UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică şi Microelectronică
Departamentul Informatică şi Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

TEMA 8. TRANSFORMĂRI GRAFICE 3D (TRIDIMENSIONALE)

l. u., dr. NASTAS Andrei

CONȚINUT

8.1. Transformări geometrice 3D

Transformarea geometrică 3D a imaginii se descrie ca:

$$P\,(x, y, z) \rightarrow P'\,(x', y', z'), \tag{8.1}$$

unde:

$$x' = F1(x, y, z),$$
$$y' = F2(x, y, z),$$
$$z' = F3(x, y, z).$$

Transformările geometrice tridimensionale cuprind:

- translația,
- scalarea,
- rotația,
- oglindirea,
- forfecarea
- proiecția obiectelor 3D.

În coordonate omogene, un punct din spațiu (x, y, z) se reprezintă prin vectorul [xw yw zw w], unde: w este parametru real, iar

$$\begin{aligned} x &= xw/w, \\ y &= yw/w, \\ z &= zw/w, \\ w &\neq 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

8.1. Transformări geometrice 3D. Matrici de transformare

Matricea de transformare generalizată 4x4 pentru coordonate omogene 3D are următoarea formă:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

Această matrice poate fi împărțită în patru, astfel:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & 3 \\ & 3\times 3 & & \times \\ & & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1\times 3 & & 1\times 1 \end{array}\right], \tag{8.4}$$

unde: • matricea 3 x 3 include transformări de scalare locală, forfecare, oglindire și rotație;

- matricea 1 x 3 reprezintă transformarea de translație;
- matricea 3 x 1 reprezintă transformarea de proiectare perspectivă;
- matricea 1 x 1 reprezintă transformarea de scalare generală

Transformarea geometrică 3D a imaginii în forma matricială se descrie în felul următor:

$$[x'\ y'\ z'\ 1] = [x\ y\ z\ 1][M]. \tag{8.5}$$

8.2. Translația

***Translația** este transformarea prin care un obiect este deplasat din poziția sa, cu o poziție dată, după o direcție dată.*

Dacă (*x, y, z*) sunt coordonatele unui punct *P* din spațiu, prin translație el este dus în punctul de coordonate *P'* (*x*', *y*', *z*'), (figura 8.1), unde:

$$x' = x + tx,$$
$$y' = y + ty, \qquad (8.6)$$
$$z' = z + tz,$$

sau, în formă matriceală:

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] \ [T]. \qquad (8.7)$$

Matricea de translație 3D este:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.8)$$

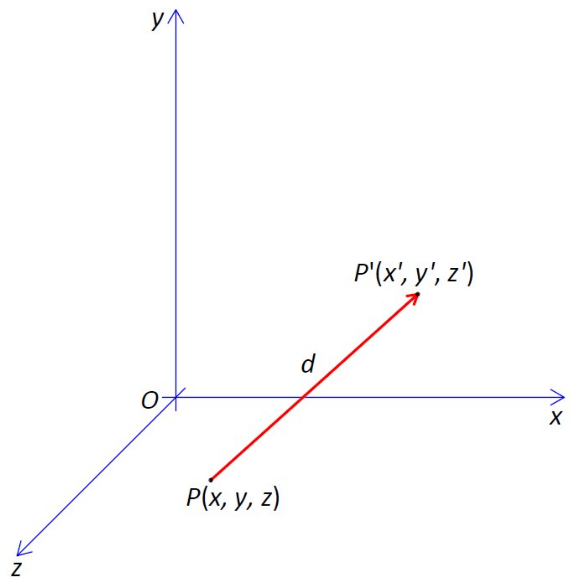

Fig. 8.1. Translare în spațiu cu distanța *d.*

8.3. Scalarea

Scalarea față de origine

Scalarea *este transformarea prin care un obiect este mărit sau micșorat.*

Este specificată prin trei numere, numite *factorul de scalare* pe axa *x*, respectiv de *factorul de scalare* pe axa *y,* și de *factorul de scalare* pe axa *z*.

Dacă (*x, y, z*) sunt coordonatele unui punct *P* din spațiu, prin scalare față de origine, el este transformat în punctul de coordonate *P'* (*x', y', z'*), unde:

$$x' = sx \cdot x,$$
$$y' = sy \cdot y, \qquad (8.9)$$
$$z' = sz \cdot z,$$

sau, în formă matriceală:

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]\ [S]. \qquad (8.10)$$

Matricea de scalare locală este dată de relația:

$$[S] = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.11)$$

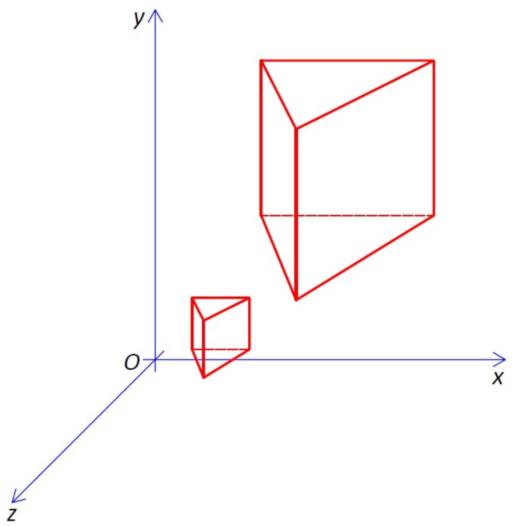

Fig. 8.2. Scalarea față de origine

8.3. Scalarea

Scalarea globală se obţine folosind următoarea matrice:

$$[Sg] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \tag{8.12}$$

Fie punctul *P* de coordonate (*x, z, y*). Prin scalare globală se transformă astfel:

$$[x\ y\ z\ 1][\ S\ ] = [\ x\ y\ z\ s\ ] = [\ x/s\ y/s\ z/s\ 1\ ] = [\ x'\ y'\ z'\ 1\ ]. \tag{8.13}$$

Dacă factorul de scalare globală este subunitar, $s < 1$, se produce o mărire a vectorului de poziție;
Dacă factorul de scalare este supraunitar, $s > 1$, se produce o micșorare a vectorului de poziție.
Același efect se obține prin scalare locală, reprezentată prin matricea:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.14}$$

8.3. Scalarea

Exemplu:

Fie cubul definit prin următoarea matrice a coordonatelor vârfurilor sale:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ şi fie următoarea matrice de scalare locală: $$[S1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

În urma scalării cu factori de scalare diferiți pe cele trei axe se obține paralelipipedul cu coordonatele vârfurilor reprezentate de primele trei coloane ale matricei rezultat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.3. Scalarea

Exemplu:

Fie următoarea matrice de scalare globală: $[S2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

În urma scalării se obține matricea:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 0 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 4 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 4 & 4 & 0{,}5 \\ 4 & 4 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 4 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În urma scalării globale se obţine tot un cub, având coordonatele vârfurilor reprezentate de matrice obţinută.

8.4. Rotația

Rotația în jurul unei axe a sistemului de coordonate

În cazul rotației în jurul axei x, coordonatele vectorilor de poziție nu se schimbă.

Rotația apare în plane perpendiculare pe axa *x*.

În mod similar, în cazul rotației în jurul axei *y* sau *z*, coordonatele *y*, respectiv *z* ale vectorilor de poziție nu se schimbă; rotația se efectuează în plane perpendiculare pe axa *y*, respectiv *z*.

În cazul rotației în jurul axei *x* cu unghiul α matricea de transformare se descrie în mod următor:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.15}$$

Într-o manieră asemănătoare matricea de rotație în jurul axei *y* cu unghiul β este:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

8.4. Rotația

Matricea de rotație în jurul axei z cu unghiul ϑ este:

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (8.17)$$

Considerăm paralelipipedul cu laturile paralele cu axele sistemului de coordonate și un vârf în origine (figura 8.3).

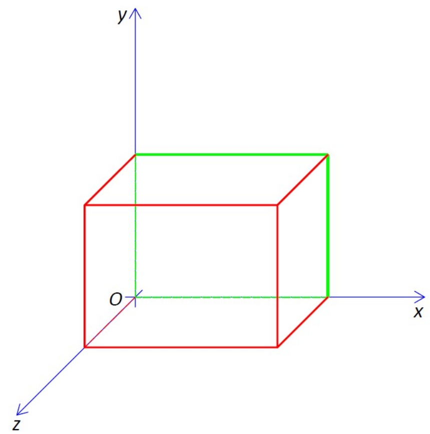

Fig. 8.3. Poziția inițială a paralelipipedului

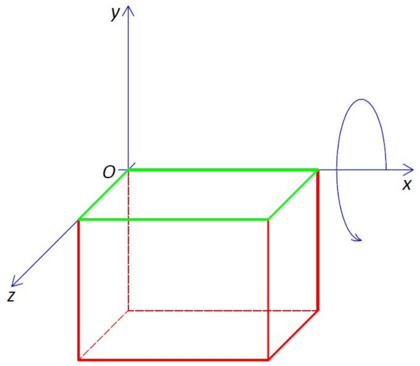

Fig. 8.4. Rotație în jurul axei *x* cu unghiul α = 90°

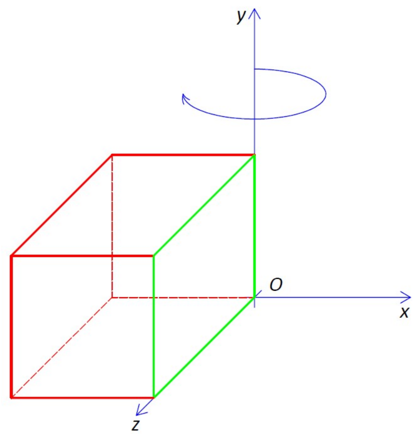

Fig. 8.5. Rotație în jurul axei *y* cu unghiul β = 90°

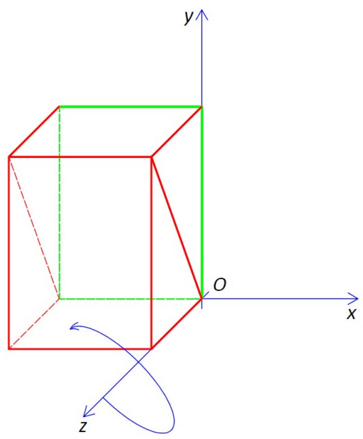

Fig. 8.6. Rotație în jurul axei *z* cu unghiul θ = 90°

8.5. Transformări inverse

Toate matricele de transformare au inverse:

$$[T(tx, ty, tz)]^{-1} = [T(-tx, -ty, -tz)],$$
$$[S(sx, sy, sz)]^{-1} = [S(1/sx, 1/sy, 1/sz)],$$
$$[Rx(\alpha)]^{-1} = [Rx(-\alpha)], \tag{8.18}$$
$$[Ry(\beta)]^{-1} = [Ry(-\beta)],$$
$$[Rz(\vartheta)]^{-1} = [Rz(-\vartheta)].$$

8.6. Forfecarea

Dacă (*x, y, z*) sunt coordonatele unui punct *P* din spațiu, prin forfecare el este transformat în punctul de coordonate *P'* (*x'*, *y'*, *z'*), unde:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \cdot d + z \cdot g, \\ y' &= x \cdot b + y + z \cdot i, \\ z' &= x \cdot c + y \cdot f + z, \end{aligned} \tag{8.19}$$

sau, în formă matriceală:

$$[x' \; y' \; z' \; 1'] = [x \; y \; z \; 1] \; [F]. \tag{8.20}$$

Matricea de forfecare este:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.21}$$

8.7. Oglindirea față de un plan al sistemului de coordonate

În cazul oglindirii față de planul *xy*, se inversează doar coordonata *z*, coordonatele *x* și *y* rămânând neschimbate.

Astfel, matricea transformării de oglindire față de planul *xy* este:

$$[O_{xy}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.22}$$

Matricea oglindirii față de planul *yz* este:

$$[O_{yz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.23}$$

Matricea oglindirii față de planul *xz* este:

$$[O_{xz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.24}$$

8.8. Compunerea transformărilor tridimensionale

Matricea corespunzătoare transformării compuse se obține prin înmulțirea matricelor transformărilor elementare.

Deoarece înmulțirea matricelor nu este comutativă, este importantă ordinea în care se aplică aceste transformări.

Matricea de transformare cea mai apropiată vectorului linie corespunde primei transformări care se aplică în timp ce matricea de transformare cea mai depărtată este ultima care se aplică.

Matematic aceasta se exprimă prin:

$$[V]\ [M] = [V]\ [M_1]\ [M_2]\ [M_3]\ \dots\ [M_n], \tag{8.25}$$

unde $[M_i]$ poate îi orice matrice de transformare elementară:

- scalare,
- forfecare,
- translație,
- rotație,
- oglindire,
- proiecție.

8.9. Rotația în jurul unei axe oarecare

Axa oarecare de rotație (d) se specifică printr-un punct A (x_0, y_0, z_0) şi un vector direcție $C = c_{xi} + c_{yj} + c_{zk}$, unde c_x, c_y, c_z sunt cosinuşii directori.

Transformarea de rotație cu un unghi ϑ în jurul axei (d) se compune din:

1. Translație, altfel încât punctul A să ajungă în originea sistemului de coordonate.
2. Alinierea vectorului C cu una din axele sistemului de coordonate.
3. Rotația cu unghiul ϑ în jurul axei la care s-a făcut alinierea.
4. Inversa transformării de la pasul (2)
5. Translația inversă în punctul 1.

8.10. Oglindirea faţă de un plan oarecare

Considerăm planul de oglindire specificat printr-un punct, *P* (x_0, y_0, z_0) și vectorul normală la plan, *N*.
O procedura de obținere a transformării de oglindire față de planul dat este următoarea:

1. Translație astfel încât punctul *P* (x_0, y_0, z_0) din plan să ajungă în originea sistemului de coordonate.
2. Alinierea vectorului normală la plan, *N*, la axa z pozitivă. Planul de oglindire devine astfel planul $z = 0$.
3. Oglindirea față de planul $z = 0$.
4. Transformarea inversă alinierii de la pasul (2).
5. Translația inversă celei de la pasul (1).

8.10. Oglindirea faţă de un plan oarecare

Matricea transformării de oglindire față de un plan oarecare se compune din produsul următoarelor matrice:

$$[M] = [T]\ [A_{N,z}]\ [O_z]\ [A_{N,z}]^{-1}\ [T]^{-1}, \tag{8.26}$$

unde: $[T]$ – reprezintă matricea de translație;

$[A_{N,z}]$ – reprezintă matricea de aliniere a vectorului normală N cu axa z pozitivă;

$[O_z]$ – reprezintă matricea de oglindire față de planul $z = 0$;

$[A_{N,z}]^{-1}$ – reprezintă matricea de aliniere inversă;

$[T]^{-1}$ – reprezintă translația inversă.

ÎNTREBĂRI