UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Экстремумы функции: локальные, условные, глобальные.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0;y_0) \in D$.

Говорят, что функция $z = f(x;y)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x,y)$ $(f(x_0;y_0) < f(x,y))$ для всех точек $(x;y)$ достаточно близких к $M_0(x_0;y_0)$ и $(x;y) \neq (x_0;y_0)$.

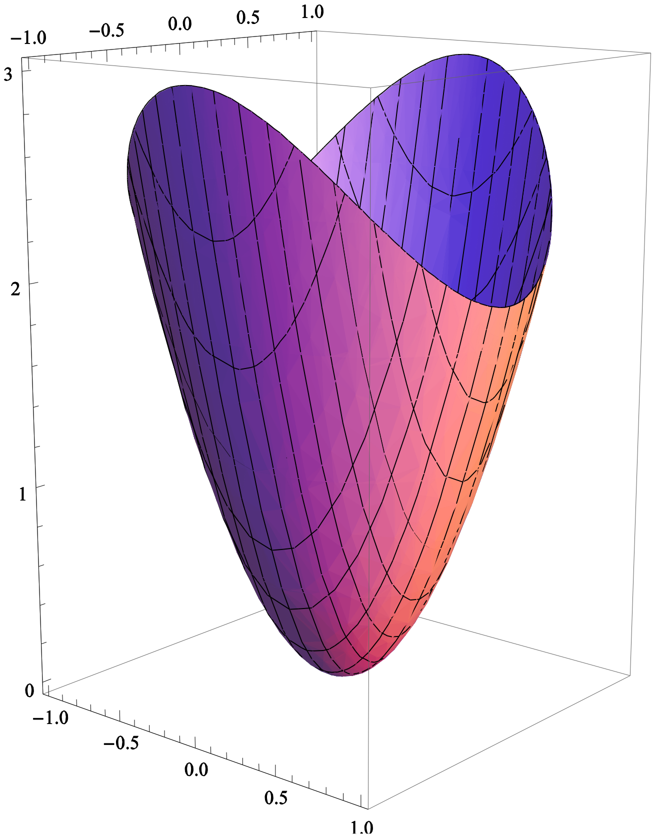
Максимумы и минимумы называются *экстремумами*.

Точка экстремума функции лежит внутри области определения функции.

Максимум и минимум имеют локальный характер т.к. значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *критической* для функции $z = f(x; y)$, если частные производные z'_x и z'_y в этой точке или равны нулю, или не существуют.

Функция z= 2x^2+3y^2 имеет минимум в точке (0;0)



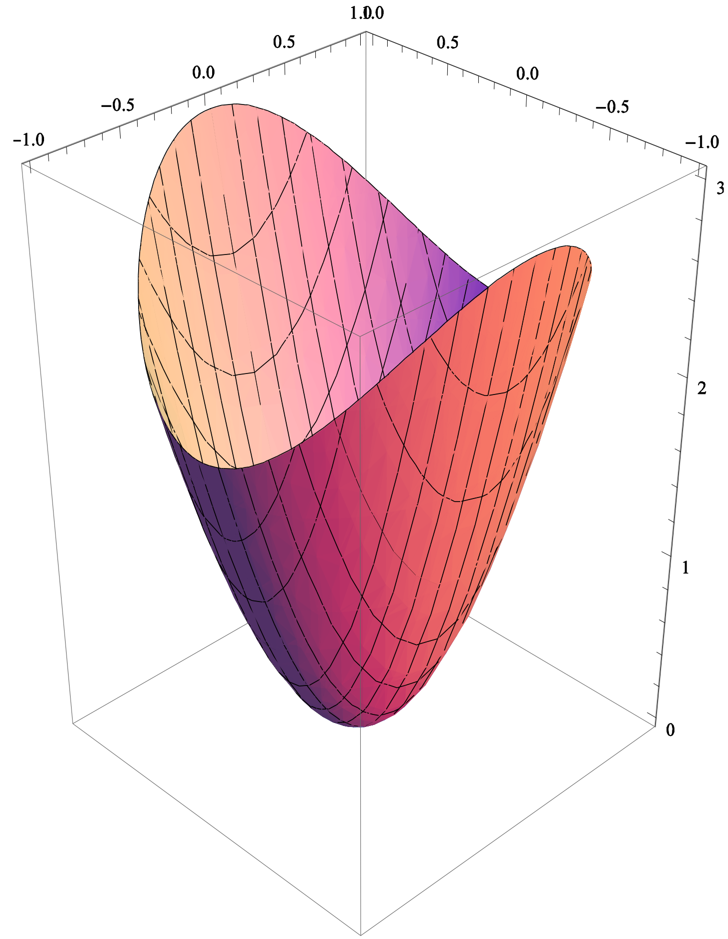


График функции   z= 2x^2+3y^2

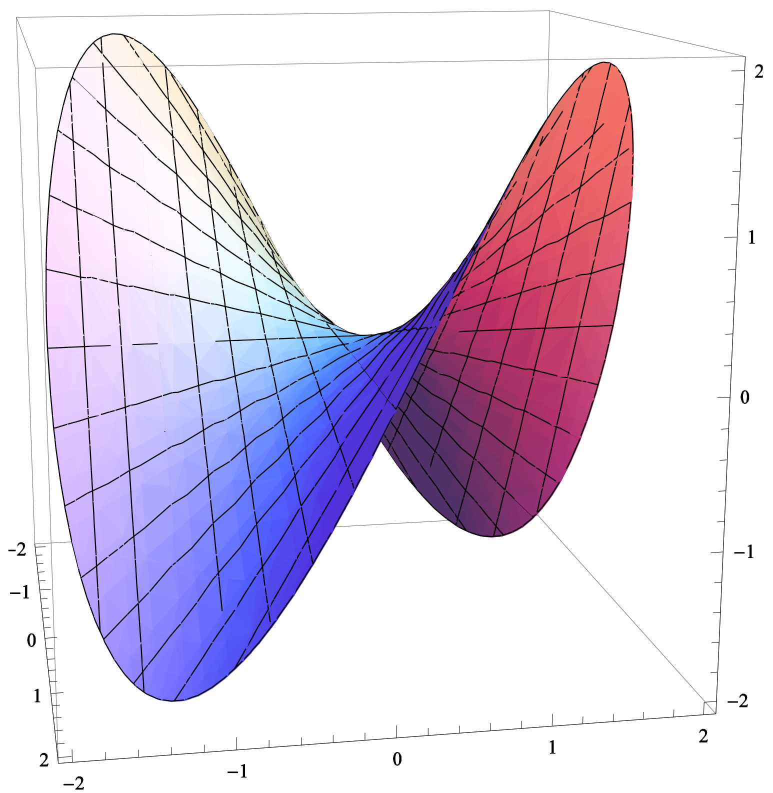
Если частные производные z'_x и z'_y в данной точке равны нулю, то эта точка называется *стационарной*.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум в точке $(x_0; y_0)$, то $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности $z = f(x; y)$, параллельна плоскости Oxy.

Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Функции z= xy в точке (0; 0) экстремума не имеет



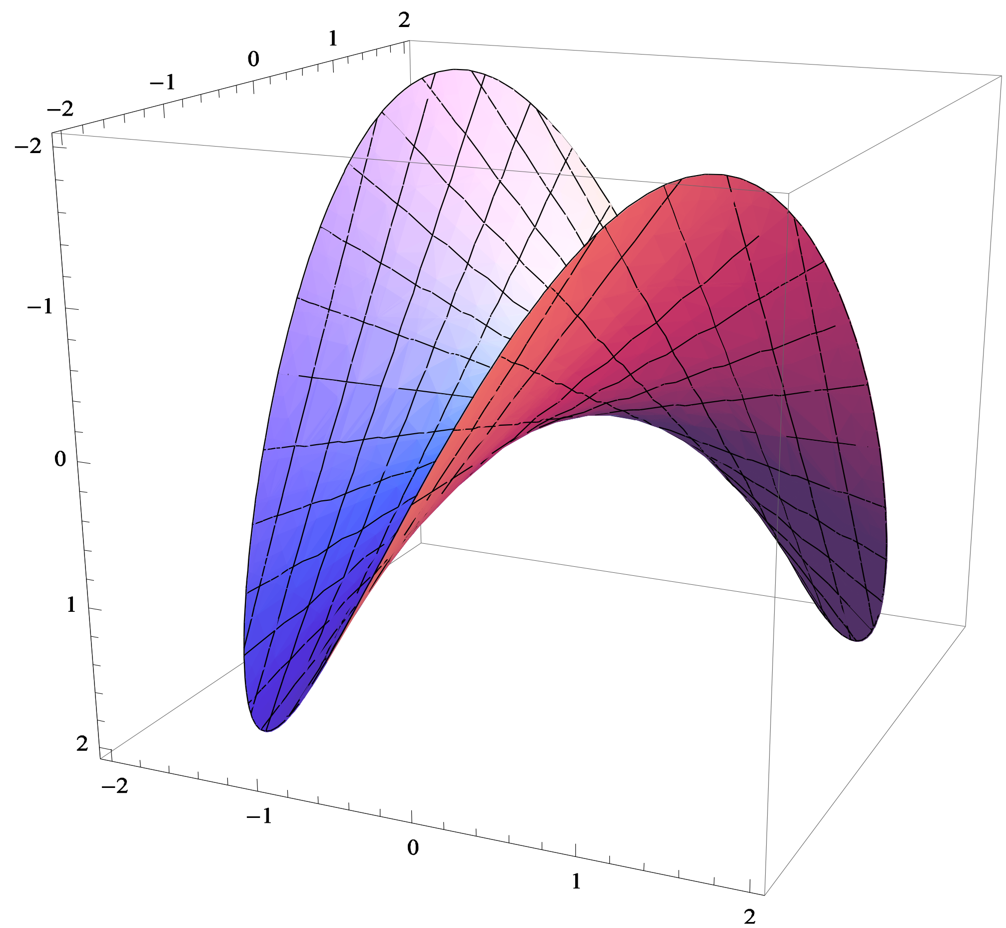


График функции z= xy

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть $(x_0; y_0)$ – стационарная точка. Обозначим: $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$. Тогда, если:

1) $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то $(x_0; y_0)$ – т. максимума;

2) $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то $(x_0; y_0)$ – т. минимума;

3) $AC - B^2 < 0$, то $(x_0; y_0)$ не явл. т. экстремума;

4) $AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке $(x_0; y_0)$ остается открытым, необходимо продолжить исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

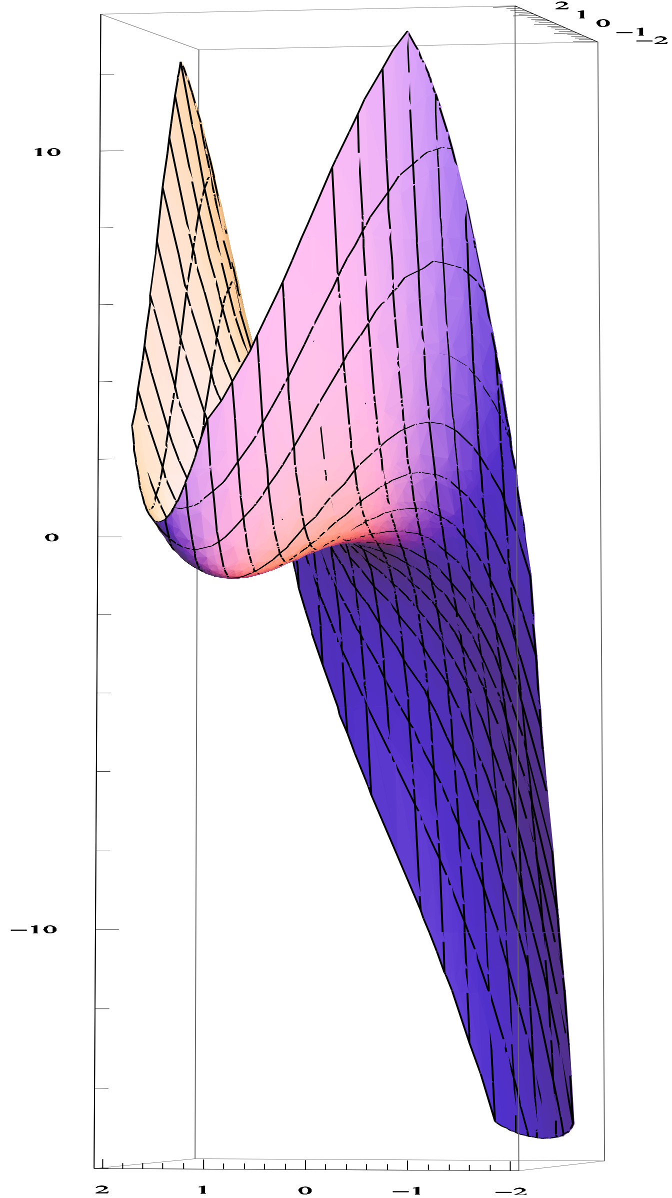


График функции z=x^3+y^3-3 xy

Условным экстремумом функции $z = f(x;y)$ называется экстремум этой функции при некотором дополнительном условии, например, $(x;y)$ удовлетворяет уравнению $\varphi(x,y) = 0$. Уравнение $\varphi(x,y) = 0$ называется *уравнением связи* или *ограничением.*

Алгоритм нахождения условного экстремума: 1)Составляем функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x,y),$$

где λ – неопределенный постоянный множитель (множитель Лагранжа) и вычисляем частные производные L'_x, L'_y, L'_λ.

2) Решается система уравнений $L'_x = 0$, $L'_y = 0$, $L'_\lambda = 0$, из которой находятся критические точки $M_i(x_i, y_i, \lambda_i)$ функции $L(x, y, \lambda)$.
3) Вычисляются частные производные φ'_x, φ'_y, L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}.

4) Вычисляется определитель

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

в каждой критической т. M_i функции $L(x, y, \lambda)$.

Если точка $M_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ является критической точкой функции $L(x, y, \lambda)$, то при $\Delta(M_0) > 0$, точка $(x_0; y_0)$ является точкой условного максимума, а при $\Delta(M_0) < 0$, точка $(x_0; y_0)$ является точкой условного минимума функции $z = f(x; y)$.

Пример. Найти наименьшее расстояние от параболы $y^2 = 2x$ до прямой $x + y + 3 = 0$.

Пример. Найти экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего и наименьшего значений (*глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Пример. Определить наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ в области}$$

$$\overline{D} : x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3.$$

В случае функции n - переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно применить критерий Сильвестра при нахождении экстремумов.

Задачи: I. Исследовать на экстремум функцию

$$a)\ z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 25;$$

$$b)\ z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

II. Найти условный экстремум

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

III. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1;0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

IV. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.