UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică şi Microelectronică
Departamentul Informatică şi Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

TEMA 7. TRANSFORMĂRI GRAFICE 2D (BIDIMENSIONALE)

l. u., dr. NASTAS Andrei

CONȚINUT

7.1. Transformări geometrice

Transformările sunt frecvent folosite în sinteza imaginilor.

Ele permit:

– reprezentarea desenelor la scara dorită,

– efectuarea operațiilor de detaliere și micșorare asupra imaginilor,

- realizarea animației, etc.

Există două puncte de vedere complementare asupra transformărilor.

Astfel sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x' = x + d \\ y' = y \end{cases}. \qquad (7.1)$$

poate fi interpretat în două moduri:

1. Punctul din plan (x, y) a fost translatat spre dreapta cu distanța d (figura 7.1).

2. Axa y a sistemului de coordonate a fost translatată cu distanța d spre stânga (figura 7.2).

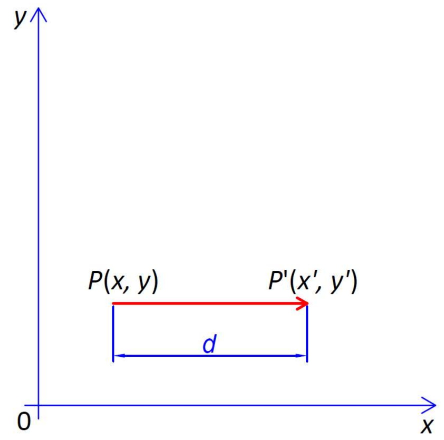

Fig. 7.1. Translare spre dreapta cu distanța *d*.

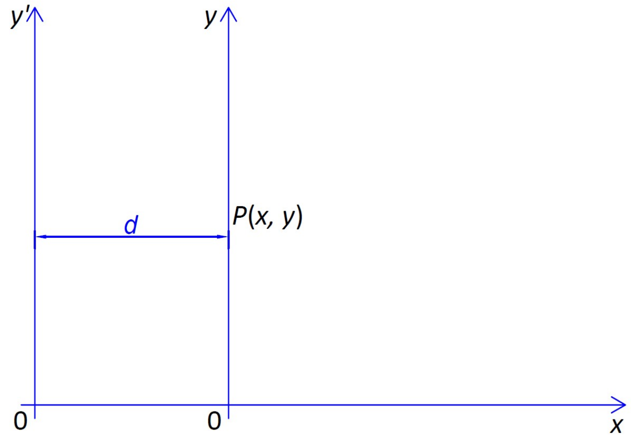

Fig. 7.2. Translarea axei y cu distanța *d*

7.1. Transformări geometrice

Prima transformare corespunde transformării unui punct raportat la un sistem de coordonate fix și se formulează matematic ca o **transformare geometrică** aplicată punctului.

A doua interpretare corespunde unei **transformări a sistemului de coordonate**, astfel încât (x', y') reprezintă punctul P în sistemul de coordonate transformat.

Fie un sistem de coordonate carteziene în plan.

Orice obiect poate fi descris printr-un:

- set de atribute geometrice (coordonate),
- atribute topologice,
- și atribute de aspect.

Transformarea geometrică *a unui obiect constă în transformarea fiecărui punct din reprezentarea obiectului.*

7.1.1. Translația

Translația este transformarea prin care un obiect este deplasat din poziția sa, cu o poziție dată, după o direcție dată.

Matematic, translația este specificată printr-un vector :

$$v = tx \cdot I + ty \cdot J \,. \tag{7.2}$$

Dacă (*x*, *y*) sunt coordonatele unui punct *P* al unui obiect, atunci prin translația obiectului cu o distanță egală cu mărimea vectorului *v*, punctul *P* se transformă în *P*’(*x*’, *y*’) (figura 7.3), unde *x*’ și *y*’ sunt definite astfel:

$$\begin{cases} x' = x + tx \\ y' = y + ty \end{cases} . \tag{7.3}$$

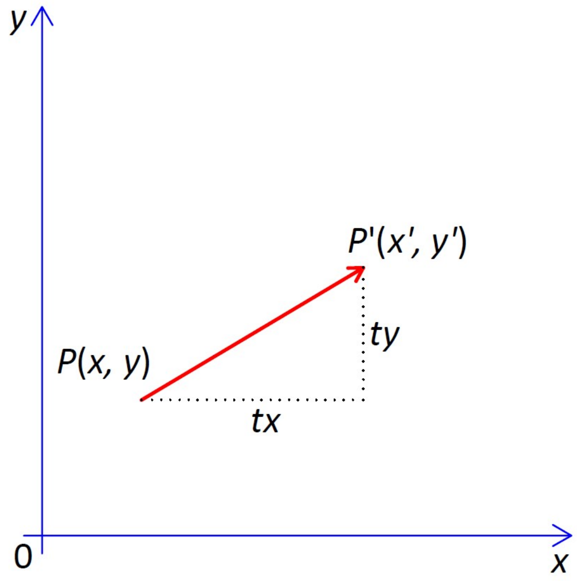

Fig. 7.3. Translare spre dreapta cu *tx* și *ty*

7.1.2. Scalarea

Scalarea este transformarea prin care un obiect este mărit sau micșorat.

a) Scalarea față de origine

Este specificată prin două numere, numite *factorul de scalare pe axa x*, respectiv de *factorul de scalare pe axa y*.

Un factor de scalare pozitiv specifică o modificare de mărime raportată la direcția pozitivă a axei *x* sau a axei *y*.

Un *factor de scalare subunitar specifică o mărire*, iar *unul supraunitar o micșorare*.

Se consideră *sx* și *sy*, factorii de scalare față de axele *Ox*, respectiv *Oy*.

Scalarea unui punct *P*(*x*, *y*) față de origine cu factorii *sx*, *sy* înseamnă scalarea vectorului de poziție *OP*(*x*, *y*), care unește originea cu punctul *P*.

Vectorul rezultat din scalare, OP’, are componentele x’, y’, unde:

$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}. \tag{7.4}$$

- Dacă *sx* = *sy*, scalarea este *uniformă* – ea nu produce deformarea obiectului transformat,
- Dacă *sx<>sy*, este numită *neuniformă*.

7.1.2. Scalarea

Exemplu:

Fie pătratul cu vârfurile: (1,1), (3,1), (3,3), (1,3), (figura 7.4, *a*).

Prin scalarea sa față de origine cu factorii *sx* = 2 și *sy* = 3, se va obține dreptunghiul cu vârfurile: (2,3), (6,3), (6,9), (2,9), (figura 7.4, *b*).

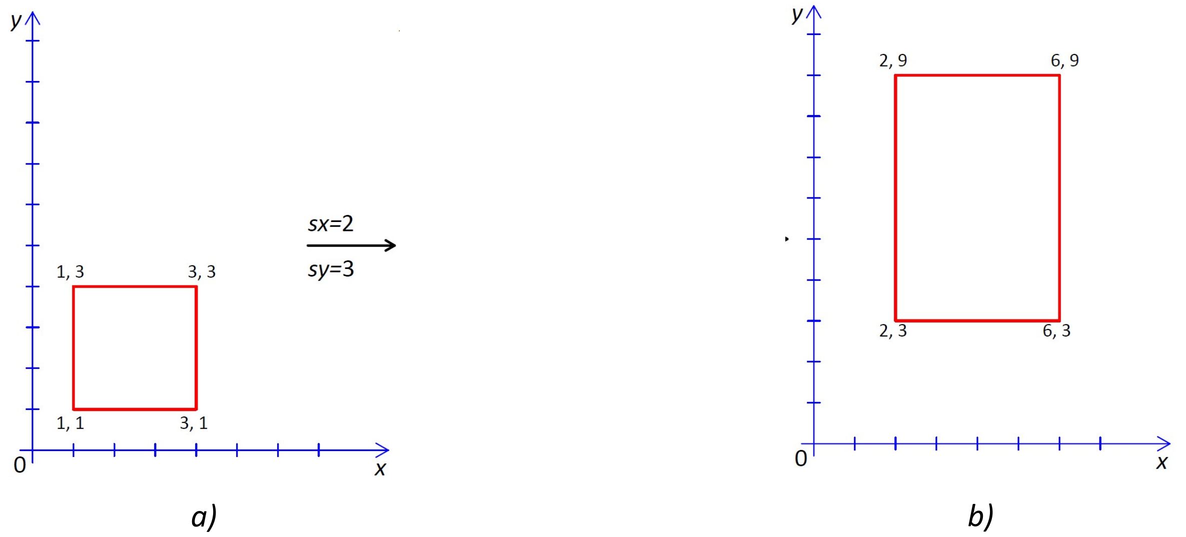

Fig. 7.4. Exemplu de scalare a unui dreptunghi

7.1.2. Scalarea

b) Scalarea față de un punct oarecare din plan

Fie $F(xf, yf)$ punctul din plan față de care este scalat un punct $P(x, y)$.

Punctul F este numit punctul fix al transformării, deoarece nu se modifică prin aplicarea transformării.

Scalarea punctului P față de F cu factorii sx și sy înseamnă scalarea vectorului FP;

Componentele vectorului scalat FP', vor fi :

$$\begin{aligned} dx' &= x' - xf = (x - xf) \cdot sx, \\ dy' &= y' - yf = (y - yf) \cdot sy, \end{aligned} \tag{7.5}$$

de unde :

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot sx + xf - xf \cdot sx, \\ y' &= y \cdot sy + yf - yf \cdot sy. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Observație :

Dacă $xf = 0$ și $yf = 0$, atunci se obține formula scalării față de origine.

7.1.3. Rotația

1. Rotația față de origine

Această transformare este specificată printr-un unghi;

– dacă unghiul este pozitiv, atunci rotația este efectuată în sensul trigonometric,

– altfel, în sensul mișcării acelor de ceasornic.

Fie un punct $P(x, y)$ și un unghi de rotație t. Punctul $P'(x', y')$ care va fi calculat în funcție de rotația punctului P cu unghiul u, în jurul originii (figura 7.5), se poate exprima prin relațiile:

Coordonatele carteziene ale punctului P:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(t), \\ y &= r \cdot \sin(t). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Coordonatele carteziene ale punctului P':

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(t + u), \\ y' &= r \cdot \sin(t + u). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Înlocuim $\cos(t + u)$ și $\sin(t + u)$ cu expresiile lor din trigonometrie, și astfel obținem:

$$\begin{aligned} x' &= r\,(\cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)), \\ y' &= r\,(\cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u)). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Știind că $x = r \cdot \cos(t)$ și $y = r \cdot \sin(t)$, obținem:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(u) - y \cdot \sin(u), \\ y' &= x \cdot \cos(u) + y \cdot \cos(u). \end{aligned} \tag{7.10}$$

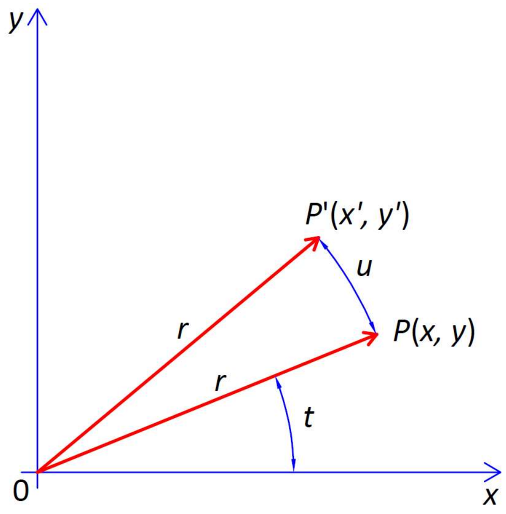

Fig. 7.5. Rotația față de origine

7.1.3. Rotația

2. Rotația față de un punct oarecare din plan

Fie un punct $P(x, y)$, cu un unghi de rotație u și punctul $F(xf, yf)$ în jurul căruia se va învârti P.

Punctul $P'(x', y')$ care va fi calculat în funcție de rotația punctului P cu unghiul u, în jurul lui F, se poate exprima prin relațiile:

$$\begin{aligned} dx' &= x' - xf = (x - xf) \cdot \cos(u) - (y - yf) \cdot \sin(u), \\ dy' &= y' - yf = (x - xf) \cdot \sin(u) + (y - yf) \cdot \cos(u). \end{aligned} \tag{7.11}$$

De unde, obținem:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(u) - y \cdot \sin(u) + xf - xf \cdot \cos(u) + yf \cdot \sin(u), \\ y' &= x \cdot \sin(u) + y \cdot \cos(u) + yf - xf \cdot \sin(u) - yf \cdot \sin(u). \end{aligned} \tag{7.12}$$

7.2. Compunerea transformărilor

- Transformările care trebuie să fie aplicate asupra unui obiect la un moment dat sunt compuse din mai multe transformări elementare.
- De exemplu: pentru a simula deplasarea unui automobil pe o traiectorie oarecare, se afișează o secvență de imagini ale automobilului, fiecare imagine obținându-se din cea anterioară prin aplicarea mai multor transformări elementare:
  - translație,
  - rotație
  - și eventual scalare.
- Dacă vrem să transformăm fiecare punct al imaginii, prin aplicarea secvențială a celor trei transformări elementare, vom obține o viteză scăzută a mișcării întregului obiect în ansamblu.
- Atunci trebuie să punem la un loc două sau trei transformări, astfel încât, printr-o formulă să putem deplasa mai rapid obiectul respectiv.
- O astfel de formulă se obține pe baza expresiilor sub formă de matrice a transformărilor elementare.

7.2. Compunerea transformărilor

Exemplu:
Rotația față de origine a unui punct P(*x, y*) se poate exprima matricial în următorul mod:

$$|x' \;\; y'| = |x \quad y| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}. \qquad (7.13)$$

O scalare față de origine urmată de o rotație față de origine se poate exprima astfel:

$$|x' \;\; y'| = |x \quad y| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}. \qquad (7.14)$$

Din înmulțirea celor două matrici obținem:

$$S \cdot R = \begin{vmatrix} sx \cdot \cos(u) & sx \cdot \sin(u) \\ -sy \cdot \sin(u) & sy \cdot \cos(u) \end{vmatrix}. \qquad (7.15)$$

Deci formula transformării compuse este:

$$x' = x \cdot sx \cdot \cos(u) - y \cdot sy \cdot \sin(u),$$
$$y' = x \cdot sx \cdot \cos(u) + y \cdot sy \cdot \cos(u). \qquad (7.16)$$

7.3. Coordonate omogene

Transformările 2D pe care le-am prezentat se pot reprezenta matricial, în coordonate carteziene, prin matrici de două coloane și două linii.

Nu există o asemenea matrice pentru translație. Din acest motiv transformările grafice se exprima în coordonate omogene.

Astfel, un punct în plan $P(x, y)$, se reprezintă în coordonate omogene printr-un vector $[xo\ yo\ o]$,
unde $xo = x \cdot o$ și $yo = y \cdot o$, iar o este un număr real oarecare.

Exemplu:

[3 2 1], [6 4 2], [30 20 10] sunt reprezentări posibile ale punctului (3, 2) în coordonate omogene.

Un vector în coordonate omogene, $[a\ b\ c]$, unde c este diferit de zero, reprezintă punctul din plan $[a/c, b/c]$.

Vectorul $[a\ b\ 0]$ reprezintă punctul de la infinit situat spre dreapta.

$$a \cdot y - b \cdot x = 0\ . \tag{7.17}$$

7.3. Coordonate omogene

Exemple:

[1 0 0] este punctul de la infinit pe axa *x* pozitivă;

[0 -1 0] este punctul de la infinit pe axa *y* negativă;

[1 1 0] este punctul de la infinit pe dreapta *y* = *x* în direcția [1 1].

Cele trei transformări elementare cunoscute, se pot exprima astfel, în coordonate omogene:

• Translația:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.18)$$

• Scalarea față de origine:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.19)$$

• Rotația față de origine:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.20)$$

7.4. Alte transformări grafice 2D
7.4.1. Oglindirea (Reflexia)

a) Față de axa *x* (figura 7.6),

$$x' = x,$$
$$y' = -y. \tag{7.21}$$

sau

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.22}$$

b) Față de axa *y* (figura 7.7),

$$x' = -x,$$
$$y' = y. \tag{7.23}$$

sau

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.24}$$

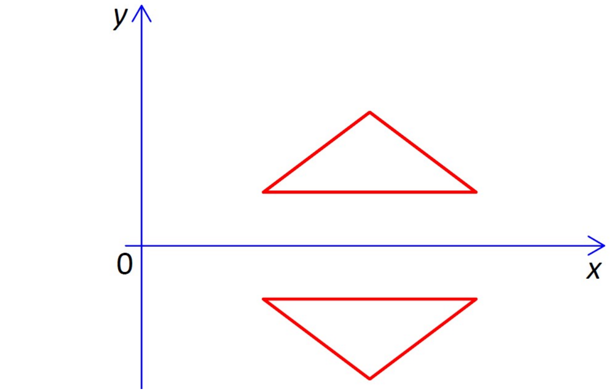

Fig. 7.6. Oglindirea față de axa *x*

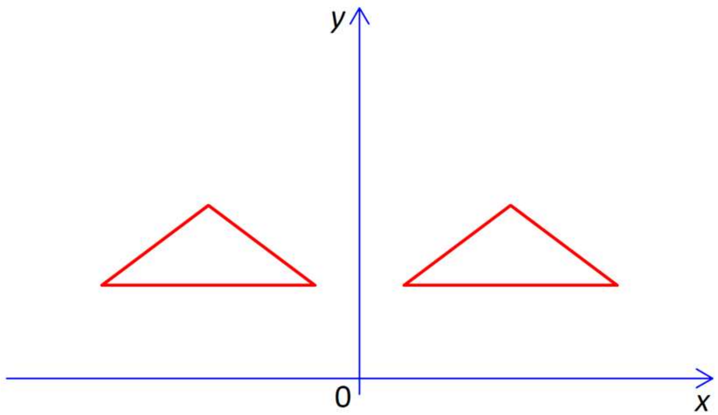

Fig. 7.7. Oglindirea față de axa *y*

7.4. Alte transformări grafice 2D
7.4.1. Oglindirea (Reflexia)

c) Față de origine (figura 7.8),

$$x' = -x,$$
$$y' = -y. \tag{7.25}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.26}$$

d) Față de dreapta *y* = *x* (figura 7.9),

$$x' = y,$$
$$y' = x. \tag{7.27}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.28}$$

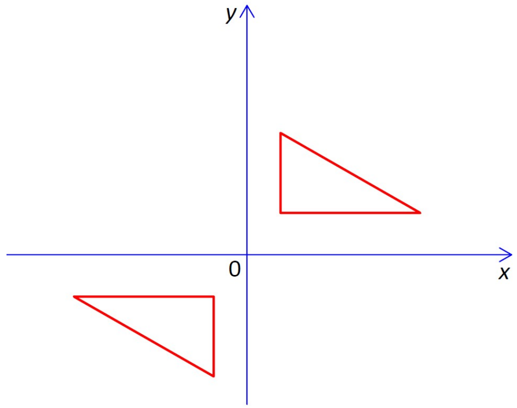

Fig. 7.8. Oglindirea față de origine

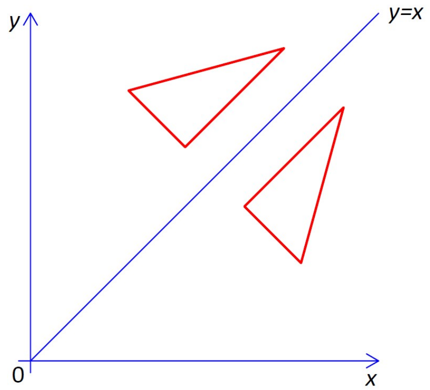

Fig. 7.9. Oglindirea față de dreapta *y* = *x*

7.4. Alte transformări grafice 2D
7.4.1. Oglindirea (Reflexia)

Oglindirea față de o dreaptă oarecare.

Se poate exprima ca o transformare compusă din următoarele transformări elementare :

- O translație, astfel încât dreapta să treacă prin origine;
- O rotație față de origine, astfel încât dreapta să se suprapună peste una dintre axele principale;
- Oglindirea față de axa principală peste care a fost suprapusă dreapta;
- Rotația inversă celei de la punctul 2;
- Translația inversă celei de la punctul 1.

7.4. Alte transformări grafice 2D
7.4.2. Forfecarea

Forfecarea este o transformare care produce distorsionarea obiectului transformat.

De exemplu, aplicată unui pătrat (figura 7.10), are ca efect un paralelogram (figura 7.11).

Se specifică prin două numere reale, numite *factorul de forfecare pe axa x*, respectiv *factorul de forfecare pe axa y*.

a) Forfecarea pe axa *0x*

$$x' = x + F_x \cdot y,$$
$$y' = y. \tag{7.29}$$

sau

$$|x' \ \ y' \ \ 1| = |x \ \ y \ \ 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.30}$$

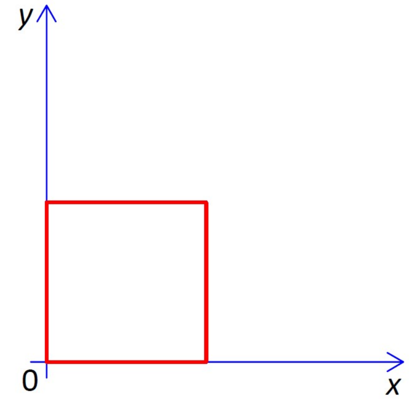

Fig. 7.10. Pătrat pentru se aplică forfecarea

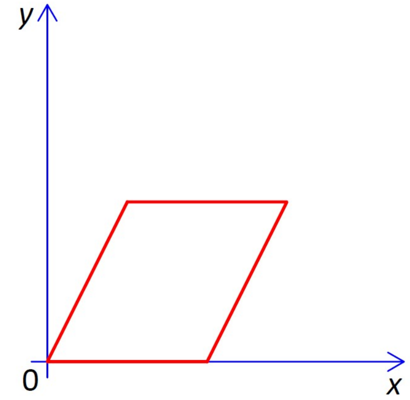

Fig. 7.11. Forfecarea pătratului aplicată pe axa 0*x*

7.4. Alte transformări grafice 2D
7.4.2. Forfecarea

b) Forfecarea pe axa *0y,* (figura 7.12),

$$x' = x,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \quad (7.31)$$

sau

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.32)$$

c) Forfecarea în caz general (figura 7.13),

$$x' = x + F_x \cdot y,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \quad (7.33)$$

sau

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.34)$$

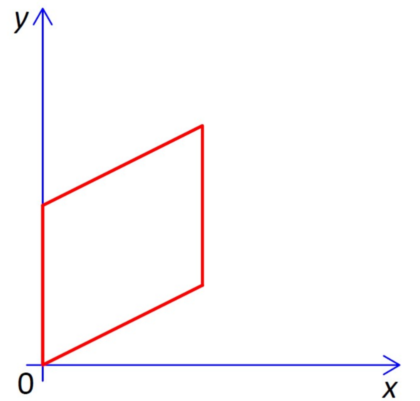

Fig. 7.12. Forfecarea aplicată pe axa *0y*

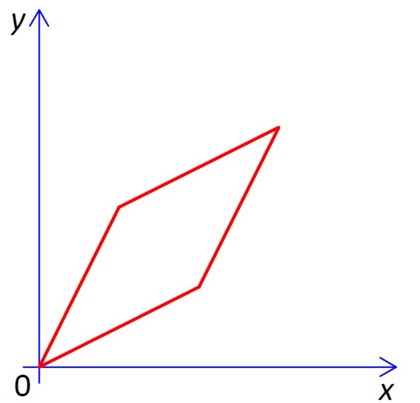

Fig. 7.13. Forfecarea în caz general

7.5. Transformări ale sistemului de coordonate

Considerăm două sisteme de coordonate în plan, unul cu originea în *O* și axele *x* și *y*, iar celălalt cu originea în *O*’ și axele *x*’, *y*’.

Fiecărui punct în plan *P*, îi corespund astfel două reprezentări: (*x, y*) – în sistemul *xOy* și (*x*’, *y*’) – în sistemul *x*’*O*’*y*’.

Sistemul *x*’*O*’*y*’ se poate obține prin transformarea sistemului *xOy*; transformarea de poate defini prin relația dintre cele două reprezentări ale aceluiași punct *P*, (*x*, *y*) și (*x*’, *y*’).

7.5.1. Translația

Dacă sistemul *x'O'y'* (figura 7.14), s-a obținut prin translația sistemului *xOy*, cu o distanță și o direcție date de vectorul:

$$v = tx \cdot I + ty \cdot J \ .$$

atunci, relația dintre coordonatele lui *P* în cele două sisteme de coordonate este:

$$\begin{cases} x' = x - tx \\ y' = y - ty \end{cases} .$$

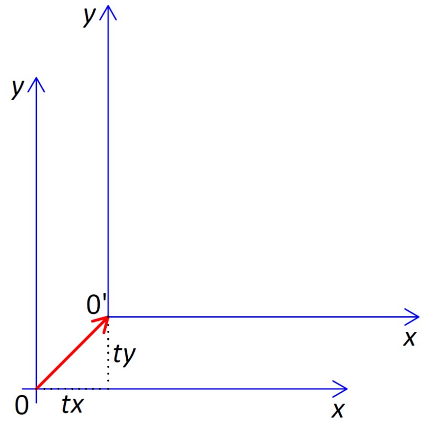

Fig. 7.14. Translația

7.5.2. Rotația față de origine

Fie sistemul de coordonate $x'O'y'$, obținut prin rotația axelor sistemului xOy cu unghiul u, (figura 7.15).
Punctul P, care în sistemul xOy are coordonatele:

$$x' = r \cdot \cos(t),$$
$$y' = r \cdot \sin(t).$$

va avea în sistemul $x'O'y'$ coordonatele:

$$x' = r \cdot \cos(t - u) = r \cdot (\cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)) = x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u),$$
$$y' = r \cdot \sin(t - u) = r \cdot (\sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)) = - x \cdot \sin(u) + y \cdot \cos(u).$$

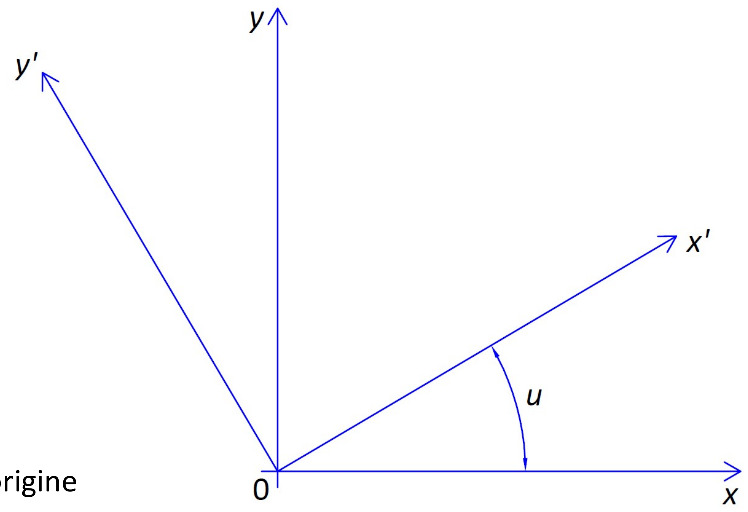

Fig. 7.15. Rotația unui system de coordonate față de origine

7.5.3. Scalarea față de origine

Presupunem că formăm un nou sistem de coordonate cu aceeași origine și orientare a axelor, dar caracterizat printr-o altă unitate de măsură de-a lungul axelor *x* și *y* (figura 7.16).

Dacă noile unități de măsură se obțin prin scalarea vechilor unități de măsură cu factorii *sx*, respectiv *sy*, atunci relația dintre coordonatele (*x*, *y*) și (*x*', *y*') ale aceluiași punct *P* în cele două sisteme de coordonate este:

$$x' = x \cdot 1/sx,$$
$$y' = y \cdot 1/sy.$$

De exemplu, dacă în sistemul *xOy* unitatea de măsură este metrul, atunci în sistemul *x*'*O*'*y*' unitatea este milimetrul, adică *sx* = *sy* = 1/1000.

Punctul *P*, de coordonate *x* = 10, *y* = 20 va avea în sistemul scalat coordonatele:

$$x' = 10 \cdot 1000,$$
$$y' = 20 \cdot 1000.$$

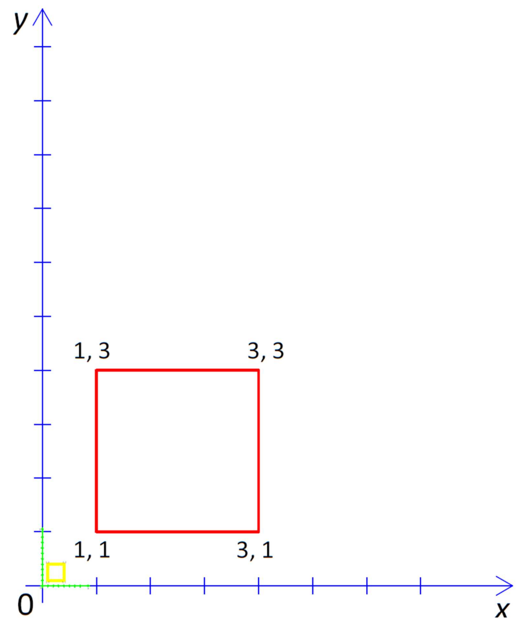

Fig. 7.16. Scalarea unui system de coordonate

7.5.4. Oglindirea față de o axă

Dacă sistemul de coordonate $x'O'y'$ s-a obținut prin oglindirea sistemului xOy față de axa Ox sau față de axa Oy (figura 7.17), atunci relația dintre coordonatele aceluiași punct în cele două sisteme coordonate este:

$x' = x,$
$y' = -y$, în cazul oglindirii față de axa Ox,
$x' = -x,$
$y' = y,$ în cazul oglindiri față de axa Oy.

Se observă că această transformare schimbă orientarea axelor sistemului de coordonate.

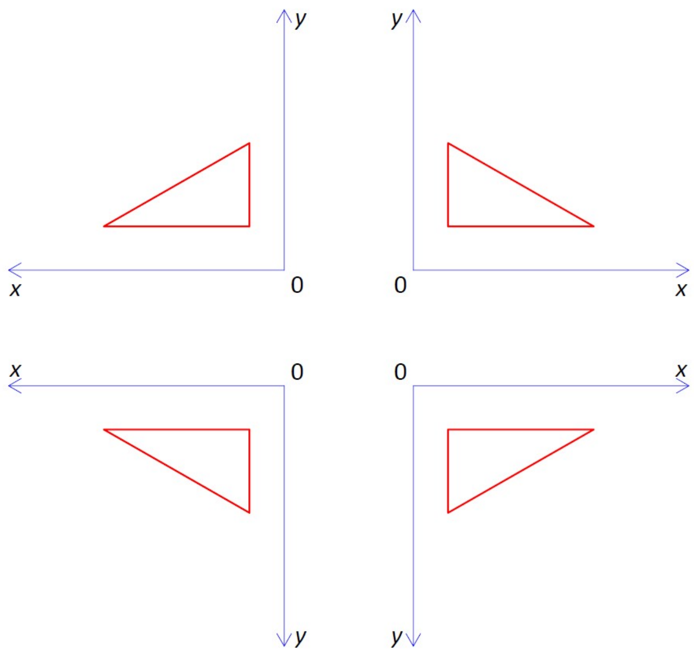

Fig. 7.17. Oglindirea unui system de coordonate

ÎNTREBĂRI