**INTRODUCERE**

In practică există destul de multe evenimente aleatoare de natură diferită, care se supun anumitor legi (cunoscute sub numele de legi statistice). De stabilirea acestor legi de comportare a evenimentelor aleatoare se  ocupă teoria probabilităților și statistica matematică.

Teoria probabilităţilor şi statistica matematică se aplică în majoritatea domeniilor ştiinţelor, exacte şi inginereşti, în special acolo unde există condiţii de risc şi incertitudine şi unde este necesară adoptarea unor decizii riguros argumentate, referitoare la apariția unui sau altui eveniment în cazul dacă se  fac mai multe experiențe în aceleași conditii.

Cîteva date istorice. Bazele teoriei probabilităților au fost  puse în secolul al XVII-lea de matematicienii B. Pascal (1623— 1662) și P. Fermat (1601-1665). Mai tîrziu, J. Bernoulli (1654— 1705) stabilește pentru prima dată că noua teorie matematică este  fundamentală pentru studiul fenomenelor de masă.

Printr-o teoremă celebră, întitulată de el ”teorema numerelor mari” J. Bernoulli stabilește relația matematică dintre frecvența relativă si probabilitate în urma unui număr mare de probe  Această teoremă constituie fundamentul statisticii matematice si justifică aplicarea teoriei probabilitătălor în alte domenii.

Contributii importante la dezvoltarea teoriei probabilităților  a adus matematicianul Abraham de Moivre (1667—1754). El a formulat legea normală de repartiție. Dar cel care pe drept cuvînt este considerat fondator al teoriei moderne a probabilităților este  Pierre Simon Laplace (1749—1827).

Printre marii matematicieni care au contribuit la dezvoltarea teoriei probabilităților în secolele al XIX-lea si al XX-lea îi vom menționa pe K. Gauss, J. Bertrand, J. H. Poincare, P. L. Cebîșev,  A. M. Liapunov, A. A. Marcov, A. N. Kolmogorov. Intemeietorii statisticii ca stiință pe bună dreptate sunt considerați F. Galton (1882-1911), K. Pearson (1857-1936), R. Fisher (1890-1962).



1. **NOȚIUNILE DE BAZĂ A TEORIEI PROBABILITĂȚILOR**

**1.1. Experiențe si evenimente**

In teoria probabilitătilor sunt studiate experiențele cu rezultat întîmplător, numite experiențe aleatoare. Prin **experiență** se înțelege orice realizare a unui complex de condiții bine precizate Orice experiență se poate repeta de mai multe, ori fără ca rezultatul să fie, neapărat, același. O anumită realizare, efectuată sau viitoare a unei experiențe se numește **probă**. Prin urmare, orice reluare a experienței este o probă.

Noțiunea de eveniment în teoria probabilităților este o noțiune primară. **Evenimentul** este un rezultat al experienței. Evenimentele se consideră dintr-un punct de vedere, și anume, din punctul de vedere al producerii sau neproducerii lor în decursul unui experiment. Evenimentele ce se realizează într-o singură probă și numai una singură se numesc **evenimente elementare**, celelalte **evenimente compuse**. Prin realizarea evenimentului elementar *A* într-o proba se înțelege faptul că rezultatul probei a fost *A*.

Exemplul 1. In interiorul unui cerc împărțit în trei clomenii se aruncă o minge. A nimeri în unul din cele trei domenii este eveniment, iar auncarea mingii în direcția cercului este oexperiență.

Exemplul 2. Intr-o urnă sunt bile de diferite culori. Din urnă se ia la întîmplare, o bilă. Extragerea din urnă a unei bile de o anumită culoare este un eveniment, iar extragerea unei bile indeferent de culoare este o experiență.

Cuvîntul ”aleator” folosit de noi are sens de "întîmplător” și provine de la cuvîntul latin ”alea” care înseamnă zar. Zarul are 6 fețe numerotate 1, 2, 3, 4, 5, 6.

 

Exemplul 3. Experiența aruncării mui zar. Zarul poate fi aruncat de mai multe ori. În urma unei aruncări a zaruluî poate apărea una din șase fețe ale sale, adică rezultatele posibile sunt: ={ 1 , 2, 3, 4, 5, 6}.



Referitor la experiența cu zarul, putem considera următoarele  evenimente: *A*- apariția unui număr impar de puncte; *B* - apariția unui număr par de puncte; *C* – apariția unui număr mai mic sau egal cu 4; *D* - apariția numărului 2; *F* - apariția unui număr mai mare 6; *G* - apariția feței cu un număr din două cifre etc.

Fiecare probă, atrage după sine realizarea sau nerealizarea  oricărui eveniment. De exemplu, dacă la o aruncare a zarului apare fața cu numărul 3, atunci evenimentul *A* s-a realizat, evenimentul *C*de asemenea s-a realizat, iar evenimentele *B*, *D*, *F*, *G* nu s-au realizat.

Observăm că fiecărui eveniment îi corespunde o multime de  cazuri favorabile, care este, de fapt, o submulțime a multimii  Asadar, putem scrie: evenimentele care au un singur caz favorabil se numesc **evenimente elementare**. Așadar, elementele multimii  pot fi considerate

evenimentele elementare. *A*={1, 3, 5} , *B*={ 2, 4, 6}, *C*={1, 2, 3, 4}, *D*={2}.

Multimea evenimentelor legate de o experiență cu un număr finit de cazuri posibile (cum este zarul) se identifică deci cu mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii *E*, a tuturor cazurilor posibile ale experienței.

La aruncarea unui zar **evenimentul sigur** este apariția uneia din fetele 1, 2, 3, 4, 5. 6, deoarece cazurile posibile ale experienței sunt și cazuri favorabile ale acestui eveniment.

**Evenimentul imposibil** nu se poate realiza nici într-o probă. Pentru el nu există nici un caz favorabil. Așadar, evenimentului sigur îi corespunde mulțimea , iar evenimentului imposibil mulțimea vidă ∅. In cazul experienței cu zarul, evenimentele *F*, *G* sunt evenimente imposibile.

Exemplul 4. Experiența aruncării simultane a două zaruri. In acest caz, mulțimea , a tuturor cazurilor posibile ale experienței conține 36 de elemente și  ={(1,1); (1,2); …;(6,6)}.

Dacă ne interesează obținerea sumei de 5 puncte pe ambele fețe, aceasta înseamnă că, de fapt, ne interesează dacă apare sau nu unul din rezultatele (1,4), (3,2), (2,3), (4,1) și deci evenimentul respectiv *A* este mulțimea *A*={(1,4); (3,2); (2,3); (4,1)}.

**1.2. Eveniment implicat de alt eveniment**

Se spune că evenimentul *A* implică evenimentul *B*, dacă realizarea evenimentului *A* atrage după sine realizarea evenimentului *B*. Aceasta înseamna că orice caz care realizează evenimentul *A* îl realizează si pe *B*, adică multimea cazurilor favorabile lui *A* este inclusă în mulțimea cazurilor favorabile lui *B*.

La aruncarea zarului, dacă examinăm evenimentele *A*={1, 3}, *B* = {1, 2, 3, 4}, atunci, după cum se vede, *A* implică *B*, iar, ca relație între mulțimi,  (*A* se conține în *B*).

Este evident că , , .

Relația de implicație se bucură, de proprietățile unei relaț ii de ordine, adică este:

* reflexibilă: , pentru orice eveniment *A*;
* antisimetrică: dacă  și , atunci *A=* *B*;
* tranzitivă: dacă iar , atunci .

**1.3. Operații cu evenimente**



Fie *A* și *B* două evenimente legate de o experiență. Cu aceste evenimente pot fi efectuat o urinătoarele operații:

1. **Adunarea (reuniunea) evenimentelor**.

“*A* sau *B*“ este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea cel puțin a unuia dintre evenimentele *A* și *B*.

La aruncarea zarului, dacă *A* ={1, 2, 3} iar *B*= {2, 3, 6}, atunci “ *A* sau *B* ”= {1, 2, 3,6} în limbajul mulțimilor operația ”*A* sau *B*” nu este altceva decît reuniunea mulțimilor *A și B*, adică = {1, 2, 3, 6}.

Se poate vorbi si de operația " *A* sau *B* sau *C* ” =*,* etc.

1. **Diferenta evenimentelor**.

Diferența evenimentelor *A* \ *B* este un eveniment a cărui realizare înseamnă realizarea lui *A* și nerealizarea lui *B*.

1. **Inmulțirea (intersecția) evenimentelor**.

“*A și B”* este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea ambelor evenimente *A*, *B*. La aruncarea zarului, dacă *A=*{ 1, 2, 3, 4}, *B* ={l, 3, 5, 6}, atunci ambele evenimente se realizează dacă apare una din fețele 1 sau 3, adică: “*A* și *B*”={1,3}.

In limbajul mulțimilor, operația “*A* și *B*” nu este altceva decît intersecția mulțimilor *A* și *B*, adică . In mod analog se poate vorbi și de “*A* si *B* si *C*” =  etc.

1. **Operația** (”*non* *A*”) .

este evenimentul a cărui realizare constă în nerealizarea evenimentului *A*. Mulțimea tuturor cazurilor favorabile lui constă din toate cazurile nefavorabile lui *A*.

De exemplu, la aruncarea zarului, dacă evenimentul *A*={1,4, 6}, atunci ={2,3,5}.

Este evident că: .

**1.4. Evenimente compatibile si incompatibile**

Evenimentele *A și B* sunt **incompatibile**, dacă realizarea unuia. din ele exclude realizarea celuilalt. Cu alte cuvinte, evenimentele *A* și *B* sunt incompatibile atunci cînd nu are loc nici un caz favorabil comun, adică . Este evident că dacă evenimentele *A* și *B* sunt incompatibile, atunci “*A* implică “*non B*” și “*B* implică “*non* *A*” adică  și .

La aruncarea unei monede, evenimentul *A* care constă în apariția feței cu stema este incompatibil cu evenimentul *B* care constă în apariția feței cu banul.

 Evenimentele *A* și *B* sunt **compatibile**, dacă realizarea unuia din ele nu exclude realizarea celuilalt, adică dacă există cel puțin un rezultat care favorizează fiecare din aceste evenimente. Cu alte cuvinte, evenimentele *A și B* sunt compatibile dacă .

 La aruncarea unui zar, dacă *A* ={l, 3, 5}, *B* ={2, 4,5,6}, *C*={2, 4}atunci:

 *A* si *B* sunt compatibile, deoarece ; *C* si *B* sunt compatibile, deoarece ; *A* si *C* sunt incompatibile, deoarece;

Se poate vorbi și despre compatibilitatea (sau incompatibilitatea) unui număr arbitrar de evenimente.

**1.5. Spațiul evenimentelor elementare Cîmp de evenimente**

Rezultatele posibile ale unei experiențe formează o multime notată prin *E*. Dacă numărul rezultatelor este finit, atunci , iar dacă Ω este o mulțime infinit numerabilă, atunci .

Un eveniment elementar atașat experienței se identifică cu o submulțime a lui Ω formată dintr-un singur element. Un eveniment compus se identifică cu o submulțime a lui Ω ce se obține prin reuniunea evenimentelor elementare ce îl implică. Evenimentul sigur se idfentifică cu mulțimea Ω. Așadar, dacă atunci evenimentul sigur . Datorită acestui fapt, Ω se lm ai numește **spațiul evenimentelor** **elementare**. Evenimentul imposibil se identifică cu mulțimea vidă ∅.

Ca să fie mai clar ce este spațiul de evenimente elementare al unei experiențe, să considerăm următoarele exemple.

Experiența aruncării a două monede. Mulțimea evenimentelor elementare ce rezultă în urma acestei experiențe este , unde  (aici prima literă corespunde feței ce apare la aruncarea primei monede iar a doua literă - la aruncarea celei de-a doua monede). Astfel, (*BS*) arată că pe prima monedă a apărut ”banul”, iar pe a doua – “stema” .

Experiența aruncării unui zar. Mulțimea evenimentelor elementare ce rezultă în urma acestei experiențe este Ω={ l , 2, 3, 4, 5, 6}.

}n continuare ne vor interesa spațiile finite de evenimente elementare, adică acele spatii care au un număr finit de elemente.

Orice eveniment, diferit de evenimentul imposibil, este o reuniune de unul sau mai multe evenimente elementare. Vom nota prin *D*(Ω) mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii , la care se adaugă mulțimea Ω însăși și mulțimea vidă ∅.

**Definitia 1.1.** Fie o mulțime nevidă de evenimente. Această mulțimea se numește **corp**, dacă: a) oricare ar fi , rezultă ; b) oricare ar fi  rezultă .

Drept exemplu de corp poate servi mulțimea *D*(*E*), dacă *E* este finită. În baza definiției se poate demonstra că dacă *K* este un corp, atunci au loc proprietățile: a) ; b) dacă , atunci ; c) dacă , atunci .

**Definitia 1.2.** O multime finită *E* împreună cu corp de evenimente din *D*(Ω) se numește **cîmp finit de evenimente** și se notează {Ω, *K*}.

Din cele spuse mai sus, rezultă, că dacă Ω este un spațiu finit, de evenimente elementare și nevid, atunci {Ω, *K*} este un cîmp finit de evenimente, dacă și numai dacă *K=D*(Ω). In acest caz, numărul de evenimente ale cîmpului este 2*n*unde *n* este numărul de evenimente elementare. Un cîmp de evenimente odată cu două evenimente *A* si *B* conține și evenimentele , iar odată cu un eveniment *A* conține și pe . Așadar, un cîmp de evenimente este închis față de operațile respective. In cîmpul de evenimente {Ω, *K*}, ∅ este evenimentul imposibil, iar *E* (mulțimea evenimentelor elementare) este evenimentul sigur. Ori de cîte ori într-o relație vor intra mai nmlte evenimente, se va avea în vedere că ele aparțin aceluiași cîmp de evenimente. In continuare vom arăta cum pe baza unor evenimente se pot forma alte evenimente, utilizînd operațiile cu evenimente.

***Probleme rezolvate*.**

1. Se aruncă simultan două monede (una de 10 bani și una de 25 bani) și se urmărește ce fete apar. Care pot fi rezultatele (probele) experienței?

Rezolvare. Rezultatele experienței sunt: pe ambele monede apare banul; pe ambele monede apare stema: pe moneda de 10 apare banul și pe cea de 25 apare stema; pe moneda de 10 apare stema și pe cea de 25 apare banul.

1. Dintr-o urnă cu 16 bile dintre care 10 sunt albe și 6 negre se extrag succesiv două bile Fie *A* evenimentul ca dintre cele două bile extrase să fie cel mult o bilă albă, iar *B* evenimentul ca ambele bile să fie negre. Sunt evenimentele *A* și *B* compatibile sau incompatibile? Sunt evenimente elementare sau compuse?

Rezolvare. Evenimentele *A* și *B* sunt evenimente compatibile, deoarece se pot produce în acela îi timp, și anume, cînd extragem din urnă două bile negre. Evenimentele *A* și *B* sunt evenimente compuse, deoarece fiecare din ele nu se poate realiza printr-o singură probă.

1. Se aruncă o monedă. Să se scrie cîmpul de evenimente atașat acestei experiențe.

incompatibile; d) perechile de evenimente contrare; e) perechile de evenimente din care primul implică pe al doilea.

1. Dintr-un lot de piese prelucrate într-o zi la un strung se extrag simultan trei piese. Să notăm cu *A* evenimentul ca toate cele trei piese extrase să fie standard și cu *B* evenimentul ca cel puțin o piesă să fie nestandard. Ce fel de evenimente sunt: a) ; b) ?
2. Fie *A* evenimentul că, din cele cinci piese cel puțin una este nestandard, iar *B* evenimentul că printre ele cel puțin două sunt nestandard. De scris evenimentele: a) *C* - toate piesele sunt standard; b) *D* - cel mult o piesă este nestandard.
3. In componența unui aparat sunt trei piese principale. Se consideră evenimentele: *Bi* = piesa *i* (*i* = l , 2, 3) nu are defect. Aparatul funcționează (evenimentul *A*), dacă prima piesă și cel puțin una din celelalte două, sunt fără defect. Să se scrie evenimentele *A* și .
4. Un aparat este format din două blocuri de tipul I și trei blocuri de tipul II. Se consideră, evenimentele: *Ai* (*i* = 1,2) - blocul *i* de tipul I este fără, defect, *Bj* (*j* = 1,2,3) - blocul *j* de tipul II este fără defect. Aparatul funcționează dacă cel  puțin un bloc de tipul I și nu mai puțin de două blocuri de tipul II sunt fără defecte. Să se scrie evenimentul *A* - aparatul funcționează.

Pentru testare la controlul tehnic a fost prezentat un lot din *n* piese. Fie *A*i, *i* =1,2,…,*n* evenimentul că piesa cu numărul *i* este cu defect. Să se scrie următoarele evenimente: a) nici una din piese nu are defect; b) cel puțin una din piese are defect.

**1.6. Frecvența relativă si proprietățile ei. Definiția statistică a probabilității**

Să considerăm o experiență și un eveniment *A* atașat acestei experiențe. Dacă într-o serie de *n* probe evenimentul *A* s-a realizat de  ori, atunci numărul



se numește **frecvență relativă** a evenimentului *A*.

Frecventa relativă variază de la o probă, la alta avînd un caracter experimental. Numărul  poate varia de la 0 la *n*; =0, dacă în *n* probe evenimentul *A* nu s-a realizat nici o data;  = *n*, atunci cînd evenimentul *A* se realizează în toate cele *n* probe. După cum se observă, frecvența relativă depinde de numărul de probe *n*.

Pot fi verificate ușor următoarele proprietăți ale frecvenței relative:

1.  pentru orice eveniment *A*;
2.  (Ω - evenimentul sigur);
3. , dacă evenimentele *A* și *B* sunt evenimente incompatibile;
4. , dacă evenimentul *B* implică evenimentul *A*, adică ;
5. ;
6. ;
7. .

Într-adevăr, deoarece , rezultă . Frecvența relativă a evenimentului imposibil este egală cu 0, iar frecvența relativă evenimentului sigur este l.

Dacă *A* și *B* sunt evenimente incompatibile, atunci este numărul de probe în care s-a realizat evenimentul . Dar atunci .

În mod similar, pot fi demonstrate și celelalte proprietăți.

Multor experiențe le este caracteristic fenomenul **stabilității statistice**, care constă în următoarele: dacă *A* este un eveniment legat de o experiență, atunci pentru valori mari alelui *n* frecvența relativă se aproprie din ce ce mai mult de o constantă care este probabilitatea evenimentului respective, mai precis, oscilează în jurul acestei constante care deobicei nu poate fi determinată deoarece numărul de experiențe este limitat.

Conform **definiției statistice** a probabilității în calitate de probabilitate a evenimentului *A* se ia frecvența relativă în cazul cînd numărul de experiențe este suficient de mare, adică:

.

Totuși frecvența nu coincide cu probabilitatea , chiar și-n cazul unui număr mare de experiențe. Mai mult, dacă va fi efectuată o altă serie de *n* experiențe, atunci frecvența în genere va avea altă valoare. Aceasta înseamnă, că oscilarea frecvenței în jurul probabilității poartă un caracter aleatoriu. Deci relația înseamnă o egalitate aproximativă a două numere care este un eveniment destul de probabil, dar nu și absolut sigur. Atunci convergența pentru *n*→∞ trebuie percepută nu ca o convergență a unui șir numeric, dar într-un mod specific, deoarece frecvența relativă este ea însăși valoare aleatoare. O așa formă de convergență se numește **convergență în probabilitate**.

Relația dintre frecvența relativă și probabilitate poate fi urmărită după rezultatele mai multor serii de aruncări ale monetei, obținute de unii cercetători, în care se fixau apariția stemei:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Cercetător | Numărul dearruncări | A apărut stema | Frecvențarelativă | Probabilitatea |
| Buffon (1707-1788) | 4040 | 2048 | 0.5080 | 0.5 |
| Pirson (1857-1936) | 12000 | 6019 | 0.5016 | 0.5 |
|  Pirson | 24000 | 12012 | 0.5006 | 0.5 |

**1.7. Probabilitatea și proprietățile ei. Definiția axiomatică a probabilității.Cîmp finit de probabilitate**

Pentru a compara două, sau mai multe evenimente după modul lor de apariție, se întroduce o mărime (un număr) , numită **probabilitatea evenimentului**.

Să presupunem că spațiul de evenimente elementare conține *n* elemente .

A defini o probabilitate în raport cu o experiență cu un număr finit de rezultate posibile, înseamnă a asocia fiecarui eveniment *A*, legat, de această experiență numărul *p*(*A*), numit probabilitatea evenimeniului *A*.

Este firesc de a cere ca probabililitatea să aibă aceleiași proprietăți ca și frecvența relativă.

**Definiția 1.3.** Fie {Ω*,K*} lin cîmp finit de evenimente. Se numește probabilitate pe acest cîmp o funcție *p*: [ 0,1] care satisface axiomele:

**a**) pentru orice ;

**b**) ( probabilitatea evenimentului șigur);

**c**)  dacă evenimentele *A* și *B* sunt incompatibile adică .

Ultima axiomă se poate extinde prin inducție astfel: pentru evenimentele are loc relația .

Aceste axiome sunt suficiente. Din ele se deduc celelalte proprietăți ale probabilității:

**d**) , dacă evenimentul *B* implică evenimentul *A***;**

**e)** ;

**f**);

 **g**) 

De aici rezultă, că dacă sunt cunoscute probabilitățile evenimentelor elementare atunci poate fi determinate probabilitatea oricărui eveniment asociat unei experiențe.

Într-adevăr, dacă  și , atunci și conform axiomei 3

.

Un cîmp finit de evenimente {Ω, *K*} împreună cu o probabilitate *p*, definită pe acest cîmp, se numește **cîmp finit de probabilitate** și se notează {Ω, *K*, *p*}.

**Definiția 1.4**. Se numește **grup complet** de evenimente o mulțime de evenimente *A*i, *i=* =1,2,…,*k* care satisface următoarele condiții:

1. *Ai* ≠∅, *i=*1,2,…,*k*.
2. , *i≠j*.
3. .

Dacă evenimentele *Ai*, *i=*1,2,…, *k* formează un grup complet de evenimente, atunci

.

Este evident că mulțimea tuturor evenimentelor elementare ataišate unei experiențe formează un grup complet de evenimente.

**1.8. Evenimente elementare echiprobabile. Definiția clasică a probabilității**

Noțiunea de evenimente egal posibile este una din noțiunile de bază ale teoriei probabilităților. Noțiunea de egal posibil este echivalentă cu noțiunea de egal probabil.

Fie  este mulțimea tuturor evenimentelor elementare ale unei experiențe. Din cele spuse mai sus, .

Dacă  ca evenimente elementare au și aceeași probabilitate (sunt echiprobabile), adică  atunci .

De aici rezultă că dacă diferite evenimente elementare, obținute în urma unei experiențe efectuate în condiții bine determinate, au aceeași șansă de realizare atunci ele sunt **echiprobabile** și probabilitatea fiecărui eveniment este egală cu inversul numărului de evenimente elementare.

Exemplul 5. In urma experienței care constă în aruncarea unei monede poate să apară, ”banul” sau "stema”. Nu există nici un motiv ca ”banul” să aibă o șansă mai mare de apariție decît ”stema”. Se spune că apariția ”banului” și a "stemei” sunt egal posibile sau egal probabile.

Fie  un eveniment asociat unei experiențe cu o mulțime de rezultate posibile echiprobabile . Atunci probabilitatea

.

Din cele spuse mai sus rezultă că în cazul evenimentelor elementare echiprobabile, probabilitatea unui eveniment *A* este egală cu **raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului *A* și numărul total al cazurilor posibile ale experienței**. In multe aplicații practice se consideră satisfăcută conditia de echiprobabilitate a cazurilor posibile ale experienței.

Aruncarea monedei este o experiențe cu două cazuri echiprobabile de realizare, iar aruncarea unui zar ”perfect” este o experiemă cu șase cazuri posibile echiprobabile.

Extragerea unei bile dintr-o urnă cu *n* bile este o experiență cu *n* cazuri posibile echiprobabile. Aruncarea a două zaruri este o experientă cu 36 de cazuri posibile echiprobabile.

Aruncarea de *n* ori a unei monede este o experiență cu 2n cazuri posibile echiprobabile.

Ținînd cont de cele spuse mai sus, putem da definiția clasică a probabilității:

**Definiția 1.5**. Dacă {Ω, *K*} este un cîmp finit de evenimente ale cărui evenimente elementare sunt egal posibile, atunci probabilitatea unui eveniment oarecare  este egală cu raportul dintre numărul *m* de evenimente elementare favorabile evenimentului dat și numărul total *n* de evenimente elementare ale cîmpului, și prin urmare .

Observăm că dacă *m* este numărul de cazuri favorabile evenimentului *A*, atunci *n*-*m* va fi numărul de cazuri favorabile evenimentului contrar  și de aceea



Exemplul 6. La aruncarea unui zar există trei șanse din șase ca să apară un număr par (evenimentul *A*). Probabilitatea obținerii unui număr par este *p*(*A*) = 3/6 =1/2.

Exemplul 7. Se aruncă simultan două zaruri. Să se afle probabilitatea ca suma punctelor să fie nu mai mare decăt 9 și nu mai mica ca 7 patru (evenimentul *A*).

Numărul total de cazuri posibile va fi *n* =6 ⋅6=36. Numărul cazurilor favorabile poate fi determinat în mod direct din următoarea figură



și anume *m* = 15. Atunci *p*(*A*) = 15/36 =5/12.

Exemplul 8. Dintr-o urnă cu 17 bile, numerotate de la 1 la 17, se extrage o bilă la întîmplare. Se consideră evenimentele: *A* - obţinerea unui număr prim; *B* - obţinerea unui număr par; *C* - obţinerea unui număr divizibil prin 3, sau 2. Să se determine probabilităţile acestor evenimente.

Rezolvare. În această experienţă aleatoare numărul total al cazurilor posibile este 17.

Pentru *A* numărul cazurilor favorabile este 7: {2,3,5,7,11,13,17}, deci .

Pentru *B* numărul cazurilor favorabile este 8: {2,4,6,8,10,12,14,16}, deci  .

Pentru *C* sunt 11 cazurilor favorabile: {2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16}, și .

 La calcularea probabilităților, mai ales a celor bazate pe definiția clasică, sunt utilizate pe larg noțiunile din combinatorică.

**1.9. Elemente de combinatorică**

1. **Permutări.** Fie *M* o mulțime finită cu *n* elemente. Această se poate ordona în mai multe moduri. Se astfel, mulțimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor. Fiecare din mulțimile ordonate cu cele *n* elemente ale mulțimii *M* se numește **permutare** a acestei mulțimi (sau permutare de *n* elemente).

Numărul permutărilor de *n* elemente se notează cu .

 O mulțime cu un singur element, poate fi ordonată într-un singur mod, deci = l. O mulțime cu două, elemente *M* = {*a,b*} poate fi ordonată în două moduri: (*a*, *b*) și (*b*, *a*). Deci O multime cu trei elemente *M* = {*a,b,c*} poate fi ordonată în 6 moduri: {*a,b,c*}, {*a,c,b*}, {*b,c,a*}, {*b,a,c*},{*c,b,a*},{*c,a,b*}. Atunci .

Folosind metoda inducției matematice se demonstrează că numărul permutărilor ale unei mulțimi din *n* elemente este egal cu

,

adică cu *n factorial*. Prin definiție 0!=1.



1. **Aranjamente** Fie *M* o mulțime finită cu *n* elemente. Amintim, că orice mulțime împreună cu o ordine data a succesiunii elementelor a acesteia se numește **mulțime ordonată.**  Dacă numărul pozitiv *k* este mai mic decît *n*, atunci se pot forma diferite mulțimi ordonate cu cîte *k* elemente fiecare și submultimile ordonate ale lui *M*, avînd fiecare cîte *k* elemente se numesc, **aranjamente** din *n* elemente luate cîte *k* . Două aranjamente din *n* elemente luate cîte *k* se deosebesc prin sau prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

Numărul aranjamentelor din n elemente luate cîte *k* se notează . De exemplu, =1; . Astfel formula de calcul a numărului de aranjamente din *n* elemente, luate cîte *k* este:

.

În particular, dacă *k*=*n*, obținem 

1. **Combinări.** Vom examina următoarea problemă. Fiind dată o mulțime finită *M* cu *n* elemente, să se calculeze numărul submulțimilor sale avînd fiecare cîte *k* elemente, Dacă *M* este o mulțime cu *n* elemente, atunci submulțimile lui *M*, avînd fiecare cîte *k* elemente, se numesc **combinări** de *n* elemente luate cîte *k*. Numărul combinărilor din *n* elemente luate cîte *k* se notează prin .

Pornind de la formula , obținem formula de calcul a numărului combinărilor din *n* elemente luate cîte *k*:

.

În calcule adesea este utilizată o astfel de formă a acestei formule

.

1. **Permutări cu repetiții.** Fie date *n* grupuri de elemente. Fiecare grup contine cîteva elemente de același tip. Permutările de *n* elemente fiecare din ele conținînd  elemente ,  elemente ,...,elemente , unde , se numesc **permutări cu repetiții** de *n* elemente. Numărul tuturor permutărilor cu repetiții se notează cu simbolul și se calculează după formula

.

1. **Aranjamente cu repetiții.** Aranjamentele de n elemente fiecare din ele conținînd *m* elemente și unul și același element se poate repeta în fiecare aranjament de un număr arbitrar de ori, dar nu mai mult de *m* ori, se numesc **aranjamente cu repetiții** de *n* elemente luate cîte *m*.

Numărul tuturor aranjamentelor cu repetiții de *n* elemente luate cîte m în fiecare se notează cu simbolul  și se calculează după formula

.

1. **Combinări cu repetiții.** Combinările de *n* elemente fiecare din ele conținînd *m* elemente și în care unul și acelasi element se poate repeta de mai multe ori, dar nu mai mult de *m* ori, se numesc **combinări cu repetiții** de *n* elemente luate cîte *m*.

Numărul tuturor combinărilor cu repetiții se notează cu simbolul și se calculează conform formulei

.

**1.10. Probabilitatea geometrică (definitia geometrică a probabilității)**

Considerăm pe un segment *L* un alt segment *l*. Pe segmentul *L* la întîmplare se ia un punct. Dacă probabilitatea de a lua punctul pe segmentul *l* este proporțională cu lungimea lui *l* și nu depinde de poziția lui *l* pe L, atunci probabilitatea că punctul va nimeri pe segmentul *l* este egală cu

.

De asemenea, dacă figura plană *g* se conține în figura plană *G*, iar probabilitatea de a lua punctul pe figura *g* este proporțăonală cu aria ei și nu depinde de forma si pozitia lui *g* pe *G*, atunci probabilitatea că punctul va nimeri pe figura *g* este

.

La fel se determină probabilitatea că punctul va nimeri într-un corp *v* din spațiu, care se conține într-un alt corp *V*:

.

Exemplul 9. Pe segmentul *AB* de lungimea *m* la întîmplare se ia punctul *N*. Să se afle probabilitatea că segmentul mai mic *AN* (sau *NB*) va avea lungimea mai mare decît *m*.

Rezolvare. Cu ajutorul punctelor *C* și *D* împărțim segmentul *AB* în trei părți egale. Condițiile pŕoblemei vor fi satisfăcute, dacă punctul *N* va nimeri pe segmentul *CD* a cărui lungime este *m* /3. Deci .

Exemplul 10. Să se afle probabilitatea că punctul aruncat în cercul de raza *R* = 10 va nimeri în inelul format de acest cerc și de un alt cerc concentric de raza = 5.

Rezolvare. Avem .

 10

 5

 0

 *x*

 *y*

10

 5

***x***

***y***

**0 60**

 ***x***

***y***

 **60**

Exemplul 11. Doi studenți au hotărît să se întîlnească într-un anumit loc între orele 1800 si 1900. Primul care sosește la întîlnire îl așteaptă pe celălalt timp de 15 minute, dar numai pînă la 1900 . Să se afle probabilitatea că studenții se vor întîlni.

Rezolvare.Notăm momentul sosirii primului student prin *x*, iar al celui de-al doilea - prin *y*. Evident că 0 ≤ *x*≤60 și 0 ≤ *y*≤60. Pentru ca studenții să se întîlnească este necesar și suficient ca să aibă loc inegalitatea |*x*-*y*| ≤ 15. Această inecuație poate fi interpretată astfel: *y* ≤ *x*+15 pentru *y* > *x* și

*x* ≤ *y*+15 pentru *y*≤ *x*.

Se observă că multimea tuturor cazurilor posibile se reprezintă geometric prin punctele pătratului cu latura de 60, iar mulțimea cazurilor favorabile pentru ca studentii să se întîlnească se reprezintă prin mulțimea punctelor figurii mărginite de axele de coordonate și de dreptele:

*y* = *x*+15, *y* = *x*-15, *y* = 60, *x*=60.

Atunci probabilitatea va fi egală cu: .

***Probleme rezolvate***

1. O urnă conține 4 bile albe și 6 bile negre, iar o altă urnă conține 3 bile albe și 5 bile negre. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Să se calculeze: a) probabilitatea că ambele bile sunt albe; b) probabilitatea că cel puțin una din bile este alba;c) probabilitatea că bila extrasă din prima urnă este albă, iar bila extrasă din urna a doua este neagră.

Rezolvare. a) Considerăm evenimentele: *A* bila extrasă din prima urnă, este albă; *B -* bila extrasă din a doua urnă este albă. Probabilitatea că bila extrasă din prima urnă este albă . Probabilitatea că bila extrasă din a doua urnă este alba - . Experiența care constă în extragerea celor donă bile (una din prima urnă iar alta din urna a doua) are 10⋅8 = 80 cazuri echiprobabile. Evenimentul  (ambele bile sunt albe) are 4⋅3=12 cazuri favorabile Deci . b) Pentru a calcula probabilitatea evenimentului  (că cel puțin una din bile este albă), aplicăm formula .

1. Pentru a afla probabilitatea evenimentului  ( bila extrasă, din prima urnă este albă, iar bila extrasă din urna a doua este neagră), aplicăm formula 
2. Se cunosc datele referitoare la vechimea muncă a salarialilor unei fabrici

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Vechimea (ani) | pînă la 5 ani | 5-10 | 10-15 | 15-20 | >20 |
| Numărul de salariali | 422 | 205 | 180 | 115 | 78 |

Să se afle probabilitatea ca o persoană aleasă la întîmplare să aibă vechimea în muncă (evenimentul *A*): a) pînă la 15 ani; b) între 10 și 20 de ani.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:  - persoana face parte din grupul *i*, (*i=*l,2,3,4,5). Toate aceste evenimente sunt incompatibile. Probabilitătile acestor evenimente sunt: ;; ; ; . a) Atunci =0.422+0.205+ +0.18 =0.807.

1. .

**1.11. Evenimente dependente si independente**

În continuare vom examina evenimente dintr-un cîmp finit de probabilități.

Două evenimente *A* și *B* sunt **evenimente independente**, dacă nici unul din ele nu-si modifică probabilitatea în funcție de faptul dacă se realizeaza sau nu celălalt eveniment.

Exemplul 12. Se aruncă moneda de două ori. Probabilitatea că în a doua probă va apărea”stema ” nu depinde de rezultatul primei probe.

Exemplul 13. O urnă conține 5 bile albe și 4 bile negre. Din ea la întîmplare se extrage o bilă. Probabilitatea că bila extrasă din urnă va fi albă (evenimentul *A*) este *p*(*A*) =5/9. Bila extrasă se întoarce în urnă și experimentul se repetă. Probabilitatea că bila extrasă în proba a doua este albă (evenimentul *B*), evident, nu depinde de rezultatul primei probe și este egală cu 5/9. Deci evenimentele *A* și *B* sunt independente.

Două evenimente *A* si *B* sunt **evenimente dependente**, dacă  fiecare din ele își modifică probabilitatea, în funcție de realizarea sau nerealizarea celuilalt.

Exemplul 14. Intr-o ladă avem 100 de piese, dintre care 80  sunt standard. La întîmplare se ia o piesă, fără a o întoarce în ladă.

Dacă a fost luată o piesă standard (evenimentul *A*), atunci  probabilitatea că la a doua probă vom extrage o piesă standard (evenimentul *B*) este *p*(*B*)=79/99. Dacă însă la prima probă s-a extras o piesă nestandard, atunci probabilitatea *p*(*B*) = 80/99. După cum se observă, probabilitatea evenimentului *B* depinde de realizarea sau nerealizarea evenimentului *A*. Aiadar, evenimentele *A* și *B* suni dependente.

**1.12. Probabilitatea condiționată**

Fie *A* și *B* două evenimente dependente Din definiția dependenței a două evenimente rezultă, că fiecare din ele își modifică probabilitatea în funcție de realizarea sau nerealizarea celuilalt eveniment.

De aceea, daca ne interesează, probabilitatea evenimentului *B*, atunci este important să știm dacă s-a realizat evenimentul *A* sau nu. În exemplul precedent probabilitatea condiționată *pA*(*B*)= 79/99.

Exemplul 15. Considerăm două urne: prima urnă contine 3 bile albe și 8 bile negre, a doua urnă conține 5 bile albe și 7 bile negre. Din una din aceste urne (nu știim din care) se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă

Nu putem deocamdată da răspuns la această întrebare Dacă însă avem informația că bila s-a extras din prima urnă, atunci putem spune că probabilitatea ca bila să fie albă este 3/11. Așadar, numărul 3/11 nu este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă, ci probabilitatea ca ea să fie albă, știind că extragerea s-a făcut din prima urnă.

Notăm evenimentele: *A* bila extrasă este albă; *B*1extragerea se efectuează din prima urnă; *B*2 — extragerea se efectuează din urna a doua. Atunci probabilitatea evenimentului *A*, condiționată de evenimentul *B*1, este , iar cea condiționată de evenimentul *B*2 este .

Exemplul 16. Să considerăm experiența aruncării unui zar. Aici sunt 6 cazuri posibile *E* ={l,2,3, 4,5,6}. Fie *A=*{2,3,5} și *B*={l,3,4,5,6} două evenimente legate de această experiență. Probabilitatea evenimentului *A* este , iar probabilitatea evenimentului *B* este .

Pentru ca să fie mai clară noțiunea de probabilitate condiționată, vom acoperi fetele l,3,4, 5,6 cu un strat de vopsea verde. Dacă în urma aruncării zarului s-a obținut fața verde, atunci se știe că s-a realizat evenimentul *B*, dar nu se știe cite puncta de fapt au apărut. Care este probabilitatea ca evenimentul *A* să se realizeze după ce am obținut informația că evenimentul *B* este realizat?

In acest caz nu mai avem 6 cazuri posibile, ci numai 5 cazuri (cele favorabile lui *B* au devenit posibile pentru *A*). Din aceste 5 cazuri posibile, două sunt favorabile evenimentului *A*. Din cele spuse rezultă că probabilitatea condidăonată .

In caz general, fie o experiență cu *n* cazuri posibile echiprobabile. Dacă pentru evenimentul *B* sunt *m* cazuri favorabile, atunci probabilitatea . Mai departe, dacă dintre cele cazuri favorabile evenimentului *B* se știe că exact *k* cazuri sunt favorabile unui alt eveniment *A*, atunci probabilitatea . În momentul cînd știm că evenimentul *B* s-a realizat, avem *m* cazuri posibile, dintre care *k* cazuri sunt favorabile evenimentului A. Așadar, obținem că probabilitatea condiționată va fi:

.

Pentru frecvențe relative, de asemenea vom avea

.

În caz general, formula o vom considera ca definitie a probabilității condiționate și în cazul cînd evenimentele *A* și *B* nu sunt legate obligatoriu de o experiență cu un număr finit de cazuri echiprobabile.

In mod analog putem scrie și probabilitatea condiționată .

**1.13. Teoremele adunării si înmulțirii probabilităților**

Din egalitătăle de mai sus rezultă că  sau .

Aceasta și este **teorema înmulțirii probabilităților**: probabilitatea intersecțeiei a două evenimente dependente *A* și *B* este egală cu produsul probabilității unuia din ele la probabilitatea condiționată a celuilalt eveniment în funcție de realizarea primului eveniment:

.

Exemplul 17. La o uzină, 96% din piesele produse sunt standard. Dintre ele 85% sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea că piesa luată la întîmplare este de calitate superioara.

Fie *A* evenimentul că piesa este standard, iar *B* evenimentul că piesa este de calitate superioară.

Atunci .

In cazul evenimentelor independente, vom avea: , iar  și deci .

Dacă *A* și *B* sunt evenimente independente, atunci si evenimentele *A* și  sunt de asemenea independente.

**Teorema adunării probabilităților:** probabilitatea reuniunii a două evenimente este egală cu suma probabilitaților acestor evenimente minus probabilitatea intersecției lor.

 In cazul evenimentelor independente, obținem , iar pentru evenimente dependente .

Așa cum pentru evenimente incompatibile , rezultă că în acest caz .

Exemplul 18. Să se afle probabilitatea că, luat la întîmplare, un număr întreg pozitiv se împarte fără rest la doi sau la trei.

Fie *A* evenimentul că un număr întreg pozitiv se împarte fără rest la doi, iar *B* evenimentul că un număr întreg pozitiv se împarte fără rest la trei. Atunci:

.

**1.14. Probabilitatea intersectiei a mai multor evenimente**

După cum am spus mai sus, probabilitatea evenimentului  de evenimentul  (unde ) este

.

De aici . Dacă extindem această formulă pentru *k* evenimente,  obținem

.

Exemplul 19. O urnă conține 4 bile albe și 6 bile negre. Se extrag succesiv trei bile (fără revenire). Să se afle probabilitatea ca prima bilă să fie albă, iar celelalte două să fie negre.

În aceste condiții avem evenimentele: - evenimentul că prima bilă este albă; -evenimentul că a doua bilă este neagră; - evenimentul că a treia bilă este neagră. Atunci putem scrie:

.

In caz general, evenimentele  sunt independente atunci și numai atunci, cînd probabilitatea oricărei intersecții de evenimente diferite din cele *k* este egală cu produsul probabilităților evenimentelor corespunzătoare.

De exemplu, evenimentele *A*, *B* și *C* sunt independente, dacă



In multe din problemele practice avem evenimente independente (realizarea unuia (sau unora) dintre ele nu modifică probabilitatea de realizare a celorlaltelor). În aceste cazuri vom putea scrie că probabilitatea intersecției acestor evenimente este egală cu produsul probabilităților lor.

Extragerea unei bile din fiecare din trei urne care contin bile albe și negre este o experiență. In acest caz, evenimentele: *A* - bila extrasă din prima urnă este albă; *B* - bila extrasă din urna a doua este albă; *C* - bila extrasă din urna a treia este neagră, sunt evenimente independente

Aruncarea a doua zaruri este o experiență care constă în aruncarea primului zar și în aruncarea celui de-al doilea zar. Este clar că cunoasterea rezultatului obținut la aruncarea primului zar nu modifică probabilitatea oricărui eveniment legat de aruncarea zarului al doilea.

Exemplul 20. Se aruncă o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea de fiecare dată a ”banului”?

Fie evenimentele: - la prima aruncare se obține ”banul”, - la a doua aruncare se obține "banul”, - la a treia aruncare se obține ”banul”.

Deoarece aceste trei evenimente sunt independente, obținem:

.

**1.15. Probabilitatea apariției cel puțin a unui eveniment**

Fie că evenimentele  sunt independente si se cunosc probabilitățile: . Notăm pirn *A* evenimentul care constă în apariția cel puțin a unuia din evenimentele independente , din independența cărora rezultă și independența evenimentelor opuse , de aceea probabilitatea  .

Deoarece *A* și  sunt opuse, urmează că, +*p*(*A*)=1.

Dacă , atunci .

În particular, dacă fiecare din evenimentele  are aceeași probabilitate , atunci

*p*(*A*)=1-*qn*.

Exemplul 21. Intr-un circuit electric sunt unite în serie trei elemente. Probabilitatea că nu va funcționa primul element este ; al doilea - și al treilea - .

Să se determine probabilitatea că schema nu va funcționa (evenimentul *A*).

 Avem: *p*(*A*) =1-*q*1⋅ *q*2⋅ *q*3=1 - 0.9 ⋅0,850.8 = 0.388.

Exemplul 22. Se știe că probabilitatea de a nimeri ținta cel puțin o dată din trei trageri este de 0.875. Să se afle probabilitatea de a nimeri ținta dintr-o probă.

Notăm prin *A* evenimentul de a nimeri în țintă din trei probe. Din condițiile problemei, avem că *p*(*A*) = 0.875. Pe de altă parte, *p*(*A*) = 1- *q*3 , unde *q* =1-*p*, și deci 1-*q*3=0.875, sau *q*3=0.125.

De aici rezultă, că *q*=0.5 și deci probabilitatea de a nimeri dintr-o probă este de *p*=1-0.5=0.5.

***Probleme rezolvate***

1. O urnă conține *a* bile albe si *b* bile negre. Se extrag succesiv trei bile (fără revenire). Să se afle probabilitatea că se vor extrage numai bile albe.

Rezolvare.  evenimentele care constau în extragerea unei bile albe. Atunci

 = .

1. In două lăzi avem piese: în prima ladă 10 piese (din ele 6 standard), iar în a doua ladă -15 piese (din ele 9 standard). Din fiecare ladă se ia ite o piesă la întîmplare Să se afle probabilitatea că ambele piese vor fi standard.

Rezolvare. .

1. **CONSECINȚE DIN TEOREMELE ADUNĂRII ȘI ÎNMULȚIRII**

**PROBABILITĂȚILOR. SCHEME DE PROBABILITATE**

**2.1. Formula probabilității totale**

Fie că evenimentul *A* apare numai dacă, are loc unul din evenimentele , incompatibile două cîte două, care formează un grup complet de evenimente, adică se îndeplinesc următoarele 2 codiții: 1) 2) . Și fie că se cunosc probabilitățile  și probabilitățile conditionate . Să se determine probabilitatea evenimentului *A*. Are loc

**Teorema 2.1**. Probabilitatea evenimentul *A* care poate avea loc împreună cu unul și numai unul din evenimentele incompatibile  este determinate de formula **probabilităților totale**:

 =.

Exemplul 1. O persoană trecînd printr-o pădure a ajuns la o răscruce de cărăruși și alege la întîmplare o direcție din posibilele căi de prelungire a mișcării sale. Care-i probabilitatea că persoana va ieși din pădure în punctul *F*, dacă schema cărărilor este următoarea:

*h1*

*h3*

*h2*

**S**

**F**

*H1*

*H2*

*H3*

 Fie evenimentul *A* – persoana a ajuns la destinație, iar evenimentele - s-a ajuns în punctele . Probabilitățile ipotezelor sunt egale cu:

. Probabilitățile evenimentului *A*, condiționate de ipotezele respective, sunt:.

Atunci aplicînd formula probabilității totale, obținem:

.

Exemplul 1. În rezultatul investigațiilor unui pacient se presupune că acesta suferă de una din maladiile  sau . Probabilitățile acestor boli la pacient sunt și. Pentru precizarea diagnosticului pacientul va fi supus unei investigații suplimentare, rezultatul căreia poate fi o reacție pozitivă sau negativă. Dacă pacientul suferă de maladia  probabilitatea reacției pozitive este de 0.9, iar celei negative – 0.1. În cazul maladiei reacțiile pozitive ,i negative sunt echiprobabile. Investigația trebuie repetată de două ori. Să se determine probabilitatea reacției negative (evenimentul *A*).

 Avem . Din condițiile problemei probabilitățile conddiționate sunt egale cu: . Astfel probabilitatea reacției negative va fi: .

**2.2. Probabilitatea unor ipoteze. Formula lui Bayes**

*h1*

*h3*

*h2*

**S**

**F**

*H1*

*H2*

*H3*

Fie că, evenimentul *A* poate să apara numai în condiția cînd apare unul din evenimentele, , incompatibile două, cîte două, care alcătuiesc un grup complet de evenimente. Sunt cunoscute probabilitățile: 

Probabilitățile care se cunosc înainte de efectuarea experienței se numesc **probabilități apriorice**. In urma efectuării experienței se produce evenimentul *A* și trebuie determinate probabilitățile: , numite **probabilități aposteriorice** (deoarece se calculează după efectuarea experienței). Întrucît nu se știe care anume din evenimentele

*i* =1,… , *n*, s-a realizat, acestea se mai numesc **ipoteze**.

Deoarece conform teoremei înmulțirii probabilităților , obținem **formula lui Bayes**:

  (*i*=1,2,...,*n*).

O altă formă a acestei formule este

 (*i*=1,2,...,*n*).

Formula lui Bayes exprimă probabilitatea evenimentului  în ipoteza că evenimentul *A* deja s-a produs sau, mai precis, care este probabilitatea că producerea lui *A* să fie determinată de evenimentul , *i* = 1,2,…, *n*.

În esență formulele lui Bayes schimbă cu locurile cauza și efectul.

Exemplul 2. Piesele fabricate într-o secție la o uzină nimeresc la control la unul din cei doi controlori. Probabilitatea  că piesa nimerește la primul controlor , iar că piesa nimereste la controlorul al doilea este . Probabilitatea că piesa fabricată va fi apreciată de primul controlor ca standard este , iar de al doilea . Se știe că piesa controlată a fost apreciată ca standard (evenimentul *A*). Să se afle probabilitatea că această piesă a fost verificată de primul controlor.

 Rezolvare. Avem: 

După cum se vede pînă a face experiența probabilitatea ipotezei  era initial egală cu 0.6, iar după aceea, cînd a devenit cunoscut rezultatul experienței, probabilitatea acestei ipoteze (mai exact probabilitatea condiționată) s-a modificat a devenit egală cu 0.6239. Așadar, formulele Bayes ne permit să precizăm probabilitatea unor evenimente (ipoteze).

Exemplul 3. Considerăm 6 urne cu următoarea componentă: două urne conțin cîte 3 bile albe și 4 negre; trei urne contin cîte 2 bile albe îi 8 bile negre: o urnă conține 6 bile albe și 2 bile negre. Se extrage la întîmplare o bilă dintr-una din urne luată la întîmplare (evenimentul *A*). Sa constatat că bila extrasă este de culoare alba. Să se calculeze probabilitatea ca bila a fost extrasă din al doilea grup de urne.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:

 - extragerea unei bile din cele două urne cu 3 bile albe și 4 negre;

 - extragerea unei bile din cele trei urne cu 2 bile albe 8 negre;

- extragerea unei bile din urna cu 6 bile albe și 2 bile negre.

 Deoarece la extragere se alege la întîmplare una din cele șase urne, avem:, , . De asemenea avem probabilitățile condiționate: , , . Ținînd seama de formula probabilităților totale, obținem

.

Aplicăm formula lui Bayes pentru a determina, dacă s-a realizat prima ipoteză:

 .

Exemplul 4. Intr-o secție a unei uzine primul strung produce 25%, al doilea - 35% si al treilea - 40% din toate piesele produse într-un schimb. Producția nestandard alcătuieste corespunzător 5%, 4% și 2%. Să se determine probabilitătile: a) piesa luată la întîmplare este nestandard; b) piesa nestandard a fost prelucrată la strungul *i* (*i*=1,2,3).

Rezolvare. Considerăm evenimentele: *A* - piesa luată este nestandard; - piesa nestandard a fost fabricată la strungul *i*. Atunci:

, , ,  .

1. Probabilitatea totală
2. ; ; .

Exemplul 5. Pe un canal de comunicații cu interferențe se transmit simbolurile binare {0,1}. Probabilitățile apariției erorii de reprezentare a simbolurilor în canalul (0→1, 1→0) sunt aceleiași și egale cu 0.2. Probabilitatea apariției simbolului 0 la întrare în canal este 0.9, iar a simbolului 1 – 0.1. La ieșire din canal s-a semnalat apariția simbolului 1. Să se determine probabilitatea că la intrare deasemenea s-a transmis simbolulu1 1.

Rezolvare. Să considerăm ipotezele: - la intrare în canal este simbolul 1; - la intrare în canal este simbolul 0. Fie evenimentul *A* – la ieșire a fost primit simbolul 1.

Ce observă, că , iar . Din condițiile problemei este cunoscut că probabilitatea interferenței simbolului 0 este probabilitatea condiționată , în timp ce probabilitatea este probabilitatea transmiterei fără eroare a simbolului 1. Conform enunțului problemei se cere de determinat probabilitatea aposrerioră  .

Probabilitatea totală a evenimentului *A* este .

Calculăm probabilitatea : .

Astfel probabilitatea aposterioară este egală cu 0.31, în timp ce probabilitatea apriorică a fost 0.2.

* 1. **Probe repetate independente. Formula lui Bernoulli**

Să considerăm probă aleatoare în rezultatul căreia poate să se realizeze sau nu evenimentul *A*. Asta înseamnă că spațiul de evenimente elementare este format din 2 evenimente: . Fie, probabilitatea apariției evenimentului *A* este *P*(*A*)=*p*, iar a evenimentului opus .

Să presupunem în continuare că proba respectivă se repetă de 3 ori. Atunci aceste trei probe pot fi privite ca o experiență nouă cu spațiul de evenimente elementare , care conține rezultatele posibile a fiecărei probe:

 .

Vom admite că toate experiențele sunt efectuate în aceleiași condiții, ceia ce înseamnă că evenimentele sunt independente, adică rezultatul unei experiențe nu influențează urnătoarea experiență. Atunci, de exemplu, evenimentului  îi corespunde probababilitatea *P*=*p*⋅*q*⋅*p*=*p*2⋅*q* .

În caz general, dacă se efectuează o experiență din *n* probe independente, în fiecare din care evenimentul *A* apare cu o probabilitate *p*, iar evenimentul opus cu probabilitatea . După *n* probe se obține un șir , unde  este rezultatul probei cu numărul *i*. Atunci spațiul de evenimente elementare va fi .

De aici rezultă, că probabilitățile evenimentelor elementare, care sunt independente, se va calcula după formula

, sau .

 Probele independete repetate în fiecare din care se termină doar cu apariția sau neapariția evenimentului *A* (a succesului) se numește **schema probelor independente repetate a lui Bernoulli, sau schema binomială.**

 Deobicei, în astfel de experiențe se cercetează evenimentul .

Probabilitatea acestui eveniment este .

 De aici rezultă

**Teorema 2.2**. Probabilitatea apariției evenimentului *A* exact de *k* ori în *n* probe probe independente, în fiecare din care succesul apare cu o probabilitate *p*, iar insuccesul cu probabilitatea *q*=1-*p* se determină după **formula lui Bernoulli**:

.

Exemplul 1. Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se afle probabilitatea că ”stema” va apărea de 2 ori.

 Rezolvare. Fie evenimentul *A* apariția stemei, Avem: .

Folosind formula Bernoulli, obținem: .

Exemplul 2. Se aruncă un zar de 15 ori. Să se afle probabilitatea că fața cu un număr nu mai mare de 5 puncte va apărea exact de 7 ori.

 Rezolvare. Fie evenimentul *A* apariția stemei, Avem: . Aplicăm formula lui Bernoulli:

.

**Definiția 2.1**. Numărul întreg se numește **cel mai probabil număr de apariții** (de succese) a evenimentului *A*, dacă probabilitatea acestuia  pentru *k*\* ia valoarea cea mai mare,

Numărul cel mai ai probabil poate fi determinat mai eficient din inegalitatea dublă

*n⋅p-q*≤ *k*\*≤ *n⋅p+p*.

Se poate arăta că:

1. dacă, numărul *n⋅p-q* este fracționar atunci există, un singur număr cel mai probabil *k*\*;
2. dacă numărul *n⋅p-q* este întreg atunci sunt două, numere cele mai probabile: *k\** și *k\*+*1;
3. dacă numărul *n⋅p* este întreg, atunci *k*\*= *n⋅p*.

Exemplul 4. Se aruncă, moneda de 2 ori. Să ge afle numărul cel mai probabil de apariții ale feței cu stema evenimentul *A*.

Rezolvare. Fie evenimentul *A* apariția stemei, Avem: . Calculăm probabilitățile: , , .

Deoarece probabilitatea  este cea mai mare rezulta ca numărul cel mai probabil de apariții este *k*\*=1. Acest număr putea fi detemlirmt mai eficient din inegalitatea 2*⋅*0.5*-*0.5 ≤ *k*\*≤ 2*⋅*0.5*+*0.5, sau 0.5 ≤ *k*\*≤ 1.5, de unde obținem *k*\*=1.

**2.4. Alte scheme probabilistice clasice**

Colectivitătile studiate în practică au caracteristici care conduc la evenimente ce se realizează după scheme teoretice asemănătoare, grupîndu-se în tipuri de scheme probabilistice

Vom prezenta unele scheme de probabilitate mai des întîlnite

**2.4.1. Schema binomială generalizată (schema Poisson)**

**Teorema 2.3.** Dacă  sunt evenimente independente, atunci probabilitatea să se realizeze *k* din cele *n* evenimente (și să nu se realizeze *n* - *k*) este coeficientul lui *xk*din polinomul

,

unde probabilitățile .

Exemplul 1. Se consideră trei urne, Prima urnă conține 3 bile albe și 2 bile negre, a doua urnă contine 1 bilă albă și 4 negre, iar a treia contine 2 bile albe și 3 negre. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Să se afle probabilitatea ca două bile să fie negre si una albă (evenimentul *A*).

Rezolvare. Fie evenimentele: - bila extrasă din prima urnă este neagră; - bila extrasă din urna a doua este neagră; - bila extrasă din urna a treia este neagră. Problema constă în determinarea probabilității realizării a două din cele trei evenimente. Așadar, suntem în cazul schemei Poisson cu: *n* =3 și *k* =2. Avem:

; .

Probabilitatea căutată este coeficientul lui *x2* din polinomul , de unde .

**2.4.2. Schema geometrică**

Fie că se fac experienle independente și în fiecare din ele probabilițatea apariției evenimentului *A* este una și aceeași  și .

Experiența continuă, pînă la primul succes (apare evenimentul *A*). Dacă evenimentul *A* apare pentru prinla oară în proba *k*, atunci în cele (*k* - l ) probe nu putea să apară. Conform teoremei înmulțirii probabilităților evenimentelor independente

.

Această schemă poartă denumirea de **schemă geometrică**, deoarece pentru *k* =1,2,… se obține o progresie geometrică cu rația *q*.

Exemplul 3. Se aruncă un zar. Să se afle probabilitatea că abia la a treia probă va aparea fața cu un număr mai mare sau egal de 5 puncte.

Rezolvare. Avem . Atunci .

* + 1. **Schema hipergeometrică (schema urnei cu bila nerevenită)**

Să analizăm următoarea roblem. Fie că într-un lot din *N* piese sunt *M* piese standard. Din lot la întîmplare se iau *n* piese (fără restituire). Să se afle probabilitatea că din *n* roblemate exact *m* vor fi standard. In acest caz, formula Bemoulli nu poate fi utilizată, Pentru a rezolva această roblem putem aplica definiția clasică a probabilității. Numărul total de cazuri posibile .

Vom calcula acum numărul de cazuri favorabile Din numărul total *M* de piese standard putem extrage *m* piese standard în moduri . Dar celelalte *n* – *m* piese trebuie să fie nestandard. Extragerea a *n*-*m* piese nestandard din *N* – *M* piese nestandard se poate efectua în  moduri. Atunci numărul total de cazuri favorabile va fi egal cu . Așadar, probabilitatea că din *n* piese extrase exact *m* vor fi standard este

,

adică după **schema hipergeometrică**.

Exemplul 4. Intr-o secție sunt 50 de piese, 20 fiind de calitate superioară. Să se afle probabilitatea că din 5 piese, luate la întîmplare, exact 3 vor fi de calitate superioară.

Rezolvare. Avem: *N* = 50; *M*= 20; *n* =5; *m* = 3. Atunci: .

**2.5. Teorema locală Laplace**

Din cele spuse mai sus, deja știm că pentru a afla probabilitatea că în *n* probe exact de *k* ori va apărea evenimentul *A*, poate fi aplicată formula lui Bemoulli , unde *p* este probabilitatea de apariție a evenimentului *A* în fiecare probă, iar *q*=1-*p*, iar *q* - probabilitatea de neapariție a acestui eveniment.

Se observă că pentru *n* destul de mare, dacă se utilizează formula lui Bemoulli, se cere efectuarea unor calcule voluminoase. Apare întrebarea: nu se poate oare pentru valori mari ale lui *n* de calculat în alt mod probabilitatea . Răspuns ne dă teorema locală Laplace care oferă o formulă (asimptotică) permite să calculăm aproximativ (dar cu o mare exactitate) această probabilitate pentru *n* destul de mare.

**Teorema 2.4 (locală Moivre-Laplace).** Dacă probabilitatea *p*(*A*) = *p* de apariție a evenimentului *A* este una și aceeași în fiecare probă (),atunci probabilitatea  este egală aproximativ cu valoarea

,

unde: , iar .

Valorile funcției  pentru valorile pozitive ale lui *x* se pot determina din tabele, care sunt prezentate în manualele de matematică superioară. Pentru valori negative ale lui *x* avem , adică funcția dată este pară. Pentru *x* > 5 .

De menționat că cu cît este mai mare numărul *n* cu atît mai exact se determină valoarea probabilității .

Exemplul 5. Să se afle probabilitatea că evenimentul *A* va apărea exact de 80 de ori din 400 de probe, dacă probabilitatea de apariție a acestuia este una și aceeaiși *p*(*A*)= 0.2 în fiecare probă.

Rezolvare. Avem: *n* = 400, *k*=80, *p*=0.2, *q*=1-*p*=0.8 și deci .

Atunci utilizînd formula asimptotică Laplace

,

Exemplul 6.

Probabilitatea de a nimeri ținta la o tragere este *p* = 0.75. Să se afle probabilitatea că din 10 probe exact de 8 ori vom nimeri ținta.

Rezolvare. Avem: *n* =10, *k=*8, . De aici .

Dacă vom folosi formula lui Bemoulli, vom obține . Această deosebire se explică prin faptul că numărul *n* este mic.

**2.5. Teorema integrală Moivre-Laplace**

Deseori în practică este necesar să aflăm probabilitatea ca din *n* evenimente echiprobabile să se realizeze un număr *k* de evenimente, cuprins între  și .

Această probabilitate poate fi calculată aproximativ după formula

,

unde , .

 Funcția se numește **funcția lui Laplace**. Folosind această funcție, probabilitatea  se va calcula astfel:

.

In tabelele funcției lui Laplace sunt prezintate valorile  pentru *x≥* 0. Pentru valorile negative ale lui *x* folosim proprietatea că , adică este o funcție impară. Pentru *x* > 5 .

Exemplul 7. Probabilitatea că piesa nu trece controlul calității este *p* = 0.2. Să se afle probabilitatea că din 400 de piese luate la întîmplare de la 70 pînă la 100 de piese vor fi necontrolate.

Rezolvare. Avem: *n* =400, , *p*=0.2, *q*=1-*p*=0.8. Atunci , .

 Conform formulei integrale Laplace, .

**Remarca 2.2**. Dacă , atunci fracția  va varia de la  pînă la. Prin urmare teorema integrală Laplace poate fi scrisă și astfel:

.

Această formă a teoremei integrale Laplace se utilizează, pentru a determina probabilitatea că, frecvența relativă, *k*/*n* a evenimentului *A* diforă de probabililatea *p* a acestuia nu mai mult decît cu *ε*, adică . Din inegalitatea avem: , sau .

Inmulțind ultima inegalitate la numărul pozitiv și obținem .

Aplicînd teorema integrală Laplace, obținem

.

Așadar .

Exemplul 8. Probabilitatea că piesa este nestandard este egală cu 0.1. Să se afle probabilitatea că printre 400 de piese luate la întîmplare frecvența relativă de apariție a piesei nestandard diferă de probabilitatea 0. l. după modul nu mai mult de 0.03.

Rezolvare. Avem: *n* =400, *p*=0.1, *q*=0.9, *ε* = 0.03. Atunci folosind formula de mai sus, obținem:

.

Din acest rezultat concludem, că dacă vor fi examinate mai multe loturi a căte 400 piese, atunci în 95.44% din ele abaterea frecvenței relative de la probabilitatea 0.1 nu va depăși 0.03.

**2.6. Formula lui Poisson**

 Exactitatea formulelor lui Laplace scade odată cu apropiere probabilității succesului *A* de 0 sau 1. De aceia, apare necisității obținerii unei formule asimptotice pentru cazul, cînd *p* este mica, adică determinarea probabilității apariției a *k* succese în cazul în care **î**nsăși **succesul este un eveniment rar**. Așa situații sunt destul de frecvente în practică: de exemplu, nașterea gemenilor, atingerea vîrstei de 100 ani, numărul greșelilor gramatice într-o carte.

 Această aprocsimare a probabilității în cauză se obține din formula lui Bernoulli.

În formula  vom considera , iar *n⋅p*=*λ* un număr constant. Atunci

=

.

Trecem la limită în ultima expresie pentru *n*→∞.

.

Atunci de aici rezultă:

**Teorema 2.5 (Poisson).** Dacă probabilitatea *p*(*A*) = *p* de apariție a evenimentului *A* este una și aceeași în fiecare probă (), și în diferite serii a cite *n* probe independente numărul *n⋅p*=*λ* este o mărime constantă, atunci probabilitatea  că exact în *k* probe va apărea evenimentul *A* este egală aproximativ (și cu atăt mai exact cu cît este mai mare n) cu valoarea

 .

 Din această formulă rezultă și formula

.

 În formula lui Poisson numărul *λ* = *n⋅p* reprezintă **numărul mediu de succese**.

Exemplul 9. Probabilitatea că confecționării unei piese cu defect este egală cu 0.008. Să se determine probabilitatea că din 1000 piese fabricate a) 8 piese vor fi cu defect; b) mai puțin de 3 piese vor fi cu defect.

Rezolvare. Considerăm evenimentul *A* - piesa fabricată este nestandard. Avem: *n* = 1000, *p*=0.008, λ=*n⋅p* = 8.

* 1. *k*=8. Aplicăm formula Poisson  și obtinem:

.

* 1. 0≤*k<*3

.

***Probleme rezolvate***

1. Să se afle probabilitatea că evenimentul *A* va apărea nu mai puțin de două ori în cele cinci probe independente, dacă în fiecare din ele probabilitatea de apariție a evenimentului este egală cu 0.3.

Rezolvare. Considerăm evenimentul *B* apariția evenimentului *A* nu mai puțin de două ori în cinci probe. Atunci, din formula lui Bernoulli rezultă:.

1. Evenimentul *A* apare numai atunci cînd un alt eveniment *B* va apărea nu mai puțin de două ori. Să se afle probabilitatea că va apărea evenimentul *A*, dacă se efectuează 6 probe independente, în fiecare din ele probabilitatea de apariție a evenimentului *B* fiind egală cu 0.4.

Rezolvare

.

1. Se știe că 75% din semințe au capacitatea de a încolți. Să se afle probabilitatea că din 500 de semințe nu vor încolți 130.

Rezolvare. Considerăm evenimentul *A* - încolțirea unei semințe. Avem: *n=*500, *k* =500 – 130= 370, *p=* 0.75, *q*=0.25.

Utilizînd λformula lui Laplace, obținem .

Cum , rezultă că .

1. Să se afle probabilitatea că printre 1000 de piese fabricate 5 vor fi nestandard, dacă se știe că probabilitatea ca o piesă fabricată să fie nestandard este egală cu 0.004.

Rezolvare. Considerăm evenimentul *A* - piesa fabricată este nestandard. Avem: *n* = 1000, *p*=0.004, λ=*n⋅p* = 4; *k* = 5.

Deoarece *n* este mare, iar *p* foarte mic, aplicăm formula Poisson  și obtinem:

.

1. Probabilitatea că, piesa trece controlul calității este 0.8. Să se afle probabilitatea că din 100 de piese luate la întîmplare vor trece controlul: a) de la 75 pînă la 90 de piese; b) nu mai puțin de 75 de piese; c) nu mai mult de 74 de piese.

Rezolvare. Avem: *n* =100, , *p*=0.8, *q*=1-*p*=0.2. Conform formulei Laplace

, unde , .

Obținem

* 1. 
	2. 
	3. 
1. Probabilitatea că va apărea evenimentul *A* în fiecare din 10000 de experiențe independente este egală cu 0.75. Să se afle probabilitatea că frecvența relativă de aparigie a evenimentului *A* diferă de probabilitatea sa după modul, nu mai mult de 0.001.

Rezolvare. Avem: *n* = 10000, *p* = 0.75, *q* = 0.25. Atunci

.

***Probleme propuse***

1. Se aruncă o monedă de 6 ori. Să se afle probabilitatea că va apărea fața cu stema (evenimentul *A*): a) mai puțin de două ori; b) nu mai puțin de două ori.
2. Intr-un kg de semințe 90% din ele au capacitatea de a încolți. Să se afle probabilitatea că din 4 semințe vor încolți: a 3 semințe; b) nu mai puțin de 3.
3. Probabilitatea de a produce o piesă standard în amunite condiții este egală cu 0.98. Să se afle numărul cel mai probabil de piese standard printre cele 625 de piese produse
4. Intr-o umă sunt 6 bile albe si 9 negre. Din umă, se extrage o bilă, se memorizează culoarea ei și se reîntoarce în umă. Această experiență se efectuează de trei ori. Care este probabilitatea că din cele trei bile extrase exact două vor fi albe . 
5. Evenimentul *A* apare într-o probă cu probabilitatea 0.2. Au fost efectuate 14 probe independente Care este cel mai probabil număr de apariții ale evenimentului *A* fși probabilitatea acestui număr de apariții?
6. In urma unei experiențe, evenimentul *A* apare cu probabilitatea 0.01. De cîte ori trebuie repetată experiența ca să se poată astepta cu probabilitatea 0.5 cel putuin o apariție a evenimentului *A* ?
7. De la o uzină au fost trimise la bază 500 de piese Probabilitatea că în timpul transportărși piesa va fi defectată este egală cu 0.002. Să se afle probabilitatea, că în procesul de transportare au fost defectate: a) trei piese; b) mai puțin de trei; c) mai mult de trei; d) cel puțin o piesă. 
8. Testul la examenul de matematică pentru bacalaureat conține 14 subiecte. La 12 din ele sunt indicate cîte 3 răspunsuri, printre care unul corect, iar la două subiecte cîte 5 răspunsuri din care trebuie ales unul corect. Care-i probabilitatea că, indicînd la întîmplare răspunsurile, se vor obține 10 răspunsuri corecte?
9. Să se afle numărul de aruncări ale monedei pentru ca cu probabilitatea de 0.6 să putem afirma că frecvența relativă de apariție a feței cu banul diferă de probabilitatea sa *p* = 0.5 după modul nu mai mult de 0.01.
10. Vînătorul trage la tintă pînă la reușită. Să se determine probabilitatea că lui îi va rămîne cel putin un cartuș, dacă el avea de la început, 5 cartușe, iar probabilitatea de a nimeri ținta e constantă și este egală cu 0.4.