Universitatea Tehnica a Moldovei
Facultatea Calculatoare, Informatica ;I Microelectronica
Departamentul Informatica si Ingineria Sistemelor

Disciplina:
Roboti Mobili si Microroboti

Tema 2. Spatii de activitate si transformari spatiale. Sisteme de coordonate. Geometrie analitica.

Titular de curs:
Conf.univ.,dr. V. Ababii
Asistent:
l.asistent, N. Roșca

Subiecte abordate:

- Geometrie analitica.

Geometrie analitica:

Punctul

Punctul poate fi reprezentat printr-un sistem de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

Dreapta

Dreapta poate fi reprezentată printr-o ecuație de gradul întâi cu două necunoscute:

$$ax + by + c = 0.$$

Ecuația dreptei de pantă *m* care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = m(x - x_0), m \in \mathbb{R}$

Ecuația dreptei care trece prin două puncte diferite $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ este $d: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și poate fi scrisă sub forma $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, dacă $y_1 \neq y_0, x_1 \neq x_0$.

Fie dreptele $d: ax + by + c = 0$ și $d': a'x + b'y + c' = 0$.

- Dacă $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, atunci d și d' sunt concurente; dacă $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, atunci $d=d'$; dacă $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, atunci $d \| d'$.
- Distanța de la punctul $M(x_0, y_0)$ la dreapta $d: ax + by + c = 0$ este $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Geometrie analitica:

Formule

- Distanța dintre punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$ este dat de:

$$M \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

- Centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile $P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ P_3(x_3, y_3)$:

$$\mathbf{G} \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$$

Geometrie analitica:

- Suprafața triunghiului $P_1P_2P_3$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}} - \overbrace{a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

Geometrie analitica:

$$\mathrm{d}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Aplicăm definiția dată mai sus pentru $n = 4$ și dezvoltăm determinantul după elementele liniei întâi. Avem:

$$\mathrm{d}=(a_{11})\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(a_{12})\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(a_{13})\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(a_{14})\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Geometrie analitica in spatiu:

Punctul

Punctul este reprezentat prin sistemul:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

Planul

Planul poate fi reprezentat printr-o ecuație de forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Vectorul de poziție cu coordonatele (A, B, C) este perpendicular pe planul Ax+By+Cz+D=0.

Ecuația planului care trece prin punctul (x_0,y_0,z_0) este $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Ecuația planului care trece prin 3 puncte necoliniare $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ este $d : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Condiția de necoliniaritate a trei puncte de coordonate (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) este $d : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Două plane p:Ax+By+Cz+D=0 și $p'=A'x+B'y+C'z+D'=0$ cu $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ sau $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ sau $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ se intersectează după o dreaptă.

Geometrie analitica in spatiu:

Dreapta

Dreapta în spațiu poate fi considerată ca intersecția a două plane:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorul director $\vec{v}(l, m, n)$ sunt $d := \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l \\ y = y_0 + \lambda \cdot m \\ z = z_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dreapta determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorul director $\vec{v}(l, m, n)$ poate fi descrisă prin ecuațiile canonice: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

Fie dreptele d_1 și d_2 date prin ecuațiile canonice $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ și, respectiv, $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$. Unghiul ψ format de dreptele d_1 și d_2 este dat de formula:

$$\cos\psi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Geometrie analitica in spatiu:

Formule

- Distanța dintre două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

- Mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$:

$$M \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

- Centrul de greutate al triunghiului $P_1P_2P_3$ are coordonatele:

$$\text{G} \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{cases}$$

Geometrie analitica in spatiu:

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Fie $d: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ și $P: Ax+By+Cz+D=0$.

1) Dacă $Al+Bm+Cn \neq 0$, d intersectează planul într-un punct.

2) Dacă $Al+Bm+Cn=0$ și $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ atunci $d \| P$.

3) Dacă $Al+Bm+Cn=0$ și $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ atunci $d \subset P$.

Unghiul format de o dreaptă cu un plan

Fie dreapta d dată de ecuațiile: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ și planul P dat de ecuația $Ax+By+Cz+D=0$. Fie ψ unghiul dintre dreapta d și planul P.

Avem $\sin\psi = \dfrac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Geometrie analitica in spatiu:

Cercul *Ecuaţia carteziană a cercului cu centrul în punctul $C(a,b)$ şi de rază R este:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Sfera *Fie punctul fixat în spaţiu $C(a,b,c)$. Atunci ecuaţia sferei cu centrul în C şi de rază R este:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Tema Nr. 2.2