Задачи

В задачах 1–7 вычислить определенные интегралы, используя формулу Ньютона – Лейбница.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{4}(2^4 - (-1)^4) = \frac{15}{4}.$

2. $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{1}^{8} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{1^2}) = \frac{9}{2}.$

3. $\displaystyle\int_{2}^{5} \sqrt{x-1}\,dx = \{d(x-1) = dx\} = \frac{2}{3}(\sqrt{(x-1)^3})\Big|_{2}^{5} =$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{(5-1)^3} - \sqrt{(2-1)^3}) = \frac{14}{3}.$$

4. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{-\pi/4}^{0} = \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}(-\pi/4) = 1.$

5. $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{x-2}dx = e^{x-2}\Big|_{1}^{2} = 1 - \frac{1}{e}.$

7. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}dx = \{x^2+3=(x^2-2^2)+7\} =$

$$= \int_{3}^{4} \left(x+2+\frac{7}{x-2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 7\ln|x-2|\right)\Big|_{3}^{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 7\ln|4-2|\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 7\ln|3-2|\right) = \frac{11}{2} + 7\ln 2.$$

В задачах 8–12 вычислить определенные интегралы, используя метод замены переменной.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8}}$

9. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \{t^2 = x^2+9;\ tdt = xdx;\ x=0\to$

$$\to t=3;\ x=4\to t=5\} = \int_3^5 t^2dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_3^5 = \frac{1}{3}(5^3-3^3) = 32\frac{2}{3}.$$

10. $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{dx}{x\ln x}$ **11.** $\displaystyle\int_1^0 xe^{-x^2}dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$

$= \{x=\sin t;\ dx=\cos t\,dt; x{=}0{\to}t{=}0;\ x{=}1\to t{=}\pi/2\} =$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

В задачах 13–16 вычислить определенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

13. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x dx = \{u=x; dv=\sin x\,dx;\to$

$$\to du=dx;\ v=\int\sin x\,dx = -\cos x\} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = -(\pi\cdot(-1)-0)+\sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

14. $\int_0^1 \arccos x\,dx = \{u = \arccos x; dv = dx; \rightarrow$

$\rightarrow du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; v = x\} = x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= \{1 - x^2 = t^2; tdt = -x\,dx;\ x = 0 \Rightarrow t = 1;$

$x = 1 \Rightarrow t = 0\} = -\int_1^0 dt = -t\big|_1^0 = 1.$

15. $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx = \Big\{u = \ln x; dv = x^{-2}\,dx; \rightarrow$

$\rightarrow du = \dfrac{dx}{x}; v = \int x^{-2}\,dx = -\dfrac{1}{x}\Big\} = -\dfrac{1}{x}\ln x\Big|_1^e +$

$+\int_1^e \dfrac{dx}{x^2} = -\left(\dfrac{1}{e} - 0\right) - \dfrac{1}{x}\Big|_1^e = -\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}.$

16. $\int_0^\pi e^x\cos x\,dx.$

Это циклический интеграл по отношению к методу интегрирования по частям. Здесь безразлично, какую из функций выбрать в качестве u: e^x или $\cos x$. Пусть $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx \Rightarrow du = -\sin x\,dx$; $v = \int e^x\,dx = e^x$.

Тогда

$$J = e^x\cos x\big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x\sin x\,dx.$$

Применим еще раз метод интегрирования по частям, обозначая $u = \sin x; dv = e^x\,dx; \Rightarrow du = \cos x\,dx; v = e^x$.

Тогда получим

$$J = e^\pi\cdot(-1) - 1 + e^x\sin x\big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x\cos x\,dx.$$

Переносим интеграл из правой части равенства в его левую часть, после деления полученного выражения на 2 найдем определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx = -\frac{1}{2}(1+e^{\pi}).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы.

1. $\int_1^2 x^2\, dx$. **2.** $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. **3.** $\int_1^2 (3x^2-2x+1)\, dx$.

4. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\, dx$. **5.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\, dx$. **6.** $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

7. $\int_2^0 e^x dx$; **8.** $\int_0^3 2^x\, dx$. **9.** $\int_2^5 \frac{dx}{x}$. **10.** $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

11. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **12.** $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

13. $\int_{-2}^{2} \frac{x\, dx}{(4+x^2)^2}$. **15.** $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx$.

17. $\int_0^1 xe^x\, dx$. **18.** $\int_0^{\pi/4} x \sin 4x\, dx$.