Гамильтоновы пути.

Гамильтоновы пути в ориентированных циклических графах.

Задание 1: В графе $G=(X,U)$, изображенном на рисунке 1, определите гамильтоновы пути.

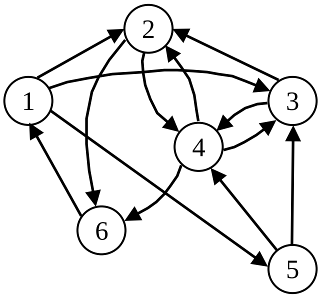

Рис. 1

Решение:

Заданный граф является ориентированным и содержит циклы. Применяем *алгоритм Кауфмана*, который позволяет определить простые пути любой длины в орграфе (циклическом или ациклическом), в частности и гамильтоновы пути (если они существуют):

I. Для заданного графа $G=(X,U)$ составляем латинскую матрицу L следующим образом: в *i*-й строке и *j*-м столбце записываем элемент *ij*, если дуга $(x_i, x_j) \in U$ и 0 – в противном случае (рис. 2):

$L =$

1	2	3	4	5	6	
0	12	13	0	15	0	1
0	0	0	24	0	26	2
0	32	0	34	0	0	3
0	42	43	0	0	46	4
0	0	53	54	0	0	5
61	0	0	0	0	0	6

Рис. 2

II. Для каждого элемента $ij \in L$ удаляем i-й элемент, и в результате получаем модифицированную матрицу L^* (рис. 3):

$L^* =$

1	2	3	4	5	6	
0	2	3	0	5	0	1
0	0	0	4	0	6	2
0	2	0	4	0	0	3
0	2	3	0	0	6	4
0	0	3	4	0	0	5
1	0	0	0	0	0	6

Рис. 3

III. Осуществляем латинское умножение ($l.$) матриц L и L^*. В результате умножения получаем матрицу L^2, элементы которой получены по обычному правилу умножения 2-х матриц, к которому добавляются следующие правила:

1) элементы матрицы L^2 равны 0, если хотя бы один из элементов матриц L и L^* равен 0 или если невозможно составить последовательность из различных цифр;

2) элементами матрицы L^2 являются все последовательности, состоящие из различных цифр, полученные при умножении матриц L и L^*: $L^2 = L(l.)L^*$ (рис. 4):

1	2	3	4	5	6	
0	132	153	124,134,154	0	126	1
261	0	243	0	0	246	2
0	342	0	324	0	326,346	3
461	432	0	0	0	426	4
0	532,542	543	534	0	546	5
0	612	613	0	615	0	6

Рис.4

Элементы матрицы L^2 представляют собой простые пути длины 2.

IV. $L^3 = L^2(l.)L^*$ (рис. 5):

1	2	3	4	5	6	
0	1532 1342 1542	1243 1543	1324 1534	0	1326,1246 1346,1546	1
2461	0	2613	0	2615	0	2
3261 3461	0	0	0	0	3426 3246	3
4261	4612	4613	0	4615	4326	4
5461	5432 5342	0	5324	0	5326 5426 5346	5
0	6132	6153	6124 6134 6154	0	0	6

Рис.5

Элементы матрицы L^3 представляют собой простые пути длины 3.

V. $L^4 = L^3(l.)L^*$ (рис. 6):

1	2	3	4	5	6	
0	15432 15342	0	15324	0	15326,13426 15426,13246 15346	1
0	0	24613 26153	26134 26154	24615	0	2
34261 32461	34612	0	0	32615 34615	0	3
43261	46132	42613 46153	0	42615	0	4
53261 54261 53461	54612	54613	0	0	54326 53426 53246	5
0	61532 61342 61542	61243 61543	61324 61534	0	0	6

Рис. 6

Элементы матрицы L^4 представляют собой простые пути длины 4.

VI. $L^5 = L^4(l.)L^*$ (рис. 7):

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	154326 153426 153246	1
0	0	261543 246153	261534	0	0	2
0	0	0	326154	342615 324615	0	3
0	461532	426153	0	432615	0	4
543261 534261 532461	534612 546132	542613	0	0	0	5
0	615432 615342	0	615324	0	0	6

Рис.7

Элементы матрицы L^5 представляют собой простые пути длины 5 и для заданного графа эти пути являются гамильтоновыми путями.