1 Элементы аналитической геометрии

Содержание

1.1 Векторы и действия над ними

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Например: длина, площадь, объем, температура, работа, масса.

Величины, которые определяются не только своим численным значением, но и направлением называют *векторными*. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Содержательно вектор представляет собой не что иное, как направленный прямолинейный отрезок. Направление вектора фиксируется тем, что одна его конечная точка считается началом, а другая концом. Вектор с началом A и концом B обозначается символом $\overline{AB}$. На чертеже вектор изображается стрелкой.

В физике векторами являются силы, скорости, ускорения.

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется расстояние между его началом и концом, она обозначается $|\overline{AB}|$. Два вектора называются *равными*, если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Вектор, положение начала которого не имеет значения, обозначается маленькой латинской буквой: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a}_1$, $\overline{b}_2$, $\overline{c}_5$ и т.д.

Векторы можно складывать (суммировать). Определение ***суммы*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: от произвольной точки пространства A отложить первый вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, от полученной точки B отложить второй вектор $\overline{b} = \overline{BC}$, тогда, по определению, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$. Это правило называется ***правилом треугольника*** сложения векторов и выражается формулой: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Вектор называется *нулевым*, если его начало совпадает с его концом: $\overline{0} = \overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} = \ldots$. Нулевой вектор параллелен любой прямой и любой плоскости. Переставив концевые точки вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, мы получим вектор $\overline{BA}$, который обозначается символом $-\overline{a}$. Формула $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}$ показывает, что вектор $-\overline{a}$ является противоположным вектору $\overline{a}$, т.е. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$ для любого вектора $\overline{a}$. *Разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$.

Правило параллелограмма сложения и вычитания векторов: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отложить от одного начала $\overline{a} = \overline{AD}$, $\overline{b} = \overline{AB}$ и достроить до параллелограмма $ABCD$ (см. рис.?), тогда $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{a} - \overline{b} = \overline{BD}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число k называется вектор $k\overline{a}$, длина которого равна длине вектора $\overline{a}$, умноженной на абсолютную величину числа k, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$.

Свойства операций сложения векторов и умножения их на числа. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и чисел λ, $\mu \in \mathbb{R}$:

$$1)\, \overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}; \quad 2)\, (\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}); \quad 3)\, \overline{a}+\overline{0}=\overline{a}; \quad 4)\, \overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0};$$

$$5)\, \lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}; \quad 6)\, (\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}; \quad 7)\, (\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a}); \quad 8)\, 1\overline{a}=\overline{a}.$$

Благодаря свойствам 1) и 2) можно складывать любое количество векторов в произвольном порядке.

Правило многоугольника сложения нескольких векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$: от произвольной точки A_0 отложим первый вектор $\overline{a}_1 = \overline{A_0A_1}$ от конца первого вектора A_1 отложим второй вектор $\overline{a}_2 = \overline{A_1A_2}$, и т.д., и от конца A_{n-1} предпоследнего вектора отложим последний вектор $\overline{a}_n = \overline{A_{n-1}A_n}$. Тогда $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n = \overline{A_0A_n}$ (см. рис. ?).

Совокупность векторов называется *коллинеарной*, если все они параллельны некоторой прямой. Совокупность векторов называется *компланарной*, если все они параллельны некоторой плоскости.

Возьмем кончную систему векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$ и n чисел λ_1, λ_2,..., $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Вектор $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$ называется *линейной комбинацией* данных векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$. Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа λ_1, λ_2,..., λ_n, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$. Если же последнее равенство выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$ называются *линейно независимыми*.

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. Четыре или более геометрических вектора всегда линейно зависимы.

Упорядоченная система векторов плоскости (пространства) называется *базисом*, если эти векторы, во-первых, линейно независимы, а, во-вторых, через них можно выразить любой вектор плоскости (пространства). Коэффициенты разложения вектора по базису определенны однозначно, они называются *координатами* вектора в данном базисе. На плоскости базис образуют любые два неколлинеарных вектора, а в пространстве базис образуют любые три некомпланарных вектора.

Вектор называется *единичным* или *ортом*, если его длина равна единице. Вектор $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ называют ортом вектора $\overline{a}$. Базис, состоящий из трех единичных попарно перпендикулярных векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$, называется *ортонормированным*. Обычно вектор $\overline{i}$ соответствует оси Ox, вектор $\overline{j}$ соответствует оси Oy, а вектор $\overline{k}$ соответствует оси Oz. Координаты вектора в заданном базисе мы будем указывать в круглых скобках, а именно, запись $\overline{a} = (x; y; z)$ означает, что $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. При сложении векторов и умножении их на числа с их координатами выполняются те же самые операции.

Пусть некоторая точка O принята за начало отсчета. *Радиусом-вектором* точки M называется вектор $\overline{OM}$.

Декартова система координат на плоскости (в пространстве) состоит из точки O (начала отсчета) и базиса в этой плоскости (пространства). *Числовой осью* (или *координатной прямой*) называется прямая, на которой задано начало отсчета, направление и масштаб. Каждой точке M координатной прямой однозначно соответствует некоторое число $\mu \in \mathbb{R}$ и наоборот. Координатные прямые с началом отсчета в точке O, сонаправленные соответствующим базисным векторам $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ называются *координатными осями* Ox, Oy и Oz, а также осями *абсцисс*, *ординат* и *аппликат* соответственно.

Координатами точки M в декартовой системе координат называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}\}$, т.е. запись $M(x; y; z)$ означает, что $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} +$

$z\bar{k}$. Если базис $\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ ортонормированнный, то соответствующая декартовая система координат называется *прямоугольной*. Далее, по умолчанию, система координат всегда прямоугольная.

Если точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Расстояние между точками M_1 и M_2 выражается формулой:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x;y;z)$, точек $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и числом λ, задается равенствами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda>0$, и внешним, если $\lambda<0$. При $\lambda=1$ точка M будет серединной отрезка M_1M_2, $\lambda\neq-1$.

1.2 Задачи

1. Дан треугольник ABC. Построить векторы: a) $\overline{AB}+\overline{CB}$; b) $\overline{AB}-\overline{BC}$; c) $2\overline{AB}-3\overline{AC}$; d) $\frac{1}{2}\overline{AC}+2\overline{BC}$; e) $\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BC}$.

2. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – произвольные векторы. Доказать, что векторы $\bar{p}=2\bar{a}-3\bar{b}-2\bar{c}$, $\bar{q}=\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}$, и $\bar{r}=\bar{a}+9\bar{b}-\bar{c}$ компланарны.

3. С помощью векторной алгебры доказать следующие теоремы планиметрии: а) свойство средней линии треугольника; б) свойство средней линии трапеции; в) теорему о пересечении медиан треугольника.

4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, $\overline{AB}=\bar{p}$, $\overline{BC}=\bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы: a) $\overline{CD}$; b) $\overline{CE}$; c) $\overline{FD}$; d) $\overline{AE}$; e) $\overline{AD}$; f) $\overline{BE}$.

5. С помощью векторной алгебры доказать, что если M – произвольная точка внутри треугольника ABC и прямые AM, BM и CM пересекают стороны этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, то

$$a)\ \frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1\quad(\textbf{теорема Чевы});\quad b)\ \frac{A_1M}{AA_1}+\frac{B_1M}{BB_1}+\frac{C_1M}{CC_1}=1.$$

6. Доказать с помощью векторной алгебры **теорему Менелая**: если некоторая прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках C_1 и B_1 соответственно, а продолжение стороны BC – в точке A_1, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

7. На окружности с центром в точке O берутся три точки A, B, C. Доказать, что ΔABC будет равносторoним тогда и только тогда, когда $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.

8. ΔABC вписан в окружность с центром в точке O. Доказать, что ΔABC является равностороним тогда и только тогда, когда $\overline{AB}+\overline{AC}=3\overline{AO}$.

9. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$. Точки P и K – середины ребер SD и BC соответственно. Найдите разложение векторов $\overline{SD}$ и $\overline{PK}$ по векторам $\overline{SA}=\bar{a}$, $\overline{SB}=\bar{b}$, $\overline{SC}=\bar{c}$.

10. Пусть M – точка пересечения медиан ΔABC, S – произвольная точка пространства. Найдите разложение вектора $\overline{SM}$ по векторам $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$.
11. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3;-5;8)$ и $M_2(7;13;-6)$. Найти координаты центра масс стержня.
12. Даны вершины $A(3;2;-5)$, $B(1;-4;3)$ и $C(-3;0;1)$ треугольника. Найти середины его сторон.
13. Даны вершины $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$, $C(-5;0;2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
14. Даны три вершины $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-4)$ и $C(-1;1;2)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D.
15. Отрезок прямой, ограниченный точками $A(-1;8;3)$ и $B(9;-7;-2)$, разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.
16. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ разделен на три равные части.
17. Даны вершины $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$ треугольника. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

1.3 Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением *$\overline{a}\cdot\overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и косинуса угла между ними.*

Итак, по определению:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right).$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b} \le |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$; 2) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$; 3) $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2 \Longrightarrow |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$; 4) $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot pr_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}$;

5) $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$; 6) если $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, и $\overline{a}\ne\overline{0}, \overline{b}\ne\overline{0}$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$; 7) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Физический смысл скалярного произведения. Работа A, совершаемая силой $\overline{F}$ на перемещение $\overline{S}$, равна скалярному произведению этих векторов: $A = \overline{F}\cdot\overline{S}$.

Если $\overline{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\overline{b} = (x_2;y_2;z_2)$, то в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad |\overline{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \quad |\overline{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует вектор $\overline{a} = (x_1;y_1;z_1)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (или, что то же самое, с векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$). Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{i}}{|\overline{a}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\overline{a}\cdot\overline{j}}{|\overline{a}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{a}\cdot\overline{k}}{|\overline{a}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора $\overline{a}$.*

1.4 Задачи

1. Даны три вектора $\overline{p} = (3; -2; 1)$, $\overline{q} = (-1; 1; -2)$, $\overline{r} = (2; 1; -3)$. Найти разложение вектора $\overline{c} = (11; -6; 5)$ по базису $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

3. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

4. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

5. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = (6; -8; -7,5)$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|x| = 50$, найти его координаты.

6. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = 18\overline{i} - 22\overline{j} - 5\overline{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|x| = 14$.

7. Найти проекцию вектора $\overline{s} = (4; -3; 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

8. Найти проекцию вектора $\overline{s} = (\sqrt{2}; -3; -5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oz углы $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$, а с осью Oy – острый угол β.

9. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (5; 2; 5)$ на ось вектора $\overline{b} = (2; -1; 2)$.

10. С помощью скалярного произведения доказать следующие теоремы планиметрии:
а) **теорему косинусов**: квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.
б) **тождество параллелограмма:** сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон.

11. В тетраэдре $ABCD$ известны длины всех ребер: $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$, $AD = 8$, $BD = 9$ и $CD = 10$. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

12. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 5$, $AD = 8$ и угол $\angle BAD = 60°$. Точки E и F расположены на диагоналях AC и BD и делят их в отношении $AE : EC = 3 : 1$, $BF : FD = 1 : 2$. Найти длину отрезка EF.

13. Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ. Доказать, что
$1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

14. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот или их продолжений) треугольника, вписанного в окружность с центром в точке O. Доказать, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

15. Около треугольника ABC описана окружность радиуса R, H – точка пересечения его высот. Доказать, что $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.

16. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Доказать, что
$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HC} \cdot \overline{HA}$.

17. Доказать, что точка M пересечения медиан треугольника лежит на отрезке, соединяющим центр описанной окружности O и ортоцентр H, и делит этот отрезок в отношении $OM : MH = 1 : 2$.

18. Пусть O – центр окружности радиуса R, описанной около треугольника, стороны которого равны a, b, c, H – его ортоцентр, M – точка пересечения медиан. Доказать, что: $a)$ $OH^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$; $b)$ $a^2 + b^2 + c^2 = 9\left(R^2 - OM^2\right)$.

19. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка. Доказать формулу Лейбница:

$$OM^2 = \frac{1}{3}\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right) - \frac{1}{9}\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right).$$

20. Пусть M – середина отрезка, соединяющего середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$, O – произвольная точка. Доказать, что сумма квадратов всех ребер тетраэдра равна $4 \cdot (OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) - 16 \cdot OM^2$.
21. Найти вектор $\overline{r}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\overline{p} = (4; -7; -4)$ и $\overline{q} = (-1; 2; 2)$, если $|\overline{r}| = 4\sqrt{6}$.
22. При каком значении λ векторы $\overline{a} = (1; 2; \lambda)$ и $\overline{b} = (-1; 1; 4)$: а) ортогональны; б) образуют угол $45°$?
23. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 1$ и $\left(2\overline{a} - \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} + 3\overline{b}\right)^2 = 28$.
24. Доказать, что сумма квадратов медиан любого треугольника составляет $3/4$ от суммы квадратов его сторон.
25. Найти $\left|5\overline{a} + 3\overline{b}\right|$, если $|\overline{a}| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, и $\left|3\overline{a} - \overline{b}\right| = 5$.
26. Найти угол при вершине A треугольника ABC, если сторона AB в полтора раза больше стороны AC, а медианы, проведенные к этим сторонам перпендикулярны.
27. Найти косинус угла, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как $2 : 3$.
28. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы имели место соотношения: a) $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = \left|\overline{a} + \overline{b}\right|$; b) $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| < \left|\overline{a} + \overline{b}\right|$; c) $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| > \left|\overline{a} + \overline{b}\right|$?
29. Центр окружности на плоскости совпадает с точкой пересечения медиан треугольника, лежащего в этой плоскости. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин треугольника постоянна.
30. Центр окружности на плоскости совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма, лежащего в этой плоскости. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин параллелограмма постоянна.
31. На плоскости даны треугольник ABC и точка O. Чем для треугольника ABC является точка O, если: a) $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OC}\right|$; b) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$; c) $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OC} \cdot \overline{OA}$; d) $\left|\overline{AB}\right| \cdot \overline{OC} + \left|\overline{BC}\right| \cdot \overline{OA} + \left|\overline{AC}\right| \cdot \overline{OB} = \overline{0}$?
32. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 3$, $BC = 5$. На диагоналях AC и BD выбраны точки E и F так, что $AE : EC = 3 : 1$, $BF : FD = 2 : 1$, а прямые AF и DE перпендикулярны. Найти косинус угла BAD.
33. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $AC = 12$. Точка K – середина медианы BD, а точка M делит медиану CE в отношении $CM : ME = 1 : 2$. Расстояние между точками M и K равно 4. Найти угол BAC.
34. Доказать, что для любых четырех точек в пространстве A, B, C и D выполняется равенство $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.
35. Около треугольника ABC описана окружность. Прямая, содержащая медиану CK треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что

$$AC^2 + BC^2 = 2 \cdot CK \cdot CD.$$

36. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу. Прямая, проходящая через вершину D и точку M – точку пересечения медиан грани ABC – пересекает сферу вторично в точке E. Доказать, что

$$AD^2 + BD^2 + CD^2 = 3 \cdot DM \cdot DE.$$

37. Найти длины диагоналей параллелепипеда, зная длины трех его ребер, выходящих из одной вершины, и углы между ними.

1.5 Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением *вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\overline{a}\times\overline{b}$ и определяемый следующими тремя условиями:*
1) модуль вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ равен $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
2) вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
3) направление вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ соответствует "правилу правой руки". Это означает, что если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a}\times\overline{b}$ приведены к общему началу, то вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (т.е. по вектору $\overline{a}$), а указательный – по второму (т.е. по вектору $\overline{b}$).

Свойства векторного произведения:
1) Векторное произведение не коммутативно: $\overline{a}\times\overline{b}=-(\overline{b}\times\overline{a})$;
2) $(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\lambda\,\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times(\lambda\overline{b})$;
3) $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$;
4) Модуль векторного произведения $\overline{a}\times\overline{b}$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$|\overline{a}\times\overline{b}|=S.$$

5) Векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. В частности $\overline{a}\times\overline{a}=0$.
6) Если система координатных осей правая (соответствует "правилу правой руки") и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в этой системе своими координатами:

$$\overline{a}=(x_1;y_1;z_1),\quad \overline{b}=(x_2;y_2;z_2),$$

то векторное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ определяется формулой

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Векторное и скалярное произведения двух векторов связаны определителем Грама:

$$\Gamma\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\begin{vmatrix}\overline{a}^{\,2} & \overline{a}\,\overline{b}\\ \overline{a}\,\overline{b} & \overline{b}^{\,2}\end{vmatrix}=(\overline{a}\times\overline{b})^2.$$

Механические приложения векторного произведения.
а) **Вращательное движение.** В механике угловая скорость – это вектор, длина которого равна величине угловой скорости, а направление совпадает с осью вращения. При вращательном движении твердого тела с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку отсчета O, произвольная точка A этого тела будет иметь линейную скорость $\overline{\nu}$, связанную с угловой скоростью соотношением: $\overline{\nu}=\overline{\omega}\times\overline{OA}$.
б) **Момент силы.** Если к точке A приложить силу $\overline{F}$, то векторный момент $\overline{M}$ этой силы относительно точки отсчета O равен $\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}$.

1.6 Задачи

1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $2\pi/3$. Зная, что $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, вычислить:
1) $(\overline{a}\times\overline{b})^2$;   2) $[(2\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}+2\overline{b})]^2$;   3) $[(\overline{a}+3\overline{b})\times(3\overline{a}-\overline{b})]^2$.
2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$

были коллинеарны?

3. Даны векторы $\overline{a} = (3; -1; -2)$ и $\overline{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\overline{a} \times \overline{b}$; 2) $(2\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{b}$; 3) $(2\overline{a} - \overline{b}) \times (2\overline{a} + \overline{b})$.

4. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$; 2) $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

5. Сила $\overline{f} = (3; 2; -4)$ приложена к точке $A(2; -1; 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат.

6. Даны три силы $\overline{f}_1 = (2; -1; -3)$, $\overline{f}_2 = (3; 2; -1)$ и $\overline{f}_3 = (-4; 1; 3)$, приложенные к точке $C(-1; 4; -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2; 3; -1)$.

7. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ и $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь ΔABC.

8. Даны вершины ΔABC: $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ и $C(1; 3; -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

9. Вычислить синус угла, образованного векторами $\overline{a} = (2; -2; 1)$ и $\overline{b} = (2; 3; 6)$.

10. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a} = (4; -2; -3)$ и $\overline{b} = (0; 1; 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\overline{x}| = 26$, найти его координаты.

11. Вектор $\overline{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\overline{a} = (8; -15; 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\overline{m}| = 51$, найти его координаты.

12. Доказать, что для произвольного ΔABC, справедливы равенства: $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{BA} = \overline{CA} \times \overline{CB}$. Из последних равенств вывести теорему синусов.

13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$ и $\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$, если $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, а $(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \pi/6$.

14. Вычислить координаты вращающего момента $\overline{M}$ силы $\overline{F} = (3; 2; 1)$, приложенной к точке $A(-1; 2; 4)$, относительно начала координат.

15. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости ABC, где $A(4; 7; -2)$, $B(-1; 3; 2)$ и $C(3; 4; 2)$.

16. При каких отрицательных значениях λ площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (1; 1; 2)$ и $\overline{b} = (\lambda; 1; 3)$, равна $\sqrt{59}$?

17. Выразить формулой площадь треугольника ABC на плоскости через координаты его вершин: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

1.7 Смешанное произведение трех векторов

Тройкой векторов называются три вектора, если указано, какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим. Тройку векторов записывают в порядке нумерации; например, запись $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ означает, что вектор $\overline{a}$ считается первым, $\overline{b}$ – вторым, $\overline{c}$ – третьим.

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется *правой* (*левой*), если составляющие ее векторы, будучи приведены к общему началу, располагаются в порядке нумерации аналогично тому, как расположены большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число, равное векторному произведению $\overline{a} \times \overline{b}$, умноженному скалярно на вектор $\overline{c}$, т.е. $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Для обозначения смешанного произведения $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ употребляется символ: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Свойства смешанного произведения трех векторов:

1) Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ некомпланарны, то модуль смешанного произведения $|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны, то $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$. Последнее равенство есть необходимое и достаточное условие

компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.
2) Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы своими координатами:

$$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1), \quad \overline{b} = (x_2; y_2; z_2), \quad \overline{c} = (x_3; y_3; z_3),$$

то смешанное произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ определяется формулой

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное и скалярное произведения трех векторов связаны определителем Грама:

$$\Gamma\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} \overline{a}^{\,2} & \overline{a}\,\overline{b} & \overline{a}\,\overline{c} \\ \overline{b}\,\overline{a} & \overline{b}^{\,2} & \overline{b}\,\overline{c} \\ \overline{c}\,\overline{a} & \overline{c}\,\overline{b} & \overline{c}^{\,2} \end{vmatrix} = (\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})^2.$$

1.8 Задачи

1. Доказать тождество $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}+\overline{c})(\overline{c}+\overline{a}) = 2\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.
2. Доказать тождество $\overline{a}\overline{b}(\overline{c}+\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$, где λ и μ – какие угодно числа.
3. Даны три вектора: $\overline{a} = (1; -1; 3)$, $\overline{b} = (-2; 2; 1)$, $\overline{c} = (3; -2; 5)$. Вычислить $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.
4. Установить, компланарны ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, если:
1) $\overline{a} = (2; 3; -1)$, $\overline{b} = (1; -1; 3)$, $\overline{c} = (1; 9; -11)$;
2) $\overline{a} = (3; -2; 1)$, $\overline{b} = (2; 1; 2)$, $\overline{c} = (3; -1; -2)$;
3) $\overline{a} = (2; -1; 2)$, $\overline{b} = (1; 2; -3)$, $\overline{c} = (3; -4; 7)$.
5. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.
6. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.
7. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.
8. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.
9. Доказать, что векторы $n\overline{c} - p\,\overline{b}$, $p\,\overline{a} - m\,\overline{c}$, $m\,\overline{b} - n\,\overline{a}$ компланарны.
10. При каких положительных значениях α точки $A(3; 0; \alpha)$, $B(\alpha; 1; 8)$, $C(2; 4; 3)$ и $D(4; 5; 6)$ лежат в одной плоскости?

1.9 Формула двойного векторного произведения

Для любых трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедлива формула

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\,\overline{c}.$$

Эту формулу иногда записывают в виде $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{b}\,(\overline{a}\cdot\overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a}\cdot\overline{b})$ и шутливо называют **формулой БАЦ - ЦАБ**.

1.10 Разные задачи

1. В тетраэдре $ABCD$ известны координаты его вершин: $A(-1;1;2)$, $B(0;2;3)$, $C(1;4;2)$, $D(-3;4;1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площадь грани BCD; в) высоту, опущенную на грань BCD; г) угол между прямой BC и плоскостью ABD; д) расстояние между прямыми AC и BD.
2. Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, известно, что $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \lambda$. Вычислить смешанное произведение $\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}$, где $\overline{p} = 4\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{q} = 2\overline{a} - 7\overline{c}$, $\overline{r} = 3\overline{b} + 5\overline{c}$.
3. Найти угол между ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = k\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$, где $k \in \mathbb{R}$.
4. Доказать тождество $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)^2 = \overline{a}^{\,2}\,\overline{b}^{\,2}$.
5. Упростить выражение: $\overline{i} \times \left(2\overline{j} + 3\overline{k}\right) - \overline{j} \times \left(4\overline{i} - 5\overline{k}\right) + \left(\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}\right) \times \overline{k}$.
6. Найти значение выражения $4\overline{i}\,\overline{j}\,\overline{k} - 2\overline{j}\,\overline{i}\,\overline{k} + 3\overline{i}\,\overline{k}\,\overline{i} + 7\overline{k}\,\overline{i}\,\overline{j} + \overline{j}\,\overline{k}\,\overline{i} - 8\overline{k}\,\overline{j}\,\overline{i} - 13\overline{k}\,\overline{k}\,\overline{j} + 9\overline{i}\,\overline{k}\,\overline{j}$.
7. В ромбе $ABCD$ известны координаты вершин $A(-4;5;4)$, $B(-3;11;3)$, вершина C лежит в плоскости YOZ, а вершина D – в плоскости XOZ. Найти координаты вершин C и D и площадь ромба.
8. В квадрате $ABCD$ известны координаты вершин $A(7;1;8)$, $B(5;-2;2)$, вершина C лежит в плоскости XOY. Найти координаты вершин C и D и площадь квадрата.
9. В трапеции $ABCD$, в которой AD – большее основание, известны координаты вершин $A(-1;2;11)$, $B(3;5;4)$ и точки пересечения диагоналей $E(9;7;-4)$. Найти координаты вершин C и D, если площадь трапеции равна $49\sqrt{3}/2$.
10. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин $A(1;8;2)$, $B(4;3;-5)$, вершина C лежит в плоскости XOZ, а вершина D – на оси OY. Найти координаты вершин C и D и площадь параллелограмма.
11. В тетраэдре $ABCD$ известны длины ребер, выходящих из одной вершины A и углы между ними: $AC = 3$, $AB = 5$, $AD = 6$, $\angle CAD = 60°$, $\angle CAB = \arccos\frac{1}{5}$, $\angle BAD = 120°$. Найти: а) объем тетраэдра $ABCD$; б) площадь грани BCD; в) расстояние от вершины A до плоскости BCD; г) расстояние между прямыми AD и BC.
12. Даны векторы $\overline{a} = (1;\lambda;1)$, $\overline{b} = (\lambda;-1;3)$ и $\overline{c} = (5;0;7)$. При каких значениях λ эти векторы: а) компланарны; б) образуют правую тройку; в) образуют левую тройку.
13. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \lambda\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = 3\overline{m} - 4\overline{n}$, равна 18. Найти значение λ, если $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 4$, $(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = 5\pi/6$.
14. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 4, его вершины имеют координаты $A(3;1;2)$, $B(-1;4;1)$, $C(2;1;5)$ и $D(2;\lambda;0)$. Найти значение λ.
15. Найти сумму всех значений α, при которых объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (3;-1;1)$, $\overline{b} = (\alpha;5;3)$ и $\overline{c} = (1;4;\alpha)$, равен 2.
16. Найти значения λ, если известно, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ не компланарны и $(\overline{a} + \lambda\overline{b})(\overline{b} + \lambda\overline{c})(\overline{c} + \lambda\overline{a}) = 7\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$.
17. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{AK}$, $\overline{BM}$ и $\overline{CN}$, где $K \in BD$, $M \in CD$, $N \in AD$ и $DK : DB = \alpha$, $DM : DC = \beta$, $DN : DA = \gamma$.

1.11 Задачи для чемпионов

1. Числа a, b, c, d, удовлетворяют условиям $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доказать, что $|ac - bd| \leq 1$.
2. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

3. Для положительных чисел a, b, c доказать неравенство

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^3.$$

4. Доказать, что для любых x, y, z выполняется неравенство

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leq 1.$$

5. Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $2x+y-z$.
6. Дано восемь действительных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.
7. Доказать неравенство $\cos A+\cos B+\cos C \leq \dfrac{3}{2}$ где A, B, C – углы треугольника.
8. Доказать, что если A, B, C – углы треугольника, то $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$.
9. Доказать, что если $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ – медианы ΔABC, то $\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CP}=\overline{0}$.
10. Доказать, что если M – точка пересечения медиан ΔABC, то $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$.
11. Определить вид ΔABC, если:

$$a)\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AC}^2; \quad b)\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}^2=0; \quad c)\ \overline{AC}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{BC}=0.$$

12. Известно, что $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=2$ и $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. 1) Доказать, что среди векторов нет ни одной пары коллинеарных; 2) Вычислить $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}$.
13. Средствами векторной алгебры доказать неравенства:
1) $|ma+nb+c| \leq \sqrt{2}$, если $m^2+n^2=a^2+b^2+c^2=1$;
2) $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$;
3) $\cos\alpha\sin\gamma+\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\sin\beta \leq \sqrt{2}$, где α, β и γ – направляющие углы некоторого вектора. Выяснить, когда выполняется знак равенства.
14. Вычислить $ab+cd$, если $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$.
15. Числа x, y, z таковы, что $x^2+4y^2+z^2=3$. Какие значения может принимать $x+2y+z$?
16. Найти x, y, z из:
1) уравнения $\sqrt{3(x+y+z)}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{x}$;
2) системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha+\sqrt{z}=\sqrt{2(x+y+z)}, \\ 5(x+y)+4\sqrt{z}=1, \text{где } \alpha\in(0,\pi/2). \end{cases}$$

17. Даны три попарно перпендикулярных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и некоторый вектор $\overline{x}$. Доказать, что $\cos(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{x})+\cos(\overline{b}\,\widehat{,}\,\overline{x})+\cos(\overline{c}\,\widehat{,}\,\overline{x}) > -2$. Может ли выполняться знак равенства?
18. Какой наименьший угол могут образовывать векторы:
1) $\overline{a}(1-5x;1;3)$ и $\overline{b}(-1;1+4x;3-3x)$; 2) $\overline{a}(1;-x;2)$ и $\overline{b}(x;1;1)$?
19. Какой наибольший угол могут образовывать векторы:
1) $\overline{a}(-1;x;-2)$ и $\overline{b}(x;1;1)$; 2) $\overline{a}(y;-x;2)$ и $\overline{b}(x;y;-1)$?
20. Найти угол между непересекающимися диагональю куба и диагональю грани.
21. Найти отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон.
22. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8. Найти наименьшее значение суммы квадратов длин его сторон.

23. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти угол при основании этого треугольника.
24. Дан правильный треугольник со стороной $a = 1$. Найти величину
$m = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$.
25. В ΔABC даны длины сторон: $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Найти $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.
26. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направлены по диагоналям граней куба, выходящим из этой вершины. Найти величину равнодействующей этих сил и углы образуемые с составляющими силами.
27. Векторы $\overline{AB}(4; 2; -1)$ и $\overline{AC}(2; -2; 0)$ совпадают со сторонами ΔABC. Определить координаты и длину вектора $\overline{BD}$, совпадающего с высотой ΔABC.
28. Векторы $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{b}$ совпадают со сторонами ΔABC. Найти разложение векторов: 1) $\overline{BD}$ (высоты); 2) $\overline{AM}$ (биссектрисы) по базису $\overline{b}$, $\overline{c}$.
29. Даны катеты a и b прямоугольного треугольника. Найти косинус угла между биссектрисами острого и прямого углов.
30. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3; 2)$ и $C(5; -4)$. Найти две другие его вершины B и D.
31. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3; 2)$ и $C(2; 4)$. Найти две другие его вершины B и D.
32. В ΔABC длины сторон связаны соотношением $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 5\overline{AB}^2$. Доказать, что медианы, проведенные к сторонам AC и BC, перпендикулярны. Доказать и обратное утверждение.
33. В ΔABC медианы AM и BN перпендикулярны. Доказать, что $\cos\angle C \geq 4/5$.
34. В равнобедренном ΔABC ($AB = AC$) отрезки AA_1, BB_1, CC_1, совпадают с его высотами и выполняется равенство: $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$. Найти угол при вершине A.
35. Доказать, что ΔABC будет правильным тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$, где AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы ΔABC.
36. Точка O – центр окружности, описанной около ΔABC. Доказать, что

$$\overline{OA} \cdot \sin 2\angle A + \overline{OB} \cdot \sin 2\angle B + \overline{OC} \cdot \sin 2\angle C = \overline{0}.$$

37. Пусть O – центр окружности, вписанной в ΔABC. Доказать, что существуют числа α, β и γ такие, что $\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{OC} = \overline{0}$. Найти α, β и γ.
38. В единичный квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Найти длину вектора
$\overline{m} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$, где M – произвольная точка окружности.
39. Равнобочная трапеция $ABCD$ ($AB \| CD$) вписана в окружность радиуса 1. Известно, что центр окружности лежит на средней линии трапеции. Найти длину вектора
$\overline{m} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$, где M – произвольная точка окружности.
40. Доказать, что в правильной треугольной пирамиде непересекающиеся ребра взаимно перпендикулярны.
41. Пусть D – вершина, а ΔABC – основание пирамиды $DABC$. Доказать, что $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ тогда и только тогда, когда $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.
42. В пирамиде $SABC$, $AS = a$, $BC = b$, $(\overline{AS} \widehat{,} \overline{BC}) = \varphi$. Найти расстояние между серединами ребер AB и CS.
43. Даны вершины $A(-4; -1; 2)$ и $B(3; 5; -16)$ ΔABC. Найти площадь S треугольника, если известно, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина BC – на плоскости xOz.
44. В ΔABC медианы AM и BN имеют длины 6 и 4 соответственно. Доказать, что если площадь ΔABC $S = 16$ то $AM \perp BN$, а если $S = 8$, то угол между медианами равен $\pi/6$.

45. Заданы длины n и m двух медиан треугольника. При каком угле между медианами площадь треугольника будет наибольшей? Найти эту площадь.
46. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – соответственно середины сторон BC и CD, причем $AM = 6$, $AN = 8$. При каком $\alpha = (\overline{AM}\widehat{,}\overline{AN})$ площадь S параллелограмма будет наибольшей? Найти стороны такого параллелограмма.
47. Имеет ли решение система неравенств: $x_i x_k + y_i y_k$, $i, k = \overline{1, 4}$, $i \neq k$?
48. Доказать, что сумма площадей любых трех граней тетраэдра больше площади четвертой грани.
49. Пусть l_1, l_2, l_3 и m_1, m_2, m_3 – направляющие косинусы двух лучей, а φ – угол между лучами. Доказать, что

$$\sin^2 \varphi = (l_1 m_2 - m_1 l_2)^2 + (l_2 m_3 - m_2 l_3)^2 + (l_3 m_1 - m_3 l_1)^2.$$

50. Доказать, что для любых a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$

$$(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2).$$

51. В тетраэдре $OABC$ известны длины боковых ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Плоские углы при вершине α. Найти вектор $\overline{OH}$ – высоту, опущенную из вершины O на плоскость ΔABC. Рассмотреть случаи: 1) $\alpha = \pi/2$; 2) $\alpha \neq \pi/2$.
52. Найти объем треугольной пирамиды, если известны ее боковые ребра и плоские углы при вершине.
53. Три вектора составляют между собой углы α, β, γ. Доказать, что для их компланарности необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

54. Найти площадь основания тетраэдра, у которого боковые ребра l, а плоские углы при вершине α, β, γ.
55. Боковые ребра тетраэдра совпадают с векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, плоские углы при вершине α, β, γ. Как должны быть связаны α, β, γ, чтобы двугранный угол при ребре $\overline{a}$ был равен $\pi/2$?
56. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (эта точка называется *центроидом* тетраэдра).
57. Доказать, что сумма квадратов всех шести ребер тетраэдра равна $16(R^2 - \rho^2)$, где R – радиус описанной сферы, а ρ – расстояние от центра этой сферы до центроида тетраэдра.

2 Дифференцирование и интрегрирование функций двух переменных

Список литературы

[1] Постников М.М., *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.* Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., перераб. и доп. – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 416 с.

[2] Соболев С.К., Томашпольский В.Я. *Векторная алгебра. Методические указания к решению задач по курсу Аналитическая геометрия (электронное учебное издание).* – М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 69 с.

[3] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия.* Учеб. пособие для студентов I курса физ.-мат. фак-тов пед. ин.-тов, М. Просвещение, 1974. – 351 с.

[4] Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. *Сборник индивидуальных заданий по высшей математике.* В трех частях. Часть 1, Минск, Вышэйшая школа, 1990. – 271 с.

[5] Шестаков С.А. *Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии.* Москва, Издательство МЦНМО, 2005. – 113 с.

[6] Simionescu G., Ştefănescu V. *Aplicaţii ale calculului vectorial în geometrie şi trigonometrie.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975, 192 p.

[7] Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии.* – 13-е изд., – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 243 с.

[8] Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. *Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. Методические рекомендации.* Агрофирма Александрия, Киев, 1993. – 60 с.

[9] Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. *Задачи студенческих математических олимпиад.* Феникс, Ростов-на-Дону, 2008. – 172 с.