Гамильтоновы пути.

Гамильтоновы пути в ориентированных графах без циклов.

Задание 1: Определите гамильтонов путь (если он есть) графа $G=(X,U)$, изображенного на рисунке 1.

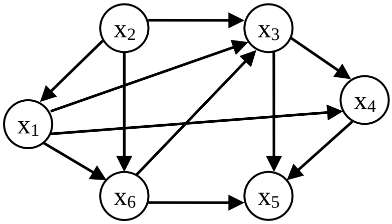

Рис. 1

Решение:

Путь, в котором вершины и дуги не повторяются, называется *простым путем*. Простой путь, содержащий все вершины графа, называется *гамильтоновым путем*.

Теорема Чена: Пусть $G=(X,U)$- орграф без циклов порядка *n*. Для того чтобы в заданном графе существовал гамильтонов путь, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=\frac{n(n-1)}{2},$$

где $p(x_i)$ - степень достижимости вершин.

Граф $G=(X,U)$ является ориентированным и ациклическим. Применяем следующий алгоритм:

I. Строим матрицу смежности заданного графа $A_{n\times n}=\{a_{ij}\}$ (рис. 2):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	0	1	0

Рис. 2

II. Определяем матрицу путей $D_{n\times n} = \{d_{ij}\}$, где

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{(рис. 3)}$$

Этапы построения i_d-й строки матрицы путей:

а) Если i-я строка матрицы смежности содержит элементы $a_{ip}, a_{ir}, ..., a_{iv}$ равные 1, тогда к элементам i-й строки логически прибавляем элементы строк $p, r, ..., v$ и пусть в строке i_d получены новые элементы $d_{i\alpha}, d_{i\beta}, ..., d_{i\lambda}$, равные 1;

б) прибавляем логически элементы строк $\alpha, \beta, ..., \lambda$ матрицы смежности к элементам строки i_d, образовывая или нет элементы, равные 1, в i_d-й строке матрицы путей;

в) повторяем шаги а) и б) для всех строк матрицы смежности и в результате получаем матрицу путей (рис. 4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$P(x_i)$
x_1	0	0	1	1	1	1	4
x_2	1	0	1	1	1	1	5
x_3	0	0	0	1	1	0	2
x_4	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	1	1	0	3

Рис.4

III. *Степенью достижимости* вершины x_i называется количество вершин, которые могут быть достижимы из вершины x_i.

Вычисляем степени достижимости вершин $p(x_i)$. Для этого вычисляем количество ненулевых элементов в строке x_i матрицы путей. Вычисляем сумму степеней достижимости вершин $\sum p(x_i)$: $\sum P(x_i) = 4 + 5 + 2 + 1 + 0 + 3 = 15$.

IV. Сравниваем $\sum P(x_i)$ с $\frac{n(n-1)}{2}$ (n – количество вершин). Если равны, значит в графе $\exists$ гамильтонов путь:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15 = \sum p(x_i) \Rightarrow \exists$$ гамильтонов путь.

V. Записываем последовательность степеней достижимости вершин в убывающем порядке. Эта последовательность и является гамильтоновым путем в заданном графе:

$$x_2 \to x_1 \to x_6 \to x_3 \to x_4 \to x_5$$