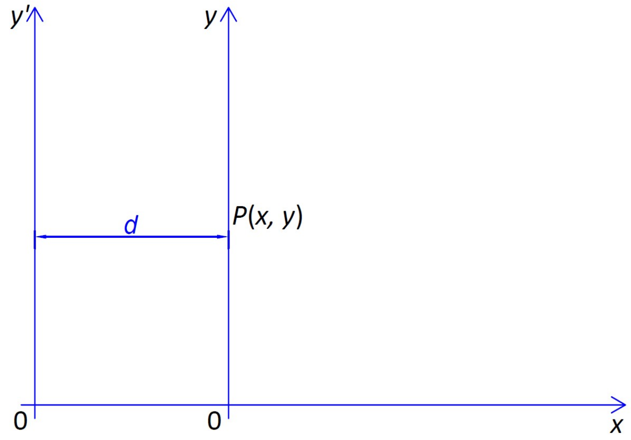

Рис. 7.2. Перенос оси *Y* влево на расстояние *d*

7.1. Геометрические преобразования

Первое преобразование соответствует преобразованию точки по отношению к фиксированной системе координат и математически формулируется как **геометрическое преобразование**, применяемое к точке.

Вторая интерпретация соответствует **преобразованию системы координат**, так что (x', y') представляет точку P в преобразованной системе координат.

В декартовой двухмерной системе координат, любой объект может быть описан следующим образом:

- набор геометрических атрибутов (координат),
- топологические атрибуты,
- и атрибуты внешнего вида.

***Геометрическое преобразование** объекта состоит из преобразования каждой точки в представлении объекта.*

7.1.1. Перенос

***Перенос** — это преобразование, посредством которого объект перемещается из своего исходного положения в конечное положение, по заданному направлению*.

Математически перенос задается вектором:

$$v = tx \cdot I + ty \cdot J\ . \qquad (7.2)$$

Если (*x, y*) — координаты точки *P* объекта, то, перенося объект на расстояние, равное размеру вектора *v*, точка *P* преобразуется в *P*'(*x*', *y*') (рисунок 7.3), где *x*' и *y*' определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x' = x + tx \\ y' = y + ty \end{cases} . \qquad (7.3)$$

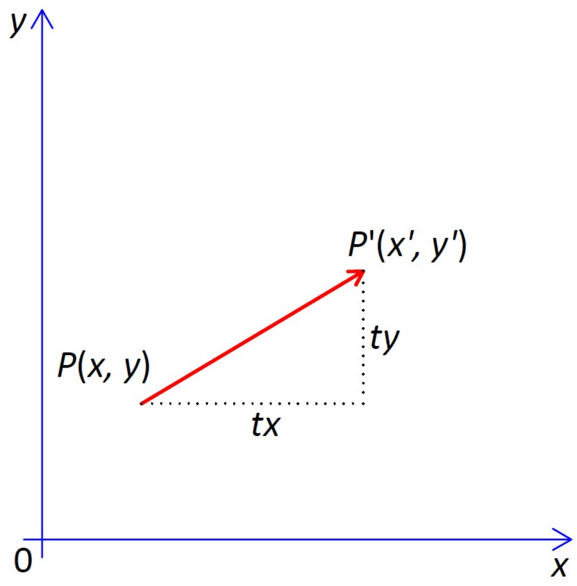

Рис. 7.3. Перенос вправо на *tx* и *ty*

7.1.2. Масштабирование

***Масштабирование** — это преобразование, с помощью которого объект увеличивается или уменьшается.*

а) Масштабирование относительно точки начала координат

Масштабирование задается двумя числами, называемыми *коэффициентом масштабирования по оси x*, соответственно *коэффициентом масштабирования на оси y*.

Положительный коэффициент масштабирования определяет изменение размера относительно положительного направления оси X или оси Y.

Коэффициент масштабирования больше единицы указывает увеличение, а коэффициент масштабирования меньше единицы — уменьшение.

Факторами масштабирования считаются *sx* и *sy* относительно осей *Ox* и соответственно *Oy*.

Масштабирование точки *P*(*x, y*) относительно начала координат с коэффициентами *sx, sy* означает масштабирование вектора положения *OP*(*x, y*), который соединяет начало координат с точкой *P*.

Вектор, полученный в результате масштабирования, *OP*', имеет компоненты *x*', *y*', где:

$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}. \qquad (7.4)$$

- Если *sx* = *sy*, масштабирование *равномерно* – оно не производит деформацию преобразованного объекта,
- Если *sx*<>*sy*, тогда масштабирование называется *неравномерным*.

7.1.2. Масштабирование

Пример:

Изначально имеем квадрат с вершинами: (1,1), (3,1), (3,3), (1,3), (рисунок 7.4, *a*).

Путем масштабирования его относительно начала координат с множителями *sx* = 2 и *sy* = 3 будет получен прямоугольник с вершинами: (2,3), (6,3), (6,9), (2,9), (рисунок 7.4, *b*).

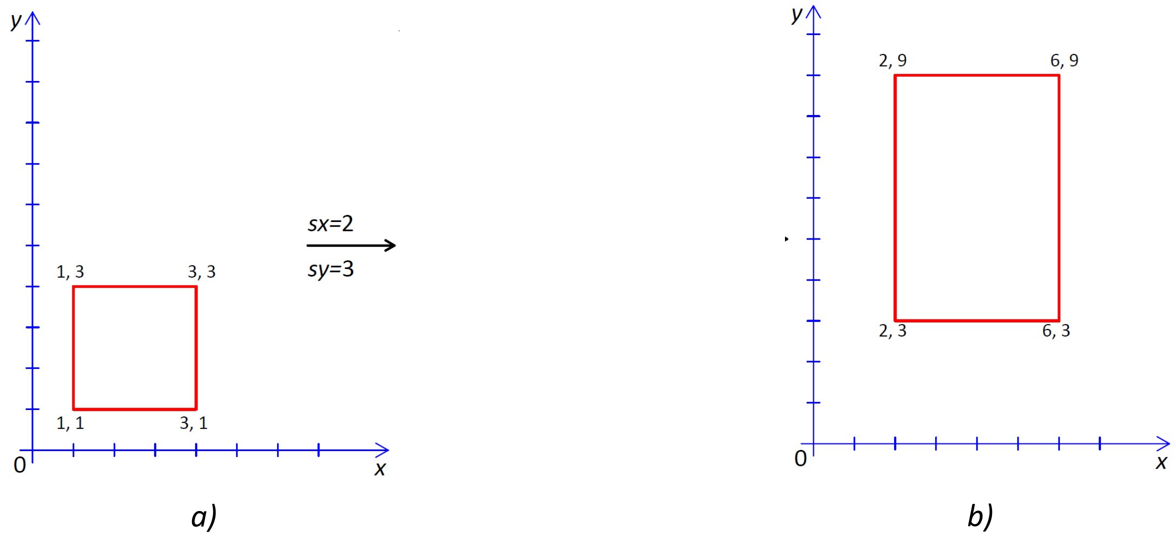

Рис. 7.4. Пример масштабирования прямоугольника

7.1.2. Масштабирование

b) Масштабирование относительно случайной точки плоскости

Пусть $F(xf, yf)$ — точка на плоскости, относительно которой масштабируется точка $P(x, y)$.

Точка F называется фиксированной точкой преобразования, поскольку она не изменяется при применении преобразования.

Масштабирование точки P относительно F с коэффициентами sx и sy означает масштабирование вектора FP;

Компонентами масштабированного вектора FP', будут:

$$dx' = x' - xf = (x - xf) \cdot sx, \tag{7.5}$$

$$dy' = y' - yf = (y - yf) \cdot sy, \tag{7.6}$$

откуда:

$$x' = x \cdot sx + xf - xf \cdot sx,$$

$$y' = y \cdot sy + yf - yf \cdot sy.$$

Примечание:

Если $xf = 0$ и $yf = 0$, то получается формула масштабирования относительно начала координат.

7.1.3. Вращение (Поворот)

1. Вращение относительно начала координат

Это преобразование задается углом;

– если угол положительный, то вращение выполняется против часовой стрелки (в тригонометрическом смысле),

– в противном случае — по часовой стрелке.

Пусть точка $P(x, y)$ и угол поворота t. Точка $P'(x', y')$, которая будет вычисляться по вращению точки P на угол u, вокруг начала координат (рисунок 7.5), может быть выражена соотношениями:

Декартовы координаты точки P:

$$x = r \cdot \cos(t),\quad y = r \cdot \sin(t). \qquad (7.7)$$

Декартовы координаты точки P':

$$x' = r \cdot \cos(t + u),\quad y' = r \cdot \sin(t + u). \qquad (7.8)$$

Заменяем $\cos(t + u)$ и $\sin(t + u)$ их выражениями из тригонометрии, и таким образом мы получаем:

$$x' = r\,(\cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)),\quad y' = r\,(\cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u)). \qquad (7.9)$$

Знание того, что $x = r \cdot \cos(t)$ и $y = r \cdot \sin(t)$, мы получаем:

$$x' = x \cdot \cos(u) - y \cdot \sin(u),\quad y' = x \cdot \cos(u) + y \cdot \cos(u). \qquad (7.10)$$

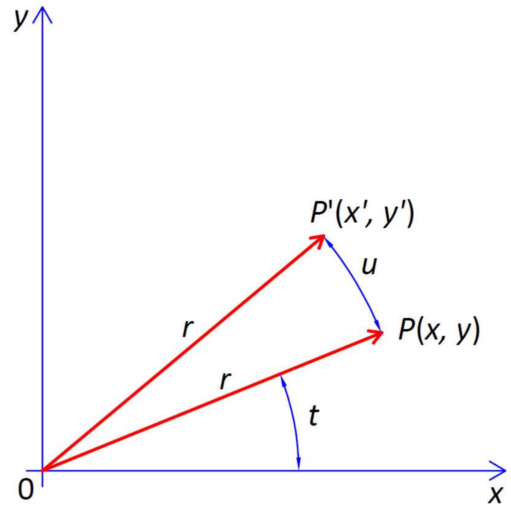

Рис. 7.5. Вращение относительно начала координат

7.1.3. Вращение

2. Вращение относительно случайной точки плоскости

Пусть будет точка *P*(*x, y*), с углом поворота *u* и точкой *F*(*xf, yf*), вокруг которой *P* будет вращаться.

Точка *P*'(*x*', *y*'), которая будет вычисляться по вращению точки *P* на угол *u*, вокруг *F*, может быть выражена соотношениями:

$$
\begin{aligned}
dx' &= x' - xf = (x - xf) \cdot \cos(u) - (y - yf) \cdot \sin(u), \\
dy' &= y' - yf = (x - xf) \cdot \sin(u) + (y - yf) \cdot \cos(u).
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Откуда мы получаем:

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cdot \cos(u) - y \cdot \sin(u) + xf - xf \cdot \cos(u) + yf \cdot \sin(u), \\
y' &= x \cdot \sin(u) + y \cdot \cos(u) + yf - xf \cdot \sin(u) - yf \cdot \sin(u).
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

7.2. Составление преобразований

- Преобразования, которые должны быть применены к объекту в данный момент времени, состоят из нескольких элементарных преобразований.
- Например: для того, чтобы смоделировать движение автомобиля по любой траектории, отображается последовательность изображений автомобиля, каждое изображение получается из предыдущего путем применения нескольких элементарных преобразований:
  - – перенос,
  - – вращение,
  - – и, возможно, масштабирование.
- Если применить преобразование для каждой точки изображения, последовательно применяя три элементарных преобразования, мы добьемся низкой скорости движения всего объекта в целом.
- Затем нужно собрать два или три преобразования, чтобы с помощью формулы смогли быстрее перемещать объект.
- Такая формула получается на основе выражений в виде матрицы элементарных преобразований.

7.2. Составление преобразований

Пример:

Вращение относительно начала координат точки *P*(*x, y*) может быть выражено в виде матрицы следующим образом:

$$|x' \;\; y'| = |x \quad y| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}. \tag{7.13}$$

Масштабирование относительно начала координат с последующим поворотом относительно начала координат может быть выражено следующим образом:

$$|x' \;\; y'| = |x \quad y| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}. \tag{7.14}$$

Из умножения двух матриц получаем:

$$S \cdot R = \begin{vmatrix} sx \cdot \cos(u) & sx \cdot \sin(u) \\ -sy \cdot \sin(u) & sy \cdot \cos(u) \end{vmatrix}. \tag{7.15}$$

Таким образом, формула составного преобразования выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} x' = x \cdot sx \cdot \cos(u) - y \cdot sy \cdot \sin(u), \\ y' = x \cdot sx \cdot \cos(u) + y \cdot sy \cdot \cos(u). \end{gathered} \tag{7.16}$$

7.3. Однородные координаты

Представленные нами 2D-преобразования могут быть представлены в виде матриц, в декартовых координатах, матрицами из двух столбцов и двух линий.

Такой матрицы для переноса нет. По этой причине графические преобразования выражаются в однородных координатах.

Таким образом, точка на плоскости $P(x, y)$, представлена в однородных координатах вектором $[xo\ yo\ o]$,

где $xo = x \cdot o$ и $yo = y \cdot o$, а o — какое-то действительное число.

Пример:

[3 2 1], [6 4 2], [30 20 10] являются возможными представлениями точки (3, 2) в однородных координатах.

Вектор в однородных координатах, $[a\ b\ c]$, где c отличается от нуля, представляет точку на плоскости $[a/c, b/c]$.

Вектор $[a\ b\ 0]$ представляет точку от бесконечности, расположенную справа.

$$a \cdot y - b \cdot x = 0\ . \tag{7.17}$$

7.3. Однородные координаты

Примеры:

[1 0 0] — точка от бесконечности на положительной оси *x*;

[0 -1 0] — точка из бесконечности на отрицательной оси *y*;

[1 1 0] — точка из бесконечности справа *y* = *x* в направлении [1 1].

Три известных элементарных преобразования могут быть выражены таким образом, в однородных координатах:

• Перенос:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.18)$$

• Масштабирование от начала координат:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.19)$$

• Вращение относительно начала координат:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.20)$$

7.4. Другие 2D-графические преобразования
7.4.1. Зеркальное отображение (отражение)

а) относительно оси *x* (рисунок 7.6),

$$x' = x,$$
$$y' = -y. \qquad (7.21)$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.22)$$

b) Относительно оси *y* (рисунок 7.7),

$$x' = -x,$$
$$y' = y. \qquad (7.23)$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.24)$$

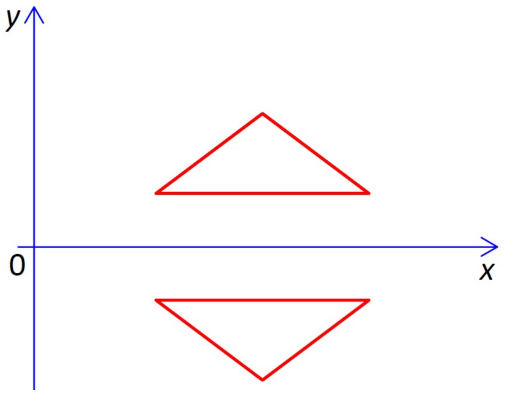

Рис. 7.6. Зеркальное отображение относительно оси *x*

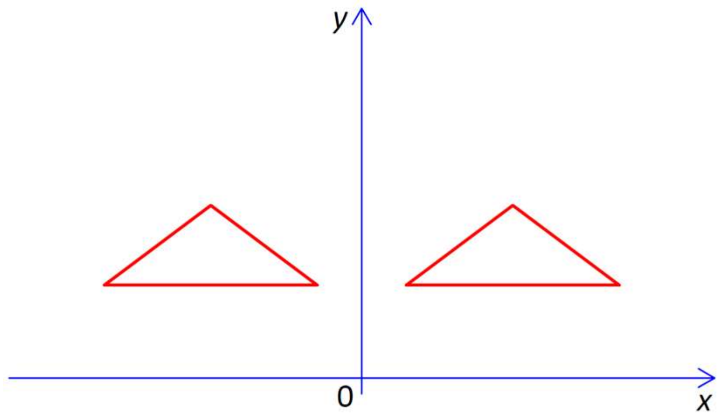

Рис. 7.7. Зеркальное отображение относительно оси Y

7.4. Другие 2D-графические преобразования
7.4.1. Зеркальное отображение (отражение)

c) относительно начала координат (рисунок 7.8),

$$x' = -x,$$
$$y' = -y. \quad (7.25)$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.26)$$

d) относительно прямой *y* = *x* (рисунок 7.9),

$$x' = y,$$
$$y' = x. \quad (7.27)$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.28)$$

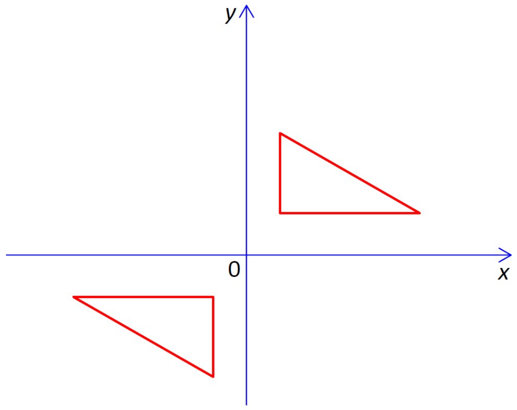

Рис. 7.8. Зеркальное отображение относительно начала координат

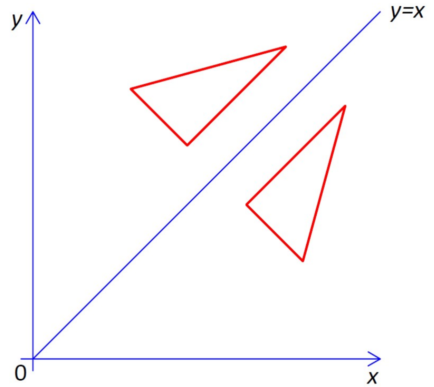

Рис. 7.9. Зеркальное отображение относительно прямой *y* = *x*

7.4. Другие 2D графические преобразования
7.4.1. Зеркальное отображение (отражение)

Зеркальное отражение относительно случайной прямой.

Его можно выразить как преобразование, состоящее из следующих элементарных преобразований:

- Перенос, чтобы прямая проходило через начало координат;
- Поворот относительно начала координат, так чтобы прямая совпадала с одной из главных осей;
- Зеркальное отображение относительно оси, с которой совпала прямая;
- обратное вращение;
- обратный перенос.

7.4. Другие 2D-графические преобразования
7.4.2. Наклон (сдвиг – Shear)

Наклон — это преобразование, которое вызывает искажение преобразованного объекта.

Например, если применить наклон к квадрату (рисунок 7.10), получим параллелограмм (рисунок 7.11).

Он задается двумя действительными числами, называемыми коэффициентом сдвига по оси *x* и коэффициентом сдвига по оси *y* соответственно.

а) Наклон по оси *0x*

$$\begin{gathered} x' = x + F_x \cdot y, \\ y' = y. \end{gathered} \tag{7.29}$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.30}$$

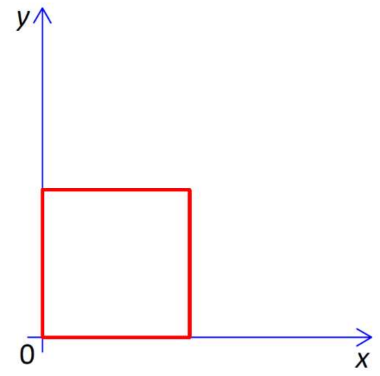

Рис. 7.10. Квадрат до применения наклона

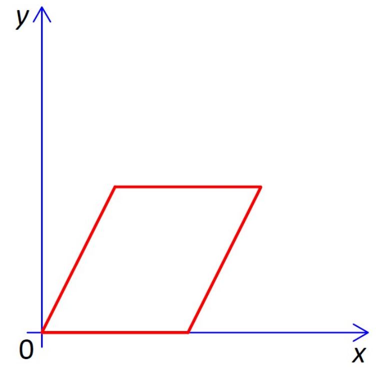

Рис. 7.11. Наклон по оси *0x*

7.4. Другие 2D-графические преобразования
7.4.2. Наклон

б) Наклон по оси *0y* (рисунок 7.12),

$$x' = x,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \tag{7.31}$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.32}$$

в) Наклон в общем случае (рисунок 7.13),

$$x' = x + F_x \cdot y,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \tag{7.33}$$

или

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.34}$$

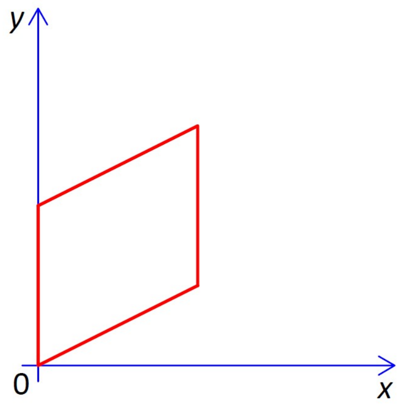

Рис. 7.12. Наклон по оси *0y*

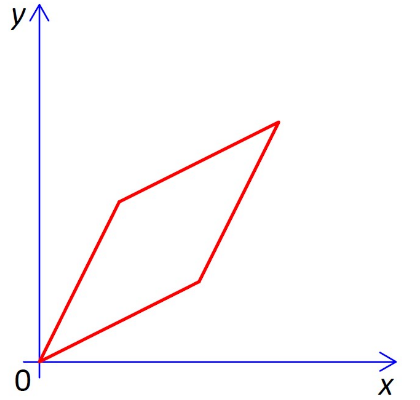

Рис. 7.13. Наклон в общем случае

7.5. Преобразования системы координат

Рассмотрим две системы координат на плоскости, одна с началом в O и осями x и y, а другая с началом в O' и осями x', y'.

Каждая точка в плоскости P соответствует двум представлениям: (x, y) – в системе xOy и (x', y') – в системе $x'O'y'$.

Система $x'O'y'$ может быть получена путем преобразования системы xOy; преобразование может быть определено отношением между двумя представлениями одной и той же точки P, (x, y) и (x', y').

7.5.1. Перенос системы координат

Если система *x'O'y'* (рисунок 7.14), была получена путем переноса системы *xOy*, на расстояние и в направлении, заданных вектором:

$$v = tx \cdot I + ty \cdot J\ .$$

тогда соотношение между координатами *P* в двух системах координат составляет:

$$\begin{cases} x' = x - tx \\ y' = y - ty \end{cases}.$$

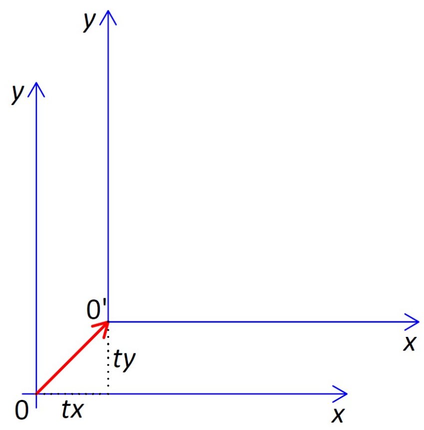

Рис. 7.14. Перенос

7.5.2. Вращение относительно начала координат

Пусть — система координат $x'O'y'$, полученная вращением осей системы xOy на угол u, (рисунок 7.15).

Точка P, которая в системе xOy имеет координаты:

$$x' = r \cdot \cos(t),$$
$$y' = r \cdot \sin(t).$$

будет иметь в системе $x'O'y'$ координаты:

$$x' = r \cdot \cos(t - u) = r \cdot (\cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)) = x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u),$$
$$y' = r \cdot \sin(t - u) = r \cdot (\sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)) = -x \cdot \sin(u) + y \cdot \cos(u).$$

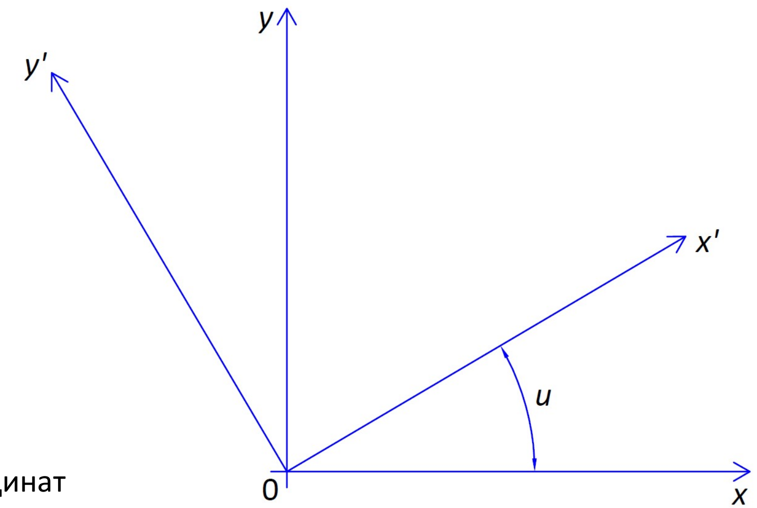

Рис. 7.15. Вращение относительно начала координат

7.5.3. Масштабирование относительно начала координат

Предположим, что формируем новую систему координат с тем же началом координат и ориентацией осей, но характеризующуюся другой единицей измерения по осям x и y.

Если новые единицы измерения получены путем масштабирования старых единиц измерения с коэффициентами sx и sy соответственно, то соотношение между координатами (x, y) и (x', y') одной и той же точки P в двух системах координат составляет:

$$x' = x \cdot 1/sx,$$

$$y' = y \cdot 1/sy.$$

Например, если в системе xOy единицей измерения является метр, а в системе $x'O'y'$ единицей является миллиметр, то есть $sx = sy = 1/1000$.

Точка P, из координат $x = 10$, $y = 20$ будет иметь в масштабированной системе координаты:

$$x' = 10 \cdot 1000,$$

$$y' = 20 \cdot 1000.$$

7.5.4. Зеркальное отображение относительно оси

Если система координат *x'O'y'* была получена путем зеркального отображения системы *xOy* относительно оси *Ox* или оси *Oy*, то соотношение между координатами одной и той же точки в двух системах координат составляет:

$x' = x$,

$y' = -y$, в случае зеркального отражения отношению оси *Ox*,

$x' = -x$,

$y' = y$, в случае зеркального отражения на оси Oy.

Видно, что это преобразование изменяет ориентацию оси системы координат.

ВОПРОСЫ