UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică şi Microelectronică
Departamentul Informatică şi Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

TEMA 11. MODELAREA GEOMETRICĂ TRIDIMENSIONALĂ

l. u., dr. NASTAS Andrei

CONȚINUT

11.8. Suprafețe neregulate și cavități

Problema cea mai importantă a reprezentării suprafețelor rigide este legată de vizibilitate. Din acest punct de vedere se definesc două nivele de vizibilitate: *completă* și *parțială*.

Când contururile suprafeței sunt complet vizibile, atunci suprafața poate fi reprezentată printr-o imagine convexă, ce reprezintă harta vizibilității suprafeței.

Au fost elaborați algoritmi care furnizează pachete de obiecte predefinite, pentru care vizibilitatea și rigiditatea pot fi determinate independent. Pentru construirea *hărții de vizibilitate* și pentru selectarea perechilor optimale se minimizează suprafețele separate ale obiectului ce trebuie modelat.

În cazul cavităților, suprafețele celor două segmente (plăci) care se intersectează și sunt etanșe când obiectul este întreg, reprezintă *suprafețe de separare*. Perechile de direcții opuse, de-a lungul celor două plăci despărțitoare, reprezintă *direcții de separare*.

Adânciturile sau proeminențele cavității pentru care se realizează reprezentarea împiedică vizionarea lor, direcțiile separate fiind denumite subtăieri. În funcție de tipurile de subtăieri, se cunosc reprezentări geometrice similare cu diferitele dispozitive/instrumente industriale care le utilizează, de exemplu: canelare (degajare, retezare) realizarea proeminențelor folosind presarea miezului de turnare și presarea cavității. Subtăierile interne utilizează modelarea contactelor sau inserțiilor.

Selectarea direcțiilor și a suprafețelor de separare este importantă, deoarece acestea dictează numărul, forma și ordinea cavităților și afectează toți pașii următori ai algoritmului de lucru.

11.8. Suprafețe neregulate și cavități

Deoarece utilizarea măririi cavității este costisitoare, operațiile pentru obținerea sa sunt complicate, iar procesele se realizează cu viteză redusă, recomandările generale prezentate în literatura de specialitate se referă la despărțirea direcțiilor selectate astfel încât numărul cavităților să fie minim.

Totuși, incrementarea acestor algoritmi trebuie făcută cu atenție. În puținele exemple practice relatate în literatură, separarea cavităților este limitată (restrânsă) la plane ce admit ca separarea direcțiilor să se facă de-a lungul a uneia până la trei axe principale sau selectarea pentru un set de direcții generat aleator. Deficiența acestor aproximări este necunoașterea posibilității de separare a tuturor direcțiilor și în plus, dacă există cumva, cunoașterea priorității sale.

Generarea euristică pentru separarea direcțiilor constă în selectarea unor suprafețe normale la suprafața planară față de axele suprafeței cilindrice ale obiectului. Fezabilitatea separării direcțiilor este verificată la căutarea secțiunilor de probă ale obiectului, prin obstrucționarea direcțiilor candidate.

Geometria obiectului este dependentă de perechea aleasă de direcții separate și de numărul de cavități necesare. Problema stabilirii *perechii direcțiilor separate* este de fapt, condiția pentru definirea rigidității cavității.

Suprafața este rigidă de-a lungul direcției dacă toată suprafața nu conține nici o subtăiere. Această condiție este satisfăcută de suprafețele iluminate de raze paralele, dacă suprafața este vizibilă din toate direcțiile.

Se definesc în secțiunea următoare relațiile între rigiditate și vizibilitate. Prin dezvoltarea hărții vizibilității în spațiul Gaussian, problema este transformată la cazul particular al rezolvării acoperirii maxime a poligonului sferic.

11.9. Vizibilitate și rigiditate

Fiind dat un obiect *Ω* și un punct *p* aflat pe conturul obiectului, obiectul *Ω* este *vizibil* în punctul exterior *q*, dacă nici o parte a segmentului de dreaptă *pq* nu este în interior.

Extinzând noțiunea vizibilității punctelor, o suprafață *S* de pe *Ω* este complet vizibilă în punctul exterior *q*, dacă orice punct al suprafeței *S* este vizibil din *q*; suprafața *S* este parțial vizibilă din *q* dacă cel puțin un punct de pe *S* este vizibil în *q* suprafața *S* nu este vizibilă în q dacă nici un punct al suprafeței S nu este vizibil în q.

Vizibilitatea suprafeței din orice direcție poate fi definită direct, printrun proces limitat. Dacă punctul q este mutat departe de S (aproape de infinit), segmentele de dreaptă ce unesc punctele de pe suprafața S și punctul q sunt aproape paralele. În geometria proiectivă, direcția d este un punct situat la infinit și punctele suprafeței S la care ajung razele pe direcția d sunt segmente de dreaptă ce unesc la infinit punctul d și punctele suprafeței. Astfel, suprafața are două nivele de vizibilitate care respectă direcțiile vederii.

Definiția 1 (*vizibilitate completă*): Suprafața *S* a obiectului poligonal *Ω* este vizibilă complet pe direcția de vedere *d* dacă, pentru orice punct *p* al suprafeței *S*, raza ce pornește de la infinit la *p* pe direcția *d* nu intersectează interiorul obiectului *Ω*.

Definiția 2 (*vizibilitate parțială*): Suprafața *S* a obiectului poligonal *Ω* este vizibilă parțial pe direcția de vedere d dacă există cel puțin un punct *p* pe suprafața *S* astfel încât raza de la infinit la *p* pe direcția *d* nu intersectează interiorul obiectului *Ω*.

11.9. Vizibilitate și rigiditate

Dacă suprafața este complet vizibilă pe direcția de vedere, atunci este și parțial vizibilă pe aceeași direcție.

Se desemnează *R* ca fiind setul tuturor razelor ce formează traiectorii ale punctelor de pe *S*. Apoi *S* este mutat spre cavitate cu respectarea condiției ca nici o rază din *R* să nu o intersecteze. Această condiție pentru rigiditate a suprafeței *S* de-a lungul direcției de separare *d*, coincide cu condiția pentru vizibilitate completă a suprafeței *S* pe direcția de vedere *d*. Astfel, se obține pentru fiecare suprafață, setul corespunzător al direcțiilor de vedere pentru care suprafața este complet vizibilă, problema putând fi rezolvată prin selectarea unei perechi de direcții opuse ce maximizează numărul suprafețelor care sunt complet vizibile pentru perechea aleasă de direcții de vedere.

Vizibilitatea completă a suprafeței poate fi deteriorată datorită *interferențelor locale* ale părților aceleiași suprafețe sau a *interferențelor globale* ale diferitelor suprafețe ale obiectului. Setul direcțiilor de vedere pentru care vizibilitatea suprafeței este independentă de orice interferență locală poate fi calculat și reprezentat prin regiuni convexe sferice ce apelează *harta vizibilității* suprafeței.

11.9. Vizibilitate și rigiditate

Harta suprafeței se obține ca o unitate sferică, prin translația normalei din orice punct al suprafeței spre origine și apoi intersectând-o cu unitatea sferică centrată în origine.

Acest proces dezvoltat de Gauss, poartă denumirea de *trasare Gaussiană* și reprezentarea sferică a suprafeței astfel obținută este denumită *hartă Gaussiană (sau hartă G)* a suprafeței. *Harta G* a poliedrului constă dintr-un număr finit de puncte sferice, pe când *harta G* a unei suprafețe curbe este o regiune sferică.

Local, un punct al suprafeței este vizibil pentru mai mult decât o singură direcție de vedere. Fie *n* normala și *T* planul tangent în punctul *p* la suprafața *S*. Punctul *p* estevizibil din toate direcțiile până la emisferă, cu *n* existând la "polul nord" și *T* existând ca plan "ecuatorial". Există multe puncte ale suprafeței, pentru care toată suprafața este vizibilă local. Rezultă o regiune sferică convexă denumită *harta vizibilității* suprafeței (sau *harta V*).

Orice punct al *hărții V* are drept corespondent direcția pentru care toată suprafața este vizibilă local. Se intuiește faptul că pentru multe suprafețe ce sunt complicate, *harta G* este mare și *harta V* este mică. Această "inversare" a relațiilor dintre cele două hărți este ilustrată în punctele sferice duale. Există situații în care *harta V* poate fi goală. *Harta V* a suprafeței poate fi calculată prin intersectarea unui set *n* de emisfere ce corespund unor puncte simple *n* ale suprafeței cu vizibilitate locală.

11.10. Interferențe globale și cavități (adâncituri)

Suprafețele obiectelor convexe nu suferă interferențe globale. Totuși, nu toate obiectele (și în particular, suprafețele) sunt convexe. Noțiunea de cavitate este utilizată pentru determinarea interferențelor globale.

Se notează cu $CH(\Omega)$ înfășurătoarea convexă a obiectului Ω.

Dacă suprafața S a obiectului Ω face parte din $CH(\Omega)$, atunci suprafața S este complet vizibilă.

Se notează cu P_1, P_2, ... P_m setul de poliedre (poligoane) rezultate din regularizarea dintre $CH(\Omega)$ și Ω.

Fiecare poligon P, este apelat de conturul cavității lui Ω și este alcătuit din două tipuri de suprafețe: cele care fac parte din $CH(\Omega)$ dar nu și din Ω și invers. Prima suprafață ce se obține este calota suprafeței, calota acoperind adâncitura (cavitatea) care formează mai târziu tipul suprafeței, denumită suprafață adâncă.

Se notează cu:

- calotă(P_i): calota suprafețelor P_i,
- cavitate(P_i): cavitatea suprafețelor P_i.

11.10. Interferențe globale și cavitătții (adânciturí)

Se considera un obiect care are înfășurătoarea convexă și pentru care conturul cavității și adânciturile sunt cunoscute. Vizibilitatea punctelor din interiorul adânciturii poate fi considerată independentă de alte cavități.

Dacă vizibilitatea unui punct *p* din interiorul adânciturii P_i pe direcția de vedere *d* nu interferează cu nici o suprafață inclusă în cavitatea (*P*), atunci punctul *p* este vizibil pe direcția de vedere *d*.

Fie *q* prima intersecție punctiformă a razei emise din punctul *p* pe direcția –*d* cu suprafețele din interiorul adânciturii P_1, P_2, ... P_m. Punctul *q* se află pe P_i. Dac punctul *q* este pe suprafața P_j, $j \neq i$, atunci segmentul de dreaptă *L* poate fi construit constituind legătura între P_i și P_j. Aceste contradicții fac ca P_i și P_j să fie disjuncte.

Dac *q* aparține suprafeței *S* din cavitate, atunci vizibilitatea lui *p* este blocată de adâncitura suprafeței *S*. Altfel, dacă *q* aparține zonei „calotă (P_i)”, prin construcție *q* este vizibil pe direcția de vedere *d*. Astfel, *p* este vizibil pe direcția de vedere *d*.

Când Ω este un obiect poligonal cu *n* laturi, marginea convexă $CH(\Omega)$ poate fi calculată și se poate determina regularizarea diferențelor dintre CH(Ω) și Ω. Se poate identifica complet setul cavităților.

11.10. Interferențe globale și cavități (adâncituri)

Setul direcțiilor pentru fiecare cavitate care este complet vizibilă și astfel rigidizată, este furnizat de *harta V* a suprafeței, care se poate calcula prin descompunerea *hărții vizibilității*.

Se caută perechile opuse de direcții similare care minimizează numărul miezurilor. Anterior, a fost descris setul de cavități $P = P_1, P_2, \ldots P_m$ extrase pentru obiectul Ω, unde P_i = *cavitate*(P_i).

Se notează cu $VM = \{VM(P_1), VM(P_2), \ldots VM(P_m)\}$. Acesta desemnează corespondența hărții vizibilității, care se presupune că nu este goală.

Pentru perechea de direcții opuse *d* și –*d*, *P* poate fi descompus în trei submulțimi, P^+, P^- și P^0, care constau din acele suprafețe complet vizibile de pe *d*, cele complet vizibile de pe –*d* și cele care nu sunt complet vizibile de pe nici o direcție *d* sau –*d*:

$$\begin{aligned} d &\in \cap\, VM(P_i), \\ -d &\in \cap\, VM(P_i). \end{aligned} \tag{11.7}$$

Împreună, *d* și –*d* separa direcțiile în submulțimile P^+ și P^- care se pot încorpora în cavitate, iar submulțimea P^0 indică numărul cavităților necesare. Aceasta sugerează modul în care se determină numărul cavităților, ținându-se cont de numărul submulțimilor P^0.

11.10. Interferențe globale și cavități (adâncituri)

Harta V conține poligoane sferice convexe, iar perechea direcțiilor opuse poate fi reprezentat ca *puncte diametral opuse*.

Două puncte sferice p și q sunt *diametral opuse* dacă $q = -p$. Punctul q este denumit opusul lui p și invers.

Problema se poate reformula ca fiind problema învelișului poligonului sferic. Orice punct p aflat la intersecția poligoanelor sferice ($V_1 \cap V_2 \cap V_3$) indică direcția ce corespunde suprafețelor (S_1, S_2 și S_3) complet vizibile, problema devenind cea a perechii de puncte diametral opuse care cuprind între ele numărul maxim de puncte al *hărții V*.

Suprafețele corespunzătoare *hărții V* nu conțin perechi de puncte care să dăuneze necesarului de miezuri.

11.10. Interferențe globale și cavitătții (adânciturí)

Pentru un set de poligoane sferice convexe V_1, V_2, ... V_m , se impune găsirea perechii de puncte diametral opuse p și $-p$ care maximizează numărul V_i ce conține fiecare p sau $-p$.

Fie V setul poligoanelor sferice convexe.

Copia setului de poligoane sferice convexe $-V$ constituie opusul setului V introdus (V este un poligon sferic având k laturi, notate p_1 , p_2, ... p_k , în această ordine). Atunci, opusul lui V este un alt poligon sferic ($-V$) cu laturile q_1, q_2, ... q_k în această ordine, unde q_i este diametral opus lui p_i.

Dacă punctul p constituie intersecția poligoanelor sferice convexe V_i și $-V_j$, atunci punctul p ce aparține de V_i este diametral opus lui $-q$ ce aparține de V_j.

Aceste observații conduc la formularea alternativă a problemei cavităților.

Pentru setul poligoanelor sferice convexe V_1 , V_2, ... V_m, $-V_1$, $-V_2$, ... $-V_m$, se impune găsirea punctului p care maximizează numărul poligoanelor care îl conțin pe p.

11.10. Interferențe globale și cavități (adâncituri)

Problema poate fi rezolvată prin calcularea maximului punctului, partiția sferică fiind determinată direct de setul de poligoane dat. Fiecărui punct p al sferei i se poate asigna un *vector proprietar* $u(p)$ unde:

$$[u(p) = (u_1(p), u_2(p), \ldots u_m(p))] \tag{11.8}$$

sau:

$$u(p) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} p \in V, \\ p \in -V. \end{matrix} \tag{11.9}$$

Vectorul $u(p)$ astfel definit, reprezintă urmele trasate pe poligon de către p. Două puncte p și q sunt echivalente dacă $u(p) = u(q)$. În acest caz, o celulă a partiției spațiului bidimensional (2D) este legată de submulțimea punctelor echivalente. Vectorul care descrie elementul K este același pentru toate punctele din interiorul lui K:

$$u(K) = u(p), \text{ pentru orice } p \in K. \tag{11.10}$$

11.10. Interferențe globale și cavității (adânciturí)

Două celule adiacente și vectorii proprietari ai acestora diferă printr-un singur element: poligonul ale cărui margini separa cele două celule. Dacă se obține vectorul care descrie o celulă, vectorul celeilalte celule poate fi obținut direct, prin propagarea relațiilor adiacente dintre ele.

Poligonul acoperit de celule înscrie în vectorul său ca pe o proprietate, maximul punctelor găsite la traversarea celulelor partiției și selectează punctul celulei K care maximizează valoarea $|u(K)|$, unde:

$$|u(K)| = \sum_{i=1}^{m} |u_i(K)|. \qquad (11.11)$$

Pașii parcurși de algoritm sunt prezentați în continuare. Se notează cu n_i numărul punctelor de întâlnire a laturilor poligonului convex V_i.

Selectarea direcțiilor de separare utilizând acoperirea poligonului sferic pe baza algoritmului este testată pentru un obiect cu patru cavități S_1, S_2, S_3 și S_4, cărora le corespund hărțile V: V_1, V_2, V_3 și V_4, unde V_1 și V_2 sunt sferturi de sfere Gaussiene, V_3 este un paralelogram și V_4 constă dintr-un punct aflat la polul sudic.

Partiția sferică indusă de poligoanele sferice V_1, V_2, V_4, V_5, $-V_1$, $-V_2$, V_3, $-V_4$ este în punctul maxim al intersecției lui V_1, V_2 și $-V_4$.

Alegând d' și opusul acestuia $-d'$ pentru separarea direcțiilor, suprafețele S_1, S_2 și S_3 pot fi incorporate în interiorul machetei, pentru suprafața S_4 fiind necesara reprezentarea cavității.

11.10. Interferențe globale și cavitădții (adâncituri)

Pentru un punct al învelișului poligonului sferic, algoritmul raportează primul maxim ce corespunde punctului de pe înveliș care este intersectat de partiția sferică în timpul traversării.

Complexitatea algoritmului poate fi îmbunătățită prin determinarea separației optime a direcțiilor pentru un obiect cu *m* adâncituri și *n* puncte de întâlnire a laturilor.

Timpul dezvoltat de algoritmul alocat tuturor cavităților este mare.

Nu sunt explicite stările asignate înălțimilor *w* ale adânciturilor ce stau la baza complexității geometrice.

Algoritmul poate fi modificat astfel încât, în locul minimizării, pentru toate direcțiile posibile *d*, valoarea $|u(d)|$ să fie egală cu suma valorilor individuale $u_i(d)$:

$$|u(d)| = \sum_{i=1,n} u_i(d) w_i. \qquad (11.12)$$

Complexitatea nu este afectai de aceste modificări. De altfel, cavitatea utilizează o *hartă V* goală și nu este complet vizibilă pentru nici o direcție.

Oricum, pentru subdivizarea adânciturilor se utilizează goluri care pot fi complet eliminate. Algoritmul constă în subdivizarea adânciturilor și invocă noțiunea de vizibilitate parțială.

ÎNTREBĂRI