

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor

GRAFICA PE CALCULATOR

TEMA 6. ELEMENTE GEOMETRICE ÎN REPREZENTAREA GRAFICĂ

l. u., dr. NASTAS Andrei

- 6.1. Sisteme de coordonate. Coordonate carteziene
- 6.2. Coordonate polare
- 6.3. Conversia între sistemele de coordonate carteziene și polare (în spațiul bidimensional, 2D)
- 6.4. Linii
 - 6.4.1. Ecuația parametrică a unei drepte
 - 6.4.2. Ecuația parametrică a unei drepte într-un sistem cartezian 3D
 - 6.4.3. Algoritm de determinare a distanței dintre un punct și o dreaptă într-un sistem cartezian de coordonate 2D
 - 6.4.4. Determinarea intersecției a două drepte
 - 6.4.5. Algoritm de determinare a apartenenței unui punct de pe o linie dată la un segment dat
- 6.5. Secțiuni conice
- 6.6. Cercul
- 6.7. Poligoane
 - 3.7.1. Convexitatea și concavitata poligoanelor
- 6.8. Plane
 - 6.8.1. Algoritm de caracterizare a unui vector normal la plan

Structura aplicațiilor grafice pe calculator

Realitatea înconjurătoare poate fi modelată grafic prin combinarea unor elemente geometrice de bază la care se specifică anumite atribute grafice (culoare, textură, strălucire, etc.), reprezentarea având anumite caracteristici în raport cu realitatea (proporții, scară).

Elementele necesare pentru reprezentarea grafică

Elementele necesare pentru reprezentarea grafică sunt:

- Primitivele (elemente) geometrice,
- Elemente de poziționare.

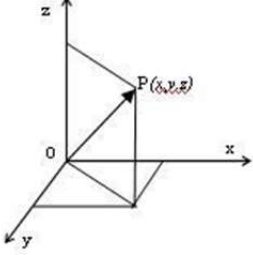
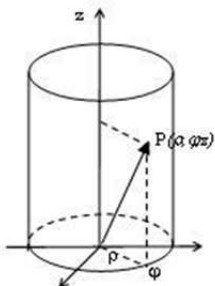
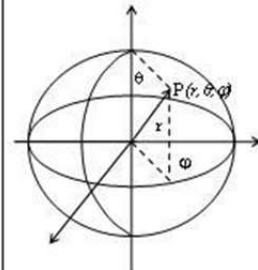
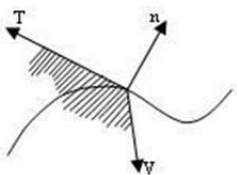
Elemente geometrice. Grafica pe calculator se bazează pe modelul geometriei euclidiene utilizând următoarele elemente:

- Elementul geometric fundamental *punctul*;
- Elementul de bază al oricărei construcții geometrice *linia – dreapta sau curbă* (dreapta este considerată un caz particular de curbă);
- Suprafețe plane:
 - poligonale;
 - mărginite de curbe.
- Suprafețe curbe sau rețele (mesh-uri);
- Reprezentări spațiale.

Elementele necesare pentru reprezentarea grafică

Elemente de poziționare. Pentru orice reprezentare grafică este nevoie de un sistem de coordonate. În general sistemele de afișare grafică sunt sisteme bidimensionale, așa că de regulă modelele sunt reprezentări 2D relative la sistemul de coordonate al ecranului. Reprezentările 3D se obțin prin modelare matematică mai complexă pe baza teoremelor geometriei proiective. Generarea celei de a treia dimensiune pe dispozitive de afișare bidimensionale se face prin tehnici de simulare menite să creeze iluzia optică pentru senzația de profunzime.

Există mai multe sisteme de coordonate care prezintă anumite facilități de reprezentare în diferite domenii așa cum se arată în tabelul 6.1:

Sistemul cartezian	Sistemul cilindric	Sistemul sferic	Sistemul intrinsec
			
x, y – coordonate de poziție în plan z - cota	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ $\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$	n – normala la traiectorie v – binormala T – tangenta Sistem de coordonate legat de traiectorie, utilizat mai ales în cinematică

6.1. Sisteme de coordonate. Coordonate carteziene

Sistemele de coordonate reprezintă o metodă de localizare a punctelor în spațiu, un mod de caracterizare a obiectelor geometrice (linii, cercuri, plane) prin ecuații algebrice, aceasta fiind concepția de bază a reprezentării în geometria analitică.

În geometrie, un sistem de coordonate reprezintă o modalitate prin care oricărui punct i se asociază în mod unic o mulțime ordonată de numere reale, numite coordonatele acelui punct. În spațiul euclidian sunt necesare trei coordonate (abscisa, ordonata și cota), în plan sunt necesare două (abscisa și ordonata), iar pentru localizarea punctelor pe o dreaptă este necesară doar o coordonată.

În geometria analitică, utilizarea sistemelor de coordonate permite transformarea problemelor de geometrie în probleme de algebră.

6.1. Sisteme de coordonate. Coordonate carteziene

O **coordonată carteziană** este un șir ordonat de numere, reprezentate prin (x, y) în spațiul bidimensional ($2D$) și (x, y, z) în spațiul tridimensional ($3D$), care descrie distanța de la origine la punct, măsurată de-a lungul fiecărei axe. Valorile pot fi pozitive sau negative. Axele sistemului sunt perpendiculare și se intersectează în originea sistemului de coordonate. Astfel sistem prezentat în figura 6.1 poate fi generalizat pentru a reprezenta punctul în spațiul n -dimensional nD prin șirul n (x_1, x_2, \dots, x_n) . Sistemul de coordonate în spațiul n -dimensional constă în n axe perpendiculare reciproc și intersectându-se în origine.

Originea unui sistem de coordonate este punctul de coordonate $(0, 0, \dots, 0)$ în care toate axele sistemului de coordonate se intersectează. Orice linie într-un sistem de coordonate poate fi folosită ca o axă pentru realizarea transformărilor geometrice. Axele principale sunt cele ce definesc sistemul de coordonate. Spre exemplu: în cazul sistemului de coordonate carteziene în $2D$, axele principale sunt cele definite de ecuațiile: $x = 0, y = 0$.

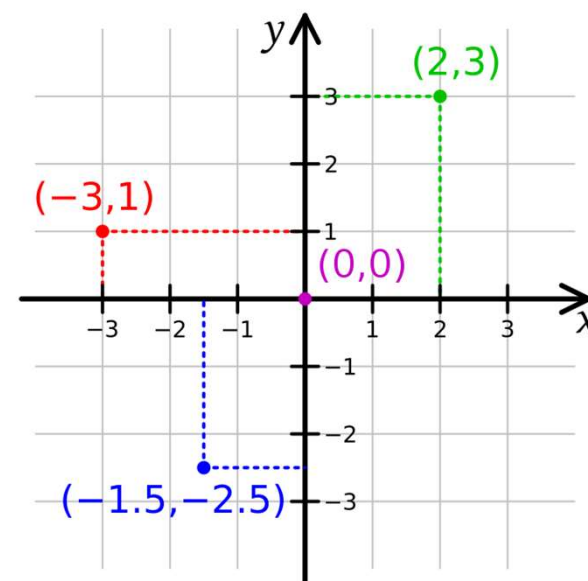


Fig. 6.1. Sistem de coordonate carteziene 2D

6.2. Coordonate polare

Coordonatele polare în $2D$ reprezintă o pereche ordonată (r, ϑ) definită astfel: pentru un punct P , r este distanța de la origine la P iar ϑ este unghiul dintre axa x și segmentul generat de punctul P și origine. Se pot considera mai multe valori valide pentru ϑ (valoare din intervalul $[0, 2\pi] + 2\pi$). Folosirea sistemului de coordonate polare poate simplifica în anumite cazuri calculele de reprezentare.

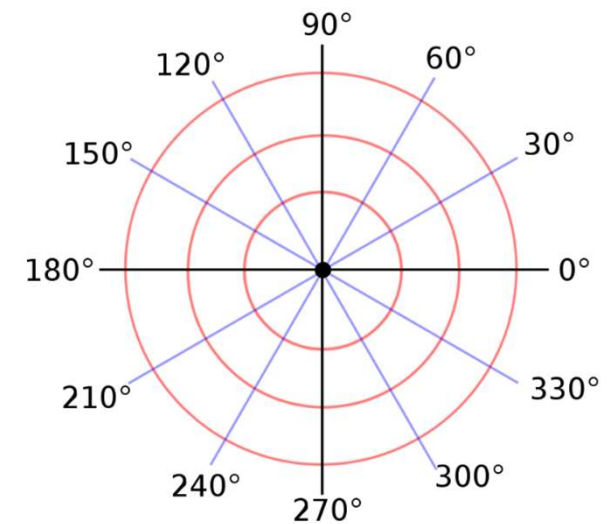


Fig. 6.2. Sistem de coordonate polare $2D$

6.3. Conversia între sistemele de coordonate carteziene și polare (în spațiul bidimensional, 2D)

Pentru conversia coordonatelor polare în coordonate carteziene se folosesc relațiile:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \quad (6.1)$$

Relațiile de conversie din coordonate carteziene în coordonate polare sunt:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (6.2)$$

O grilă bidimensională poate fi împărțită în patru subdiviziuni numite cadrane caracterizate prin semnul coordonatelor punctelor din fiecare zonă. Pentru un punct $M(x, y)$, primul cadran este caracterizat de relația $x \cdot y > 0$, al doilea cadran de relațiile $x < 0, y > 0$, al treilea cadran de relațiile $x < 0, y < 0$, al patrulea cadran prin relațiile $x > 0, y < 0$. Fiecare cadran se împarte în câte două octante numerotate în sens trigonometric (figura 6.4).

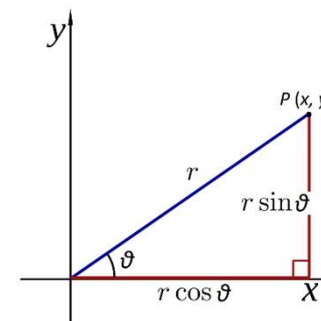


Fig. 6.3. Determinarea coordonatelor carteziene ale unui punct caracterizat prin coordonate polare

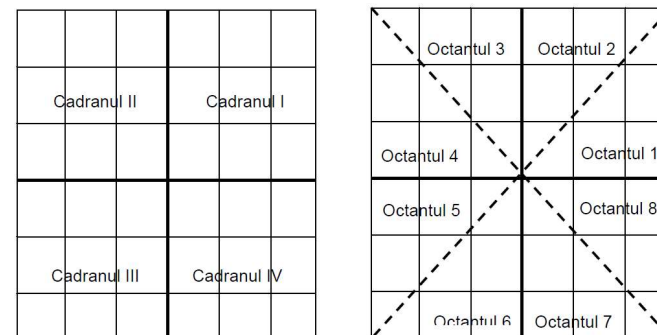


Fig. 6.4. Împărțirea unei grile bidimensionale în cadrane și octante

6.4. Linii

Fie o dreaptă ce trece prin punctele (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) într-un sistem de coordonate cartezian 2D (figura 6.5). Atunci ecuația dreptei caracterizată de pantă este:

$$y = m \cdot x + n, \quad (6.3)$$

unde panta dreptei este:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (6.4)$$

iar parametrul n reprezintă ordonata din punctul în care dreapta intersectează axa y .

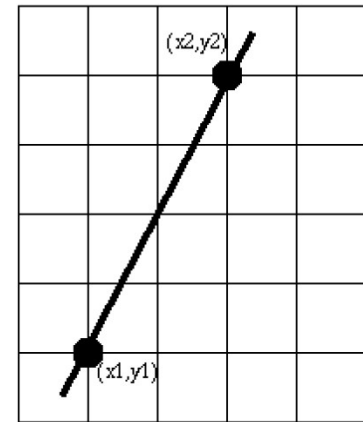


Fig. 6.5. Caracterizarea unei linii într-un sistem cartezian 2D

6.4.1. Ecuația parametrică a unei drepte

Fie dreapta d caracterizată de punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Forma parametrică a ecuației dreptei d este:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \end{cases}, 0 \leq t \leq 1. \quad (6.5)$$

Pentru $t = 0$ se obține chiar punctul $P_1(x_1, y_1)$, iar pentru $t = 1$ relațiile sunt verificate de punctul $P_2(x_2, y_2)$. Variația lui t între 0 și 1 conduce la obținerea punctelor de pe segmentul $[P_1P_2]$.

6.4.2. Ecuația parametrică a unei drepte într-un sistem cartezian 3D

Fie punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Ecuația parametrică a dreptei care trece prin cele două puncte este:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1), 0 \leq t \leq 1. \\ z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1) \end{cases} \quad (6.6)$$

Dacă se dorește caracterizarea unei drepte în spațiul cartezian 3D ce trece printr-un punct P_1 și este paralelă cu vectorul $V = [x_v, y_v, z_v]$, atunci:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot x_v \\ y = y_1 + t \cdot y_v, 0 \leq t \leq 1. \\ z = z_1 + t \cdot z_v \end{cases} \quad (6.7)$$

6.4.3. Algoritm de determinare a distanței dintre un punct și o dreaptă într-un sistem cartezian de coordonate 2D

Distanța între două puncte $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ este dată într-un sistem cartezian de coordonate 2D (figura 6.6) de teorema lui Pitagora:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (6.8)$$

Distanța între un punct și o dreaptă reprezintă lungimea segmentului ce are un capăt în P_1 și celălalt capăt în proiecția P_2 a lui P_1 pe dreaptă (figura 6.7).

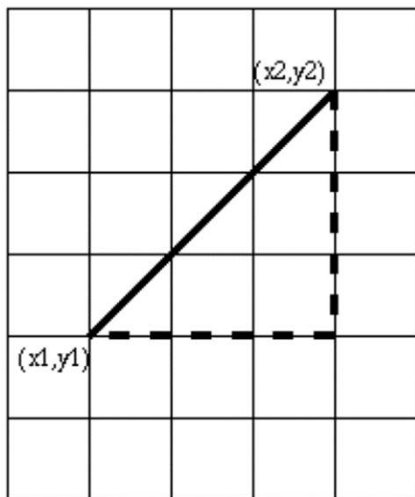


Fig. 6.6. Distanța dintre două puncte într-un sistem de coordonate carteziane 2D

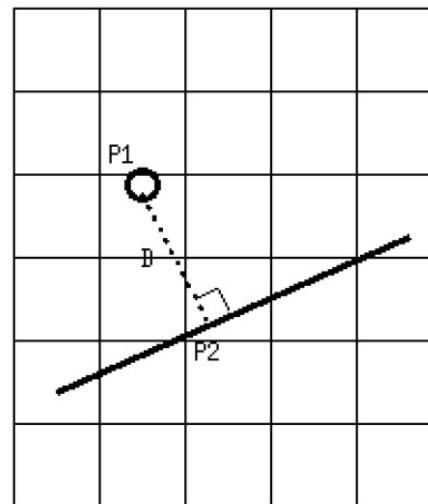


Fig. 6.7. Distanța dintre un punct și o dreaptă într-un sistem cartezian de coordonate 2D

6.4.3. Algoritm de determinare a distanței dintre un punct și o dreaptă într-un sistem cartezian de coordonate 2D

Algoritmul de determinare a distanței dintre P_1 și proiecția sa P_2 pe dreaptă este descris în continuare:

1. Se determină panta $m' = -1 / n$.
2. Se determină ecuația dreptei generate de segmentul $P_1 P_2$ astfel încât P_1 să aparțină dreptei (relația 6.3).
3. Se determină coordonatele punctului P_2 ca intersecție a celor două drepte, rezolvând sistemul de ecuații prin care se verifică faptul că P_2 aparține fiecăreia dintre cele două drepte.
4. Se calculează distanța dintre P_1 și P_2 , (conform relației 6.8).

6.4.4. *Determinarea intersecției a două drepte*

Fie două drepte d_1 și d_2 . Intersecția lor este punctul de coordonate (x, y) ce satisface ecuațiile dreptelor:

$$\begin{cases} y = m_1 \cdot x + n_1 \\ y = m_2 \cdot x + n_2 \end{cases} \quad (6.9)$$

Două drepte paralele nu vor avea puncte de intersecție. Pantele dreptelor paralele: sunt identice: $m_1 = m_2$. Două drepte paralele având termenii liberi identici, $n_1 = n_2$, se confundă. În cazul în care se dorește determinarea intersecției a mai mult de două drepte, trebuie folosită o metodă mult mai generală pentru rezolvarea ecuațiilor simultane, metoda eliminării (Gauss).

6.4.5. Algoritm de determinare a apartenenței unui punct de pe o linie dată la un segment dat

Pentru a determina dacă punctul $P_3(x_3, y_3) \in [P_1P_2]$ se parcurg următorii pași:

1. Se determină valoarea t din ecuația parametrică pentru x sau pentru y :

$$t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

2. Se pleacă de la ipoteza $x = x_3$ și se calculează t .

3. Dacă $0 \leq t \leq 1$, atunci $P_3 \in [P_1P_2]$.

6.5. Secțiuni conice

Secțiunile conice se obțin prin intersecția unui con cu un plan care nu trece prin vârful conului. Fie planul caracterizat de ecuația $ax + by + cz = 1$. Dacă unghiul dintre plan și axa conului este drept, intersecția planului cu suprafața conică are ca rezultat secțiunea circulară ($a = b = 0$, figura 6.8, *a*). Dacă unghiul dintre plan și axa conului este cuprins între valoarea unghiului ce descrie conul și unghiul drept, atunci intersecția planului cu conul este o elipsă ($a_2 + b_2 < c_2$, figura 6.8, *b*). Primul tip de secțiune conică prezentat (cercul) este prin urmare un caz particular de elipsă, pentru care unghiul dintre planul de intersecție și axa conului este unghiul drept, una dintre extremele domeniului ce definește secțiunea eliptică. În cazul în care unghiul format de planul de secțiune cu axa conului este egal cu unghiul ce descrie conul, intersecția cu pânza conului este practic vidă.

O parabolă se formează la intersecția unui plan cu conul, cu condiția ca planul să fie paralel cu o generatoare a conului ($a_2 + b_2 = c_2$, figura 6.8, *c*). Hiperbola se obține prin intersecția unui plan paralel cu axa conului ($a_2 + b_2 > c_2$, figura 6.8, *d*).

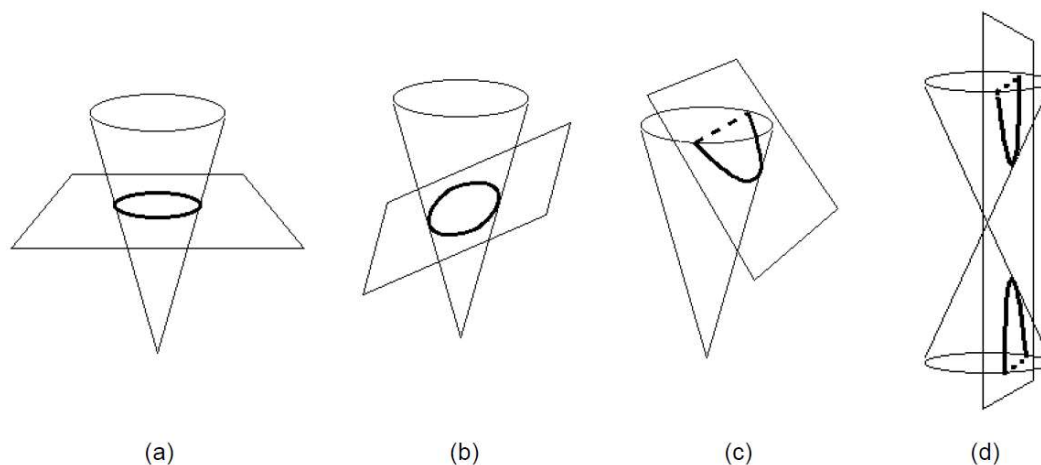


Fig. 6.8. Intersecția unui con cu un plan:(a) cerc; (b) elipsă; (c) parabolă; (d) hiperbolă

6.6. Cercul

Ecuția carteziană a unui cerc care trece prin originea sistemului de coordonate este (figura 6.9, a):

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \text{ unde } -r \leq x \leq r. \quad (6.10)$$

Într-un sistem de coordonate polare 2D, un cerc având centrul în originea sistemului de coordonate (figura 6.9, b) este descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} r = r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (radiani)} \end{cases} \cdot \quad (6.11)$$

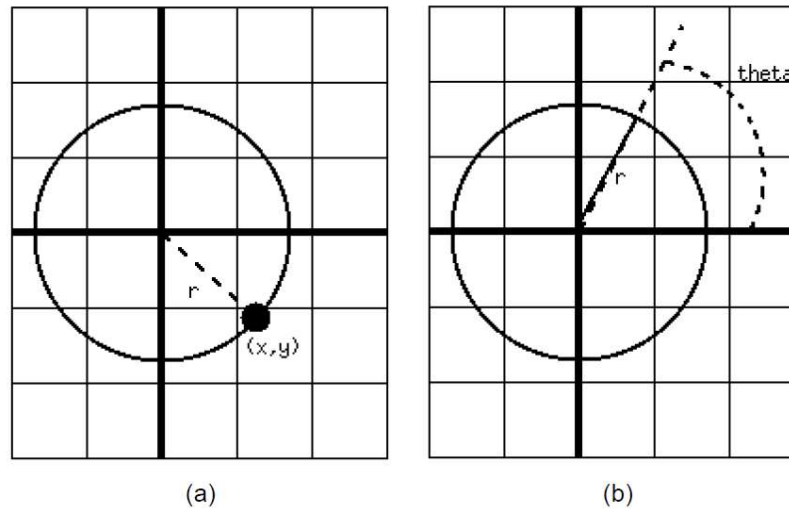


Fig. 6.9. Descrierea cercului cu centrul în originea unui sistem de coordonate: (a) carteziene; (b) polare

6.6. Cercul

Ecuția tangentei la un cerc C într-un punct dat $M_1(x_1, y_1)$ se determină folosind derivata ecuației cercului. Fie cercul $C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ cu centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r , iar punctul $M_1(x_1, y_1)$ un punct dat pe cercul C . Vom face substituiri (dedublări): $x^2 \rightarrow xx_1$, $x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (x+x_1)$, $y^2 \rightarrow yy_1$, $y \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (y + y_1)$, $xy \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (xy_1+x_1y)$.

Înlocuind în ecuația cercului, vom obține:

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x + x_1)x_0 + x_0^2 + yy_1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (y + y_1)y_0 + y_0^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 - xx_0 - x_1x_0 + x_0^2 + yy_1 - yy_0 - y_1y_0 + y_0^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x(x_1 - x_0) - x_0(x_1 - x_0) + y(y_1 - y_0) - y_0(y_1 - y_0) = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2.$$

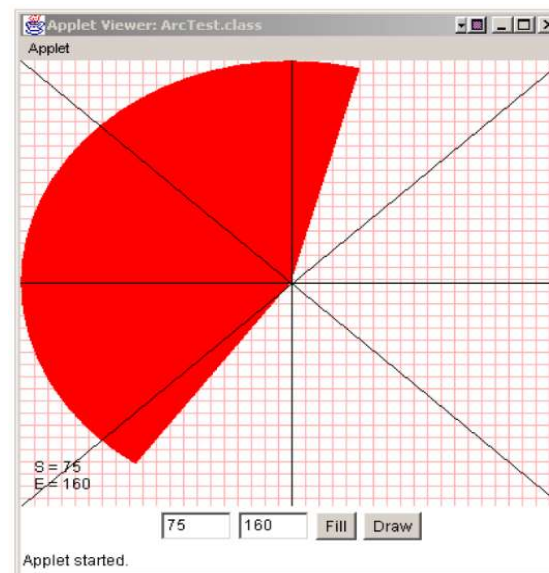


Fig. 6.10. Trasarea sectoarelor de cerc în coordonate carteziene

6.7. Poligoane

O **polilinie** reprezintă o secvență de linii (muchii) ce leagă între ele o secvență de puncte (vârfuri). O *polilinie este închisă* (figura 6.11, a) dacă cele două capete ale sale coincid. O *polilinie este simplă* (figura 6.11, b) dacă nu se întretaie (spre exemplu, două vârfuri coincid, un vârf al poliniei se află în interiorul unei muchii distincte sau două muchii se intersectează). O polilinie în plan poate fi reprezentată ca o simplă serie de coordonate (x, y) ale vârfurilor sale.

Modalitatea de redare a proprietăților grafice ale polilinieii (rendering) este determinată de un set de proprietăți numite **atribute grafice**. Acestea includ culoarea liniei, lățimea liniei, stilul liniei (solidă, punctată, întreruptă), modalitatea de unire a segmentelor consecutive (rotunjită, dură) etc.

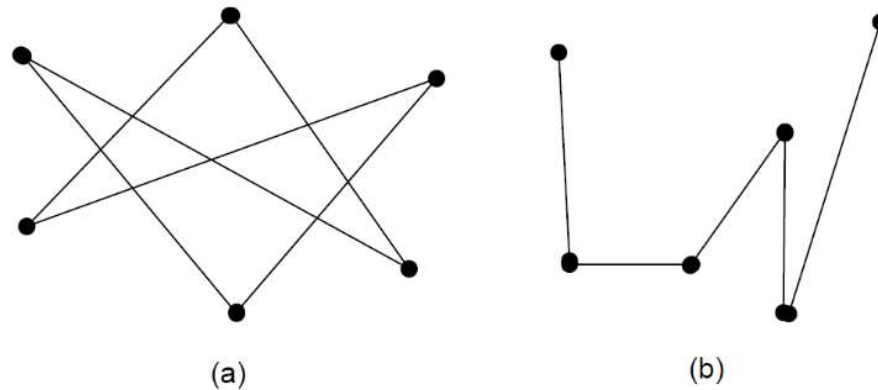


Fig. 6.11. Polilinii: (a) polilinie închisă; (b) polilinie simplă

6.7. Poligoane

Multe sisteme grafice furnizează cazuri speciale de curbe: cercuri, elipse, suprafețe circulare, curbe Bezier sau B-spline. Vom considera curbele ca o generalizare a poliliniilor. Unul dintre argumente este acela că, practic, multe sisteme grafice de desenare realizează curbele prin algoritmi de aproximare printr-un număr cât mai mare de polilinii cât mai mici.

Un **poligon** este o figură plană compusă din vârfuri și muchii cu condiția ca seria segmentelor (muchiiilor) sale să formeze o polilinie închisă plană.

6.7.1. Convexitatea și concavitata poligoanelor

Un poligon este numit convex dacă pentru orice puncte P_1, P_2 aflate în interiorul poligonului, toate punctele de pe segmentul $[P_1P_2]$ aparțin interiorului poligonului. Un poligon este concav dacă este neconvex, deci un poligon pentru care există două puncte P_1, P_2 din interiorul poligonului cu proprietatea că segmentul $[P_1P_2]$ are puncte ce nu aparțin interiorului poligonului. Un poligon ce se autointersectează este un poligon concav pentru care cel puțin două laturi se intersectează într-un punct, altul decât vârfurile lor.

Gradul unui poligon este dat de numărul laturilor (poligoanele din figurile 6.12, *a*, *b* sunt de grad cinci, numite și pentagoane, iar cel din figura 6.12, *c* este de grad patru). Poligonul din figura 6.12, *a* este convex, în timp ce poligoanele din figurile 6.12, *b*, *c* sunt concave (există două puncte aparținând interiorului poligonului, astfel încât segmentul având capetele cele două puncte să nu aparțină în totalitate interiorului poligonului, v. segmentul $[P_1P_2]$).

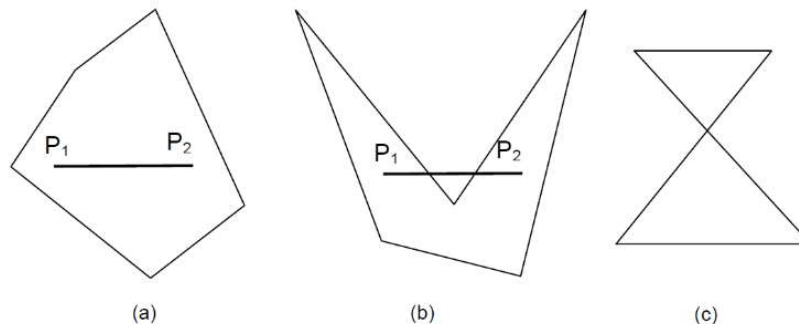


Fig. 6.12. Tipuri de poligon: (a) convex; (b) concav; (c) poligon ce se autointersectează

6.8. Plane

Un **plan** este o suprafață continuă extinsă pe două direcții. Planul este definit de trei puncte necoliniare sau de un punct și un vector (paralel cu planul sau perpendicular pe acesta).

Ecuția generală a planului este dată de:

$$Ax + By + Cz = 0 \text{ sau} \quad (6.12)$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad (6.13)$$

$$A' = \frac{A}{d}; B' = \frac{B}{d}; C' = \frac{C}{d}; D' = \frac{D}{d}; d = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} . \quad (6.14)$$

6.8.1. Algoritm de caracterizare a unui vector normal la plan

Fie P_1, P_2, P_3 trei puncte date. Un **vector normal la plan** este caracterizat de relația:

$$N = [P_2 - P_1] \times [P_3 - P_1], \cdot \quad (6.15)$$

unde \times este produsul vectorial.

Exemplu: dat fiind planul: $Ax + By + Cz + D = 0$, vectorul $[A \ B \ C]$ este normal la plan. Algoritmul pentru determinarea ecuației unui plan caracterizat prin trei puncte distincte necoliniare: P_1, P_2, P_3 .

1. Se determină $N = [A \ B \ C]$;
2. Se determină $D = -N \cdot P_i, i = 1, 2, 3$, unde \cdot este produsul scalar;
3. Se scrie ecuația planului folosind relația (6.13) și coeficienții A, B, C, D .

ÎNTREBĂRI