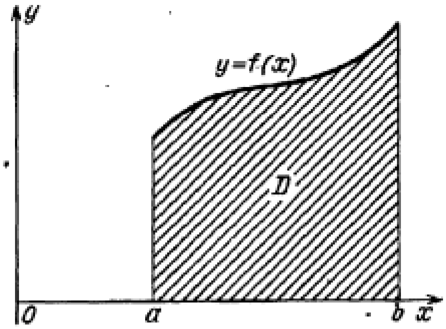
Определенный интеграл

► **Основные определения.** Множество упорядоченных точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, задает *разбиение* отрезка $[a, b]$ на n отрезков. Разбиение будем обозначать $\mathcal{L}_n$, а наибольшую из длин $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ — через $\lambda = \lambda(\mathcal{L}_n)$ (эту величину называют *диаметром разбиения*). Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция $y = f(x)$. Возьмем на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную «опорную» точку c_i и составим сумму $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой*.

Если при $\lambda(\mathcal{L}_n) \to 0$ существует конечный предел $\mathcal{J}$ интегральных сумм s_n, который не зависит ни от вида разбиений $\mathcal{L}_n$, ни от выбора «опорных» точек, то такой предел обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$ и называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} s_n.$$

Эта запись означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathcal{L}_n$ с диаметром $\lambda < \delta$ и для произвольного множества «опорных» точек будет выполняться неравенство $|s_n - \mathcal{J}| < \varepsilon$.



Если $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. Функция, непрерывная на $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

Если $a > b$ и $f(x)$ интегрируема на отрезке $[b, a]$, то по определению $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Кроме того, полагают $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

► **Геометрический смысл определенного интеграла.** Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен площади области $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ («криволинейной трапеции»).

Свойства определенного интеграла

1. *Линейность.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b [Af(x) \pm Bg(x)]\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \pm B\int_a^b g(x)\,dx$$

для любых чисел A и B.

2. *Аддитивность.* Если $c \in [a, b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. *Теорема об оценке.* Если на $[a, b]$ имеют место неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Пример 1. Из неравенств $2 \leqslant (x^2+4)^{1/3} \leqslant 5$, справедливых на отрезке $[2, 11]$, вытекает оценка $18 \leqslant \displaystyle\int_2^{11} (x^2+4)^{1/3}\,dx \leqslant 45$.

4. *Теорема о среднем.* Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется (хотя бы одна) точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(число $f(c)$ называется средним значением функции $f(x)$ на $[a, b]$).

5. *Теорема об интегрировании неравенств.* Если на $[a, b]$ функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют неравенствам $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

(в частности, если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то и $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$).

6. *Теорема о модуле интеграла.* Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7. *Интегрирование четных и нечетных функций* по отрезку вида $[-a, a]$:

если $f(x)$ — четная функция, то $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

если $f(x)$ — нечетная функция, то $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$.

8. *Дифференцирование интеграла по переменному верхнему пределу.* Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема на $[a,b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$. Сказанное удобно записать в виде равенства

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

9. *Формула Ньютона — Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

10. *Интегрирование по частям.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a,b]$ непрерывные производные, то

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \big[u(x)v(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

11. *Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$. Пусть, кроме того, множество значений функции $x(t)$ совпадает с $[a,b]$, причем $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-8)\sqrt{x+1}}$.

Решение. Сделаем подстановку $x+1 = t^2$, $dx = 2t\,dt$. При $x = 0$ имеем $t = 1$, а при $x = 3$ имеем $t = 2$. В результате получим

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-8)\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{2t\,dt}{(t^2-9)t} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}.$$

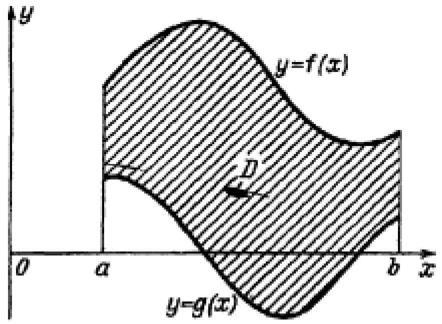
Геометрические и физические приложения определенного интеграла

▶ **Геометрические приложения определенного интеграла.**

1. *Площадь области D на плоскости x, y*, изображенной на рис. 1, равна

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

(при $g(x) \equiv 0$ эта формула дает площадь криволинейной трапеции).



2. *Площадь криволинейного сектора.* Пусть в полярных координатах ρ, φ задана кривая $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора $\{\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta;\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi)\}$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

3. *Площадь поверхности вращения.* При вращении кривой $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ вокруг оси x образуется поверхность, площадь которой

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

4. *Объем тела вращения.* Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$. Его объем

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$

5. *Длина дуги кривой, заданной различными способами.*

а) Если кривая является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

б) Если плоская кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (где $t \in [\alpha, \beta]$, а $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то ее длина

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\, dt.$$

в) Если кривая задана в полярных координатах ρ, φ уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то ее длина

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\, d\varphi.$$

▶ **Физические приложения определенного интеграла.**

1. *Работа переменной силы.* Пусть по оси x от точки $x = a$ до точки $x = b$ движется материальная точка, на которую действует переменная сила $F(x)$, направленная вдоль оси x. Работа этой силы равна $A = \int_a^b F(x)\, dx$.

2. *Масса стержня переменной плотности.* Пусть стержень с постоянной площадью поперечного сечения S занимает на оси x отрезок $[0, l]$, а плотность материала стержня есть функция от x: $\gamma = \gamma(x)$. Масса такого стержня равна $m = S \int_0^l \gamma(x)\, dx$.