**VARIABILE ALEATOARE**

**1. Noțiune de variabile aleatoare. Variabilă aleatoare discretă.**

*Definitia 1.* Variabila aleatoare (v.a.) se numește mărimea asociata unei experiente aleatoare care în funcție de rezultatul experientei poate lua o valoare dintr-o mulțime de valori posibile.

Exemplul 1. Numărul de puncte care pot apărea la aruncarea unui zar este o variabilă aleatoare.

Exemplul 2. Dimensiunile piesei din numărul de piese confecționate de un strungar pe parcursul unei ore este o variabilă aleatoare.

*Definitia 2.* Variabila aleatoare, valorile căreia pot fi scrise sub forma unui șir finit sau numarabil se numește *variabilă aleatoare discretă*.

*Definitia 3.* Variabila aleatoare care poate primi orice valoare de pe un interval (închis sau deschis) se numește *variabilă aleatoare continue*.

Astfel exemplul 1 definește o v.a. discretă, în timp ce exemplul 2 – o v.a. continuie.

Prin urmare, v.a. poate fi considerată ca o functie care asociaza fiecarui eveniment elementar un numar real.

Variabilele aleatoare discrete se consideră pedeplin cunoscute, dacă în afara valorilor pe care acestea le primesc sunt cunoscute și probabilitățile cu care sunt luate aceste valori. O v.a. discretă poate fi descrisă în 3 moduri: a) sub forma unui tabel; b) grafic; c) în formă analitică cu ajutorul unei funcții.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Astfel, tabelul sau aplicația , unde

 și  se numește lege de distribuție a v.a. *X*. Aici .

Exemplul 3. La o loteree au fost realizate 10000 bilete. La aceste bilete a căzut un cîștig de 100 lei, 10 căștiguri a cîte 100 lei, iar la 100 de bilete s-a cîștigat 10 lei. Să se construiască legea de distribuție a cîștigului X pentru un billet de loteree.

Valorile pe care le poate primi v.a. *X* sunt: 0, 10, 100, 1000. Probabilitățile respective se vor calcula după definiția clasică a probabilității.:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 10 | 100 | 1000 |
|  | 0.9889 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |

V.a. discrete pot fi caracterizate cu ajutorul poligonului de distribuție. Dacă legea de distribuție a variabilei aleatoare *X* este

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Atunci poligonul de distribuție va fi:

































Exemplul4. Sunt efectuate 3 aruncări independente a monetei. Să se determine legea de repartiție și să se construiască poligonul de distribuție pentru v.a. *X* – numărul de apariții a stemei.

Rezolvare. *X* poate lua valorile 0,1,2,3. Probabilitățile se vor calcula după formula Bernoulli  Avem: ==; ==; ==; ==; Atunci tabeela de distribu’ie va fi

x





P

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

**2. Operatii cu variabile aleatoare discrete**

Cu variabilele aleatoare discrete pot fi efectuate mai multe operații.

* Suma variabilei aleatoare cu o constantă. Dacă *X* este o v.a. discretă cu legea de distribuție;  iar *k=const*, atunci *k*+*X* este deasemenea o v.a. discretă cu legea de distribuție .
* Produsul unei constante *k* cu o v.a. disretă *X* are legea de distribuție .

Suma a două variabile aleatoare. Dacă *X* și *Y* sunt două v.a.disrete cu legile de distribuție , atunci suma acestor 2 v.a. are următoarea lege de distribuție: . Aici , adică probabilitatea realizării simultane a acestor egalități. *Observație.* În cazul în care *X* și *Y* sunt v.a. independente ( variabilele aleatoare *X* și *Y* sunt independente dacă evenimentele sunt independente) atunci probabilitățile . Altfel spus, doua variabile aleatoare sunt independente daca probabilitatea ca una din variabile sa ia o anumita valoare nu depinde faptul ca cealalta a luat o alta valoare.

* Produsul a două v.a. are legea de distribuție , unde , Dacă *X* și *Y* sunt independente, atunci .
* Puterile v.a. *X* sunt caracterizate de legea de distribuție  Dacă *X* primește valori nenule apoi putem obține variabila aleatoare  cu legea:

.

Exemplu. Se consideră v.a. discrete *X* și *Y* cu legile de distribuție

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |  |  | 0 | 1 |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.2 |  | 0.6 | 0.4 |

Să se determine legea de distribuție a v.a. .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

V.a*.* 4*X* se determină de tabela

Tabela de distribuție a v.a. *XY* este

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *XY* |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Sau

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 |
|  | 0.18 | 0.12 | 0.3 | 0.2 | 0.12 | 0.08 |

Așa cum în ultima tabelă sunt 3 coloane cu

valoarea , aceste coloane le comasăm, probabilitățile respective le adunăm. Obținem

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0.18+0.3+0.12 | 0.12 | 0.2 | 0.08 |

Sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0.6 | 0.12 | 0.2 | 0.08 |

sumaobțnem după regula adunîrii v.a.:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *4X+XY* | 4+0 | 4+1 | 4+2 | 4+3 | 8+0 | 8+1 | 8+2 | 8+3 | 12+0 | 12+1 | 12+2 | 12+3 |
| *P* | 0.3\*0.6 | 0.3\*0.12 | 0.3\*0.2 | 0.3\*0.08 | 0.5\*0.6 | 0.5\*0.12 | 0.5\*0.2 | 0.5\*0.08 | 0.2\*0.6 | 0.2\*0.12 | 0.2\*0.2 | 0.2\*0.08 |

sau

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *4X+XY* | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| *P* | 0.18 | 0.036 | 0.06 | 0.024 | 0.3 | 0.06 | 0.1 | 0.04 | 0.12 | 0.024 | 0.04 | 0.016 |

În consecință, v.a. Z are următoarea lege de distribuție

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Z=4X+XY+0.05* | 4.05 | 5.05 | 6.05 | 7.05 | 8.05 | 9.05 | 10.05 | 11.05 | 12.05 | 13.05 | 14.05 | 15.05 |
| *P* | 0.18 | 0.036 | 0.06 | 0.024 | 0.3 | 0.06 | 0.1 | 0.04 | 0.12 | 0.024 | 0.04 | 0.016 |

**3. Caracteristici numerici ale variabilelor aleatoare discrete**

* 1. **Valoarea medie.**

*Definiție.***Valoare medie** (media, speranța matematică) a v.a. disrete *X* cu legea de distribuție  se numește suma produselor tuturor valorilor v.a. *X* la probabilitățile respective, adică

*M* [*X*] = *x1· p1 + x2· p2 + … + xn· pn* ,

sau *M* [*X* ]=.

Valoarea medie a unei variabilei aleatoare discrete *X* care ia o multime numarabila de valori este  daca seria obținută este absolut convergenta. Suma acestei serii este valoarea medie a variabilei aleatoare *M* [*X* ].

Exemplul 1. Să se calculeze valorile medii ale variabilelor aleatoare X și Y care au tabelele de distribuție:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |  |  | 0 | 1 |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.2 |  | 0.6 | 0.4 |

Avem:

*M* [*X* ]=1·0.3+2·0.5+3·0.2=1.9; *M* [*Y* ]=0·0.6+1·0.4=0.4.

Valoarea medie are următoarele proprietăți:

1. Valoarea medie poate primi valori atăt pozitive, cît și nepozitive.
2. Valoarea medie a constantei *C* este egală cu această constantă: *M* [*C* ]=*C*.
3. Valoarea medie a produsului constantei *k* la v.a. *X* este egală cu această constantă înmulîtă la valoarea medie a lui *X* : *M* [*k · X* ]= *k· M* [ *X* ].

Valoarea medie a sumei v.a. *X* și *Y* este egală cu suma valorilor medii ale acestor v.a.; *M* [*X + Y*]= *M* [ *X* ] + *M* [ *Y* ] *.* Această proprietate se păstrează pentru suma unui număr finit de v.a.:

*M* [*X1+ X 2·+ … + Xn*] = *M* [ *X1* ]*+ M* [ *X2*]*+ … + M* [ *Xn*].

1. Valoarea medie a produsului a două v.a. independente *X* și *Y* este egală cu produsul valorilor medii ale acestor v.a.; *M* [*X · Y* ]= *M* [ *X* ]*· M* [ *Y* ]. Valoarea medie a produsului a unui număr finit de v.a. independente deasemenea este egală cu produsul valorilor medii.
2. Valoarea medie are aceiași dimensiune ca însăși v.a.
3. Valoarea medie a abaterii variabilei aleatoare de la valoarea sa medie este egală cu 0, adică *M* [*X – M* [*X*]]= 0.

Exemplul 1. Se consideră v.a. discrete *X* și *Y* cu legile de distribuție

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |  |  | 0 | 1 |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.2 |  | 0.6 | 0.4 |

Să se determine valoarea medie a v.a. .

*Rezolvare*. Folosind legea de distribuție a lui *Z*, determinată în punctual precedent, avem:

*M*[4*X+X·Y+*0.05]=4.05•0.18+5.05•0.036+6.05•0.06+7.05•0.024+8.05•0.3+9.05•0.06+10.05•0.1+

11.05•0.04+12.05•0.12+ 13.05•0.024+14.05•0.04+15.05•0.016=8.41.

Vom aplica proprietățile valorii medii, menționate mai sus, pentru un calcul mai simplu.

*M*[4*X+X·Y+*0.05]= *M*[4*X*]*+M*[*X·Y*]*+*0.05=4*·M*[*X*]*+ M*[*X*] *·M*[*Y*]*+*0.05=4·1.9+1.9·0.4+0.05=8.41.

* 1. **Momentele inițiale și centrate ale variabilelor aleatoare.**

*Definitia 1.* **Moment****inițal de ordinul *r***al variabilei aleatoare *X* se numește numărul .

*Definitia 2.* **Moment** *centrat* **de ordinul *k***al variabilei aleatoare *X* se numește expresia .

Momentele inițiale și cele centrate posedă aceleași proprietăți ca și valoarea medie deoarece primele de definesc cu ajutorul valorii medii. În particular, momentul inițial de ordinul 1 este însăși valoarea medie.

1. **Dispersia variabilelor aleatoare discrete**

Pentru definirea unei variabile aleatoare, valoarea medie, in general, este insuficienta. Doua variabile aleatoare pot primi acelasi numar de valori si chiar pot avea aceeasi valoare medie. Cu toate acestea una din ele poate lua valor apropiate de valoare medie, in timp ce cealaltă va primi valori foarte departate de valoarea medie.

*Exemplul 1.* Să considerăm v.a.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3 | 0 | 3 |  |  | -100 | 0 | 100 |
|  | 0.4 | 0.2 | 0.4 |  | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

Valorile medii sunt: M[*X*] =0, M[*Y*]=0.

Acest exemplu demonstrează faptul că este necesar de a avea o caracteristică numerică a v.a. care va indica cum sunt repartizate valorile v.a. în jurul valorii medii, adică gradul de împrăștiere a acestor valori.

De aici rezulta necesitatea introducerii unui indicator numeric, care sa masoare gradul de imprastiere a valorilor unei variabile aleatoare in jurul valorii medii.

*Definiția 1.* **Dispersia (varianța)** unei variabile aleatoare *X* se numește valoarea medie a abaterii patratului acestei v.a. de la valoarea medie, adică , sau .

Se observă că dispersia de fapt este momentul centrat de ordinal doi .

Pentru variabilele aleatoare discrete formula de calcul a dispersiei are aspectul:

*D* [*X* ]=.

Dacă vom întroduce notația M[*X*] =*a*, atunci acestă formulă poate fi scrisă astfel:

*D* [*X*] *= (x1 –a) 2 ·p1 + (x2 –a) 2 ·p2 + … + (xn–a) 2 ·pn.*

*Exemplul 2.* Pentru v.a. cu legea de distribuție

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | -5 | 2 | 3 | 4 |
| *P* | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

 să se calculeze dispersia.

*Rezolvare.* Vom utiliza formula precedentă de calcul a dispersiei. Valoarea medie este

*a*= M[*X*]= (-5)·0.4+2·0.3+3·0.1+4·0.2=- 0.3. Calculăm dispersia:

*D* [*X*] *=* (*x1 –a*) *2 ·p1 +* (*x2 –a*) *2 ·p2 +* (*x3 –a*) *2 ·p3 +* (*x4–a*) *2 ·p4=*

((-5)-(-0.3)) *2* ·0.4+(2-(-0.3)) *2* ·0.3+(3-(-0.3)) *2* ·0.1+(4-(-0.3)) *2* ·0.2=15.21.

Penru a folosi formula din difiniția 1, trebuie de rdinale valoarea medie a v.a. . Tabela de distribuție a acestei variabile are aspectul

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 25 | 4 | 9 | 16 |
| *P* | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Valoarea medie este egală cu: M[]= 25·0.4+4·0.3+9·0.1+16·0.2=15.3.

Atunci =15.3 – (-0.3) ) *2 =* 15.21.

Dispersia se caracterizează prin următoarele proprietăți:

1. Dacă v.a. *X* și *Y* difera printr-o constanta, atunci dispersiile lor sunt egale, adică pentru *Y= X* +*k* (*k*=const) *D*[*X*]= *D*[*Y*].
2. Pentru *k*=const *D*[*k· X*]= *k2 ·* *D*[*X*], adică factorul constant poate fi scos în fața semnului dispersiei la patrat.
3. Dispersia unei sume finite de variabile aleatoare independente doua cate doua este egala cu suma dispersiilor variabilelor respective: *D* [*X1+ X 2·+ … + Xn*] = *D*[ *X1* ]*+ D* [ *X2*]*+ … + D* [ *Xn*].
4. Dispersia diferenței a două v.a. este egală cu suma dispersiilor acestor variabile: *D* [*X-Y*] = *D*[ *X* ]+ *D* [ *Y*].

*Definiția 2.* Mărimea  se numește **abatere medie patratică (abatere standard)** a variabilei aleatoare *X*.

*Exemplul 3.* Pentru variabila *X* cu tabela de distribuție

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | -5 | 2 | 3 | 4 |
| *P* | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

să se calculeze a) abaterea medie patratică; b) momentul inițial de ordinul 3.

*Rezolvare.* a) Deoarece abaterea medie patratică se determină după formula , iar dispersia a fost calculată în exemplul precedent, avem =3.9.

b) pentru a calcula momentul inițial de ordinal 3, determinăm legea de repartiție a v.a. *X 3*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -125 | 8 | 27 | 64 |
| *P* | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Atunci momentul inițial de rdinal 3 este egal cu

= (-125)·0.4+8·0.3+27·0.1+64·0.2= - 32.1.

**4. Exemple de legi de repartiție a v.a. discrete**

În aplicații destul de frecvent apar așa distribuții ale v.a. discrete, ca: distribuția binomială, distribuția geometrică, distribuția hipergeometrică, distribuția Poisson.

**4**.1. **Repartiția Bernoulli.**

Fie că sunt efectuate *n* probe independente în fiecare din care evenimentul *A* apare cu o probabilitate egală cu *p*, și nu apare cu probabilitatea *q*=1-*p*. Dacă v.a *X* – numărul de apariții a evenimentului *A*, atunci această v.a. poate lua valorile 0,1,2,...,*n*. Probabilitatea apariției de *m* ori a evenimentului *A* se va calcula după formula Bernoulli:

.

Atunci legea de repartiție binomială  este:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | . . . | *n* |
| *P* |  |  |  | . . . |  |

* 1. **Repartiția geometrică.**

Dacă se efectuiază probe independente în fiecare din care evenimentul *A* apare cu o probabilitate egală cu *p*, și nu apare cu probabilitatea *q*=1-*p*. Dacă v.a *X* – evenimentul care constă în faptul, că evenimentul *A*, nu s-a realizat în primele (*n*-1) probe, dar s-a realizat în proba cu numărul *n*, atunci această v.a. poate lua valorile 0,1,2,...,*n,...*.

V.a. X are o repartiție geometrică, dacă tabela de repartiție are aspectul

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 | . . . | *n* | . . . |
| *P* |  |  |  | . . . |  | . . . |

* 1. **Repartiția hipergeometrică.**

Fie că înrtr-o cutie sunt *N* bile: *M* bile albe și *N - M* bile negre. Experiența constă în extragerea succesivă din cutie a *n* bile. Dacă se *X* - v.a. care semnifică numărul de bile albe extrase, atunci această variabilă poate lua valorile 0,1,2,...,*r*=*min*(*M*,*n*). Probabilitatea că *X* primește valoarea *i*, se va calcula după formula:  și deci obținem tabela de distribuție

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | . . . | *r* |
| *P* |  |  |  | . . . |  |

* 1. **Repartiția Poisson.**

Se spune, că v.a *X* este repartizată după legea Poisson, dacă tabela de distribuție a acesteia este

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | . . . | *n* | . . . |
| *P* |  |  |  | . . . |  | . . . |

în care probabilitățile sunt calculate, după formula



Aici  este numărul mediu de apariții a evenimentului *A* într-o unitate de timp.

**5. Funcția de repartiție. Variabile aleatoare continue**

Dacă v.a. *X* ia valori, care acoperă un interval (*a*,*b*) și, ca urmare, nu se pot enumera toate valorile ei, atunci o astfel de v.a. se numește continue.

În cazurile cînd este cunoscută variabila aleatoare *X*, deseori apare problema determinării probabilității că această v.a. primește o valoare mai mică ca un număr dat  Această problemă se rezolvă cu ajutorul funcției de repartiție.

*Definiția 1.* Se numește **funcție de repartiție** a v.a. *X* funcția ,egală cu probabilitatea că *X* primește valori mai mici ca *x*, adică

.

Dacă este cunoscută funcția de repartiție, atunci este simplu de a calcula probabilitatea, că *X* ia o valoare din semiintervalul [*a*,*b*):



Funcția de repartiție poate fi definită atît pentru v.a. continue, cît și pentru cele discrete. Dacă *X* este o v.a. discretă, cu tabelul de distribuție

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | *x*1 | *x*2 | *x*3 | ... | *x*n |
| *P* | *p*1 | *p*2 | *p*3 | … | *p*n |

atunci funcția de repartiție are aspectul , sau



Graficul funcției de repartiție a unei v.a. discrete este graficul funcției etajate, sau funcției în scară.

Exemplu. Se consideră variabila aleatoare discretă *X* cu tabelul de distribuție

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *P* | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

a) să se determine funcția de repartiție și să se construiască graficul acesteia; b) să se calculeze probabilitatea că *X* primește o valoare din semiintervalul [4,6).

*Rezolvare.* Reeșind din definiția funcției de repartiție, obținem:

 sau 









0.55



1



0.25

b) Probabilitatea că *X* primește o valoare din [4,6) calculăm folosind faptul, că sensul probabalistic a funcției de repartiție constă în faptul, că aceata-i probabilitate:

.

O funcție de repartiție posedă următoarele proprietăți:

1. Funcția de repartiție este o funcție nedescrescătoare, continue la stînga, care primește valori din intevalul [0,1], adică pentru ,
2. (probabilitatea evenimentului imposibil),  (probabilitatea evenimentului sigur).
3. Probabilitatea, că *X* ia o valoare din semiintervalul [*a*,*b*) este egală cu creșterea funcției de repartiție pe acest interval:  De aici oținem:

;

:

.

Exemplul 2. Funcția de repartiție a variabilei aleatoare continue *X* este

a) să se construiască graficul funcției; b) să se determine probabilitatea că v.a primește o valoare din intervalul (0.3,0.7).

*Rezolvare*. a) graficul funcției este prezentat mai sus.

b) Probabilitatea se va calcula folosind definiția funcției de repartiție;

0.4

0.6

1.

0.

0.4

0.6

1.0

x

F

0.5·(1-cos0.7*x*)- 0.5·(1-cos0.3*x*)= 0.5·(cos0.3 - cos0.7)= =0.5·0.1905=0.0952.

*Observație*. Orice funcție nedescrescătoare, continue la stănga, pentru care și  este o funcție de repartiție ale unei variabile aleatoare.

**6. Funcția de densitate de repartiție**

O variabilă aleatoare poate fi definită nu numai cu ajutorul funcției de repartiție, dar și cu funcția de densitate de probabilitate.  
 Să considerăm v.a. continue *X* , funcția de repartiție a căreia este *F*(*x*). Probabilitatea, că *X* ia o valoare din intervalul se determină, folosind funcția de repartiție;

.

Împărțim ambele părți ale egalității la creșterea argumentului:



Dacă trecem la limită, cînd  obținem;

.

Funcția  se numește **funcție de densitate de probabilitate**. Din egalitatea precedentă rezultă, că funcția de densitate de probabilitate este primitiva funcției de repartiție.

Deoarece

,

atunci se poate scrie, că , unde este o mărime infinit mai mică ca  și

deci, probabilitatea, că v.a. *X* primește o valoare dintr-un interval de lungime foarte mică este proporțională cu lungimea acestui interval și cu valoarea . Graficul funcției  se numește graficul funcției de densitate de probabilitate.

f(x)

x

f(x)

x

dx

Probabilitatea că v.a. *X* ia o valoare din intervalul *dx* este egală cu aria trapezului curbliniu, baza căruia este egală cu *dx*, iar înălțimea - .

Din cele spuse, rezultă

*Definiția 1.* Variabila aleatoare *X* este v.a. continue, dacă funcția ei de repartiție *F*(*x*) este continue pe toată axa 0*x*, iar funcția de densitate de probabilitate există pretutindeni cu excepția, poate, a unui număr finit de puncte.

Se poate observa, că funcția de repartiție este primitiva funcției de densitate de probabilitate, deci avem

*Definiția 2.* Probabilitatea ca v.a. *X* să ia o valoare din intervalul [*a*,*b*], este egală cu integrala definită pe intervalul dat de la funcția  de densitate de probabilitate:

.

Astfel, putem menționa următoarele proprietăți ale funcției de densitate de probabilitate;

1. ;
2. . Geometric semnificația acestei relații este urmîtoarea: aria figurii mărginită de curba funcției de densitate de probabilitate și axa 0*x* este egală cu 1;
3. **.

Exemplul 1. Densitatea de probabilitate a v.a. continue *X* este dată de funcția:

(*A*=const).

a). Să se determine coeficientul necunoscut *A*; b) Să se calculeze probabilitatea că *X* primește o valoare din intervalul (0.1,0.5); c)să se construiască graficul funcției de densitate de probabilitate.

*Rezolvare*. a) Valoarea coeficientului *A* îl determinăm din condiția: . Avem

; ; ; 2*A*=1; *A*=0.5. Prin urmare, funcția de densitate de probabilitate are aspectul: .

f(x)

x

0.4

0.8

1.0

0.0

0.4

0.8

1.0

b) Probabilitatea că *X* ia o valoare din intervalul (0.1,0.5) o calculăm, folosind definiția funcției de densitate de probabilitate:



c) În figura dată este reprezentat graficul funcției de densitate de probabilitate.

Exemplul 2. Variabila aleatoare *X* este distribuită după legea Caushy:

*,* unde coeficienții *A* și *B* sunt constanți.

Să se determine: a) coeficienții *A* și *B*; b) funcția de densitate de probabilitate; c) probabilitatea că *X* va lua cel puțin odată o valoare din intervalul (0,2) în rezultatul a 3 probe independente.

*Rezolvare*. a) Din proprietățile funcției de repartiție avem sistemul de ecuații:

 ** **

Deci funcția de repartiție are aspectul: **. b) Deoarece *F*(*x*) este primitiva funcției de densitate de probabilitate, avem:**.

c) Probabilitatea că *X* ia o valoare din intervalul (0,2) vom calcula după formula  :

. Atunci probabilitatea că *X* va lua cel puțin odată o valoare din intervalul (0,2) ) în rezultatul a 3 probe independente. Se calculă cu ajutorul formulei Bernoulli 

1.0

F(x)

0

x

0.5

-10

f(x)

x

-10

10

0.1

0.3

0.4

Pe figurile de mai sunt reprezentate graficele funcției de densitate de probabilitate *f*(*x*) și a funcției de distribuție *F*(*x*) pentru repartiția cercetată.

Pentru variabilele aleatoare continue sunt definite unele mărimi care au aplicații importante.

*Definiția 3.***Mod** sau **punct modal** ** al v.a. continue X se numește o așa valoare a ei în care funcția de densitate de probabilitate are maximum local.

Deci punctul modal este o așa valoare a abcisei în care funcția *f*(*x*) are maxim. Funcția de densitate de probabilitate poate fi unimodală, bimodale sau multimodală.

*Definiția 4.* **Mediana** ** a v.a. continue *X* se numește valoarea pentru care are loc egalitatea:

.

Geometric mediana este valoarea abcisei, care împarte aria figurii mărginită de curba funcției de densitate de probabilitate și axa abciselor în două parți egale.Valoarea funcției de repartiție în punctul este egală cu



Astfel, în exemplul 2 *=*=0.

**7. Caracteristici numerici ai v.a. continue**

În aplicații deseori nu este necesară cunoșterea tuturor valorilor pe care le poate lua v.a. și a probabilitîților respective. În multe cazuri este suficientă cunoașterea unor mărimi numerice care furnizează informația necesară pentru caracterizarea v.a. Așa mărimi se numesc caracteristici numerici.

Ca și-n cazul variabilelor aleatoare discrete, caracteristicii numerici ale variabilelor aleatoare continue sunt: valoarea medie, dispersia, abaterea medie patratică. Proprietățile acestor caracteristici numerici sunt aceleiași atît pentru v.a. discrete, cît și cele continue. Diferă doar formulele de calcul.

*Definiția 1.***Valoare medie** a v.a. continue *X*, valorile căreia aparțin axei 0*x* șu cu funcția de densitate de probabilitate **este egală cu integrala improprie

.

Valoarea medie indică poziția unui punct de pe axă, în jurul căruia sunt repartizate valorile v.a.

*Definiția 2.***Dispersiea (varianța)** v.a. continue *X* cu funcția de densitate de probabilitate ** este egală cu integrala improprie de la patratul abaterii v.a. de la valoarea sa medie:

.

O formulă utilă pentru calculul dispersiei este  .

Dispersia este o caracteristică a gradului de împrăștiere a valorilor variabilei aleatoare în jurul valorii sale medii.

Deoarece unitatea de măsură a dispersiei nu coincide cu cea a v.a., s-a întrodus o altă caracteristică a v.a. și anume abaterea medie patratică care se calculează după formula

** sau *.*

Exemplul 1. Funcția de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare continue *X* se supune *legii* *arcsinusului*:

.

Să se calculeze a) valoarea medie; b) dispersia și abaterea medie patratică.

*Rezolvare*. a) Deoarece funcția de densitate de probabilitate este nulă înafara intervalului (-*a*,*a*),

avem: =

b) Pentru calculul dispersiei este necesară valoarea medie a v.a. **

= .

Calculăm ultima inregrală. 

=; Atunci .

Atunci dispersia  iar abaterea medie patratică **.

Momentele inițiale și centrate în cazul v.a. continue se calculează după formulele din p.3.2. Se observă, că momentul centrat de ordinul 2 este de fapt dispersia variabilei aleatore. În afară de dispersie, care este cea mai importantă caracteristică a v.a., sunt utilizate și alte momente centrate de diferit ordin în scopul obținerii informației suplimentare despre v.a. cercetată. Astfel, momentele *,* și ** sunt folosite pentru calculul **coeficienților de asimetrie și exces**: ** și **, respectiv.

Dacă coeficientul de asimetrie este pozitiv, atunci valoarea modală se va situa la stînga de valoarea medie. Pentru coeficientul de asimetrie negativ, valoarea medie se află la dreapta valorii medii. Așa dar coeficientul de asimetrie indică asimetria de stănga sau cea de dreapta.

f(x)

x



x



f(x)

Excesul indică gradul de ” turtire“ a graficului funcției de densitate de repartiție. Astfel, pentru repartiția norrmală, ** și deci **. În așa condiții, dacă pentru curba unei repartiții**, atunci vîrful curbei este mai ascuțit în raportt cu graficul funcției normale de repartiție; dacă **, atunci graficul este mai ” turtit“. Altfel spus, excesul caracterizează gradul de aplatizare a graficului funcției de densitate de probabilitate.

Exemplul 2. Să se calculeze coeficientul de asimetrie pentru v.a. *X* – numărul de apariții a unui eveniment în rezultatul efectuării a *n* probe independente.



f(x)

x





*Rezolvare*. V.a. *X* se supune legii binomiale Bi(*n*,*p*). Vom asocia fiecărei probe o variabilă aleatoare **,

tabela de repartiție a căreia are aspectul

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
|  | *q* | *p* |

Calculăm valoarea medie și dispersia v. a. ** M[**]=0*· q* + 1· *p*= *p*. Cum *X*=**, aplicînd proprietățile valorii medii, obținem M[**]=*n*· *p*. Similar, obținem că M[**]=*n*· *p*. Atunci dispersia

D[**]=M[**] – **= *n*· *p* - * n*· *p*·(1-*p*) = *n*· *p*·*q*. Momentul centrat de ordinal 3 în acest caz va fi egal cu  =  = *n*· *p*·*q*·(*q-p*).

Atunci coeficientul de asimetrie **.

Exemplul 3. Densitatea de probabilitate a v.a. continue *X* este dată de funcția:

(*A*=const).

a). Să se determine coeficientul necunoscut *A*; b) funcția de repartiție; c) valoarea medie; d)dispersia; e) coeficienții de asimetrie și exces.

*Rezolvare*. a) Din definiția funcției de densitate de probabilitate rezulră, că pentru ca o funcție nedescrescătoare nenegativă să fie funcție de densitate, trebuie ca aria figurii, mărginită de curba funcției și axa 0*x* trebuie să fie egală cu unu: . Atunci obținem

, , ; Deci funcția de densitate de probabilitate este: .

b) Funcția de repartiție în acest caz are aspectul  pe inetrvalul

(0, 2) și în final: .

c) Calculăm valoarea medie =

d) Pentru calculul dispersiei, aflăm momenntul inițial de ordinul 3. Avem  =

 Atunci dispersia D[**]=M[**] – **= .

e) Așa cum în formulele de calcul a coeficientului de asimerie este folosit momentul centrat de ordinul 3, îl determinăm: momentul inițial de ordinul 3

 = Momentul inițial de ordinul 4 =  Așa cum momenele inițiale și cele centrate sunt legate prin relațiile  și  , obțnem  și . Coeficientul de asimetrie **.

Coeficientul de exces **.

1. **Repartiții clasice ale v. a. continue.**

**8.1. Repartiția uniformă**

*Definiție*. Se spune, că v.a. continue are **repatiție continue** pe intervalul [*a*, *b*], dacă densitatea de probabilitate a ei are aspectul

unde *C* = *const*.

Vom determina valoarea constantei *C*. Deoarece aria figurii, mărginită de curba funcției de densitate de probabilitate și axa 0*x* trebuie să fie egală cu unu, avem:

, sau , de unde rezultă că . Prin urmare, funcția de densitate de probabilitate este .

Așa cum este cunoscută densitatea de probabilitate, se poate scrie funcția de repartiție

. Deci 

Graficele acestor funcții sunt următoarele:

1/(b-a)

f(x)

a

b

x

1

F(x)

a

b

x

Determinăm caracteristicii numerici ale repartiției uniforme.

.

Din formula dată rezultă, că la repartiția uniformă valoarea medie coincide cu centrul segmentului [*a*, *b*].

Repartiția fiind simetrică, mediana  este egală cu valoarea medie, iar valoare modală repartiția nu are.

Calculăm dispersia. Avem. Deci

D[**]=M[**] – *=*. Astfel 

Reeșind din simetria repartiei, momentul centrat de ordinal 3 va fie egal cu 0, ce implică afirmația că coeficientul de asimetrie =0. Se poate arăta că momentul centrat de ordinul 4 , deunde urmează că excesul .

Probabilitatea că variabila aleatore *X* , uniform repartizată pe [*a*, *b*] să ia o valoare din intervalul  este egală cu .

**8.2. Repartiția exponențială**

*Definiție*. V.a. continue *X*, la care funcția de densitate de repartiție este  are o **distribuție exponențială** de parametru .

Așa repartiții sunt utilizate îndeosebi atunci, cînd se cercetează durata de funcționare fără refuz atît a sistemelor mecanice și electronice, cît și elementelor acestora. Altfel spus, cu ajutorul acestei repartiții sunt studiate intervale aleatoare de timp dintre două evenimene rare succesive. Parametrul are semnificația intensității refuzurilor.

Funcția de repartiție

, sau .

Graficele acestor două funcții sunt reprezenrate mai jos.

0

1

x

F(x)

0

2

4

0.4

0.8

1.2

x

f(x)

Detetminăm mărimile caracteristice. Valoarea medie

.

Pentru a calcula dispersia, determinăm momentul inițial de ordinul 2:

.

Dispersia: D[**]=M[**] – *=*.

De aici abaterea medie patratică .

Prin urmare, la repartiția exponențială abaterea medie patratică coincide cu valoarea medie.

Probabilitatea că variabila aleatore *X* , repartizată exponențial, să ia o valoare din intervalul  este egală cu .

De notat, că indeferent de valoarea parametrului coeficienții de asimetrie și exces sunt egali cu:  și , respectiv.

Exemplu. V.a. continue *X* are repartiție exponențială cu funcția de repartiție . Să se determine: a) valoarea medie și dispersia; b) probabilitatea că X primește o valoare din intervalul (0.4, 4.2).

*Rezolvare*. a)  

b) Folosind formula obținută anterior,avem .

**8.3. Repartiția normală**

Una din cel mai frecvent repartiții întălnită în aplicații este repariția normală. Această repartiție este necesară la analiza erorilor de măsurare, pentru controlul proceselor tehnologice, la analiza și prognozarea diferitor fenomene în economie, medicină și în alte domenii. Importanța acestei repartiții constă în faptul că ea este o repartiție care aproximează celelalte tipuri de repartiții.

*Definiție*. V.a. continue *X* are **distribuție normală **cu parametrii *m* și dacă funcția de densitate de probabilitate este 

Funcția de densitate de probabilitate normală are proprietățile:

1. Așa cum , ;
2. : 
3. Graficul funcției este simetric față de dreapta *x* = *m*, axa 0*x* este asimtotă la grafic.
4. Punctul (*m*, *f*(*m*)) este punct de maxim al funcției de densitate de probabilitate, de unde rezultă că valoarea medie M[*X*], modul și mediana  coincid.

m

x

f(x)

1. Punctele cu abciselesunt puncte de inflexiune.
2. Coeficientul de asimetrie  și de exces a repartiției normale sunt egali cu zero.
3. Forma și mărimea graficului nu se scimbă pentru diferite valori ale parametrului *m* dacă abaterea medie patratică este una și aceiași. Pentru diferite valori ale abaterii medii patrate și *m* constant, forma graficului seschimbă: cu cît este mai mare cu atăt graficul funcției este mai “turtit”.

**



x

x

fx)



m=1

Funcția de densitate de probabilitate normală, fiind cunoscută, determină formula funcției de repartiție:

.

Graficul acestei funcții urmează

În aplicații pentru simplificarea calculelor este utilizată funcția lui Laplace, care se află cu funcția de repartiție a repariției normale în următoare relație:

x

0

1

F(x)

m

0.5

,

unde .

Densitatea de probabilitate normală cu parametrii **** este densitatea repartiției normale standard **** și are aspectul:

.

Funcția Laplace este impară: . Valorile acestei funcții și a funcției sunt date ăn tabele.

**8.3.1. Aplicații ale repartiției normale**

* Probabilitatea că v.a. *X* cu o repartiție normală să primească o valoare din intervalul este egală cu

.

Dacă în această formulă se va efectua schimbul de variabilă , se obține formula finală de calcul

.

* ***Teoremă*.** Valoarea medie și dispersia repartiței normale sunt egale cu:

, .

* Probabilitatea, ca valorea absolută a abaterii v.a. *X* repartizată normal de la valoarea sa medie *m* să fie mai mică numărul , se calculează după formula

.

* Aplicînd formula precedentă, obținem *regula celor trei sigma*:

.

De aici rezultă, că evenimentul ca o v.a. cu repartiție normală să primească o valoare din intervalul  este un eveniment practic sigur.

Exemplul 1. V.a. *X* este repartizată normal cu valoarea medie =30 și dispersia . Să se calculeze probabilitatea ca X să ia o valoare din intervalul (20, 35).

*Rezolvare*. Datele cunoscute ale problemei sunt*: m*=30, ,  Atunci



.

Exemplul 2. În rezultatul măsurării diametrului unui cilindru cu-n aparat de măsurare greșala se supune repartiției normale cu abaterea medie patrată egală cu 0.15 mm. Ne luînd în seamă erorile sistematice să se calculeze probabilitatea că eroarea admisă la măsurare după valoarea absolută nu va depăși mărimea 0.2 mm.

*Rezolvare*. Datele cunoscute ale problemei sunt*:* , ,  Atunci

.

**8.4. Repartiția Student**

Dacă funcția de densitate de probabilitate a variabilei aleatore continue *X* este

 ,

atunci se spune că X are o repartiție Student cu *k* grade de libertate.

0.2

0.4

0.6

-4

-2

0

2

4

x

f(x)

Această repartiție este larg utilizată în statistică, de exemlu, la prelucrarea datelor observațiilor. Graficul funcției este simetric față ordonatelor. Valorile caracteristicilor numerici ai repartiției sunt următoarele: valoarea medie; mediana ; moda ; coeficientul de asimetrie . Dispersia repartiției .

Se demonstrează, că dacă , atunci densitatea de probabilitate Student este repartiția normală *N*(0,1).

Astfel, pe desenul dat mai turtit este graficul repartiției Student, pentru k=1 grade de libertate; a doua curbă este graficul funcției de densitate de probabilitate normală *N*(0,1).

1. **Legea numerilor mari**

Teoria probabilităților studiază legitățile fenomenelor și proceselor aleatoare în masă. Ea nu poate apriori să prezică ce valoare va primi v.a. *X* în rezultatul efectuării unei probe. Se pare, că, neavînd o informație precisă despre fiecare v.a. în parte, este imposibil de a prognoza comportamentul valorii medii aritmetice a unui număr mare de variabile aliatoare. În realitate, dacă sunt satisfăcute unele condiții, comportamentul integral a unui număr mare de variabile aleatoare practic își pierde caracterul aleatoriu.

Legea numerilor mari afirmă, că prin repetarea unui experiment de un număr suficient de mare de ori, în mod independent, frecvențele relative ale evenimentelor se apropie de probabilitatea evenimentelor.

Condițiile, care trebuie respectate pentru a aplica legea numerilor mari sunt date de un șir de teoreme, printre care sunt teoremele lui Cebășev și Bernoulli.

**Teorema lui Cebășev** afirmă, că în rezultatul a unui număr mare de experimente independente numărul mediu aritmetic a valorilor v.a *X* converge după probabilitatecătre valoarea sa medie, adică

, unde .

Din **teorema Bernoulli** rezultă că, numărul de probe crește nemărginit, frecvența relativă a evenimentului aleatoriu converge după probabilitate către probabilitatea acestui eveniment și anume:

.

Aici *p* – probabilitatea apariției evenimentului într-o probă care nu se schimbă de la un experiment la altul, iar *q*=1-*p –* probabilitatea neapariției evenimentului. În afară de aceasta, se poate considera, că .

Exemplul 1. Moneta se aruncă de 500 ori. Să se estimeze probabilitatea abaterii frecvenții apariției stemei de la probabilitatea acestui eveniment cu o mărime mai mică decît 0.05.

*Rezolvare*. Datele problemei: *n*=500, *p*=*q*=1/2, . Folosind inegalitatea din teorema Bernoulli



De aici, avînd în vedere că din inegalitatea  rezultă că  și prin urmare probabilitatea ca numărul de apariții a stemei să aparțină intervalului [225,275] este mai mare ca 0.8.

Exemplul 2. Probabilitatea apariției evenimentului *A* în fiecare probă din1000 probe independente este una și aceiași și egală cu 0.25. Să se estimeze marginea inferioară a probabilității, că numărul aparițiilor evenimentului satisface inegalitatea 

*Rezolvare*. Datele problemei: *n*=1000, *p*=0.25, *q*=0.75.

Valoarea medie *M*[*X*]= , dispersia *D*[*X*]= .Din inegalitatea lui Cebășev  , pentru , rezultă că

, sau .