UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Частные производные. Полный дифференциал.

Частные производные.

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая нет. Дадим переменной x приращение Δx; сохраняя y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением z по x* и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z задается равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частную производную по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символом $f'_x(x_0; y_0)$.

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y},$$

При нахождении частной производной по какой либо переменной пользуются формулами и правилами дифференцирования функции одной переменной, считая другую переменную фиксированной, постоянной.

Пример. Найти частные производные функции $z = x^2 + 5xy - y^4 + 3$.

Геометрический смысл частных производных.

Графиком функции $z = f(x; y)$ является некоторая поверхность. График функции $z = f(x; y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f(x; y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$. Аналогично, $f'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где β – угол между осью Oy и касательной, проведенной к кривой $z = f(x_0; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x; y)$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y);$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*. Таковыми являются, например,

$$z''_{xy},\quad z'''_{xyx},\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2},\quad \frac{\partial^5 z}{\partial x^3\partial y^2}.$$

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^2 - 4xy^2 + y^4 + 5$.

Пример. Найти частные производные z'''_{xyx}, z'''_{xxy} и z'''_{yxx} функции $z = x^3 - x^2y^3 + y^2 + 2$.

Теорема Шварца. *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

В частности, для $z = f(x; y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется *дифференцируемой* в т. $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Выражение $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ называется *главной частью приращения функции, или ее полным дифференциалом*.

Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции). Если $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x; y)$, то она дифференцируема в этой точке.

Таким образом, функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных.

Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*.

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

Так как $\Delta z = \Delta f(x;y)$, равенство $\Delta z \approx dz$ можно переписать в следующем виде:

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.$$

Данной формулой пользуются при приближенных вычислениях.

Пример. Вычислить приближенно

$$\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$$

Дифференциалом n-го порядка функции $z = f(x,y)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ - го порядка, т.е.

$$d^n z = d\left(d^{n-1}z\right).$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = z''_{x^2}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{y^2}\,dy^2.$$

Символически это равенство можно записать в виде

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z.$$

По аналогии, дифференциал n-го порядка можно записать символически в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z.$$

Пример. Написать дифференциал второго порядка для следующих функций:

$$a)\; z = \frac{x}{x+y}, \qquad b)\; z = x\,\sin^2 y.$$

Задачи: I. Найти частные производные первого порядка от следующих функций:

$$a)\ z = x^2y^3 + x^3y; \qquad b)\ z = \frac{x+y}{x-y};$$

$$c)\ z = e^{xy}; \qquad d)\ z = x^y; \qquad e)\ z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

II. Написать полные дифференциалы функций:

$$a)\ z = \cos(xy); \qquad b)\ z = \ln(x+y);$$

$$c)\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

III. Дана функция $z = e^x \cos y$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

IV. Дана функция $z = \sqrt{x^2 + y}$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

V. Показать, что функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в начале координат.