Технический Университет Молдовы

Факультет Вычислительной техники, Информатики и Микроэлектроники

Кафедра Автоматики и Информационных Технологий

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

к практическим занятиям

Кишинэу

2008

Настоящая методическая работа составлена в соответствии с программой по дискретной математике и предназначена для студентов специальностей «Автоматика и Информационные технологии» (526.2) и «Электронные вычислительные машины» (526.1) всех форм обучения.

Составители: Галина Марусик, старший преподаватель

Георге Чебан, старший преподаватель

Родика Булай, старший преподаватель

Ответственный редактор В.Бешлиу, конференциар, доктор

Рецензент И.Балмуш, конференциар, доктор

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Множества и подмножества. Операции над множествами. Векторы и прямые произведения. Соответствия и функции. Отношения. Алгебры и алгебраические системы

1.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Назовите элементы множества $\{\{5,6,7\},8,\varnothing\}$?

Решение: Множество A состоит из трех элементов: 1-й элемент – это множество $\{5,6,7\}$, 2-й элемент – целое число 8, а 3-й элемент – пустое множество.

2. Найдите элементы множества $A=\{x\in Z \mid (x\text{-}3)(x^2\text{-}1)=0$ и $x\geq 0\}$.

Решение: A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x\text{-}3)(x^2\text{-}1)=0$. Следовательно, $A=\{1,3\}$.

3. Определите порождающую процедуру для множества $A=\{1,2,4,8,16,32,64,...\}$.

Решение: Порождающая процедура для множества A определяется следующими двумя правилами:

а) $x_1=1$, $x_2=2$;

б) $x_{i+1}=2^i$, $i=1,2,3,4,\ldots$

4. Определите, какие из приведенных утверждений справедливы, а какие нет:

а) $\varnothing\in\varnothing$; б) $\varnothing\subseteq\varnothing$; в) $\varnothing\in\{\varnothing\}$; г) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

Решение:

а) неверно, так как пустое множество по определению не содержит элементов;

б) справедливо, так как пустое множество является подмножеством любого множества, в том числе и пустого;

в) справедливо, так как представленное множество $\{\varnothing\}$ содержит один элемент - $\varnothing$;

г) справедливо, так как пустое множество является подмножеством любого множества, в том числе и множества $\{\varnothing\}$.

5. Пусть задано множество $B=\{0,1\}$. Определите $|B|$, $\rho(B)$, $|\rho(B)|$, $\rho(\rho(B))$ и $|\rho(\rho(B))|$.

Решение: Число элементов конечного множества B называют *мощностью* этого множества и обозначают символом $\mathrm{Card}B$ или $|B|$.

Множество $\rho(B)$, которое содержит все подмножества множества B, называется *булеаном* множества B.

Множество B конечно и его мощность $|B|=2$.

$\rho(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

Мощность $|\rho(B)|$ булеана множества B равна 4: $|\rho(B)|=2^2=4$.

$\rho(\rho(\mathrm{B}))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}$.

Мощность $|\rho(\rho(B))|$ булеана множества $\rho(\rho(B))$ равна 16: $|\rho(\rho(B))|=2^4=16$.

6. Определите мощность множества

$$A=\{(x,y)\in N\times N| \ x+3y=2001\}.$$

Решение: $3y=2001\text{-}x \Rightarrow y=667\text{-}\dfrac{x}{3} \Rightarrow x=3k \Rightarrow y=667\text{-}k$, где $0 \le k \le 667$.

Следовательно, мощность данного множества $|A\,|=668$.

7. Запись $m|n$, где $m,n\in Z$, означает, что число m есть делитель числа n. Найдите элементы множества $A\cap B$, если: $A=\{x\in N \mid 12|x\}$ и $B=\{x\in N \mid \ 8|x\}$.

Решение: Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B=\{x \mid x\in A$ и $x\in B\}$.

Множество A состоит из натуральных чисел, которые делятся на число 12: $A=\{12, 24, 36, 48, ...\}$, а множество B

состоит из натуральных чисел, которые делятся на число 8: $B=\{8, 16, 24, 32, ...\}$. Поэтому $A\cap B=\{24k \mid k\in N\}$.

8. Пусть $A\in R$ и $B\in R$, $A=(-1,\ 2]$ и $B=[1,\ 4)$. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

Решение:

Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ или } x\in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество $A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$.

$A\cup B=(-1, 4)$, $A\cap B=[1, 2]$, $A\backslash B=(-1, 1)$, $B\backslash A=(2, 4)$.

9. Для заданного семейства множеств A_n, $n\in N$ найдите $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ и $\bigcap\limits_{n\in N} A_n$, если $A_n=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\}$.

Решение: $\bigcup\limits_{n\in N} A_n=\left\{x\in R \mid x=\frac{1}{n}, n\in N\right\}$, $\bigcap\limits_{n\in N} A_n=\{1\}$.

10. Приняв отрезок $U=[0,5]$ за универсальное множество, найдите дополнение следующего множества: $A=\{0,5\}$.

Решение: Дополнением множества A (до множества U) называется множество $C_u A=\overline{A}=\{x \mid x\in U \text{ и } x\notin A\}$.

Следовательно: $C_u A=\overline{A}=(0,5)$.

11. Определите непустые множества A, B и C, которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$;

$A\cap C=\{4\}$;

$C\setminus A=\{1,2,3\}$;

$B\setminus A=\{1\}$;

$3\notin A\cup B$;

$B\Delta C=\{5,2,3\}$.

Решение: $A=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\} \Rightarrow A=\{4,5\}$;

$B=\{1,\cancel{2},\cancel{3},4,5\} \Rightarrow B=\{1,4,5\}$;

$C=\{1,2,3,4,\cancel{5}\} \Rightarrow C=\{1,2,3,4\}$.

12. Определите непустые множества *A*, *B* и *C,* которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

$$A\times\{1, 2, 4\}\subseteq\{1, 2, 3, 5\}\times B;$$
$$\{1, 2, 3\}\times B\subseteq A\times\{1, 2, 4, 5\};$$
$$(5, 3)\notin A\times B;$$
$$(1, 5)\in A\times B;$$
$$A\Delta B=\{3, 4, 5\}.$$

Решение: $M\times N\subseteq A\times B \Rightarrow M\subseteq A$ и $N\subseteq B$.

1. $A\subseteq\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4\}\subseteq B$;

2. $\{1, 2, 3\}\subseteq A$, $B\subseteq\{1, 2, 4, 5\}$;

$$A=\{1,2,3,\cancel{4},\cancel{5}\} \quad\Rightarrow\quad A=\{1, 2, 3\};$$
$$B=\{1,2,\cancel{3},4,5\} \quad\Rightarrow\quad B=\{1, 2, 4, 5\}.$$

13. Пусть даны множества *E*, *F* и *G*. Равны ли между собой множества *A* и *B*?

$$A=E\times(F\cup G),\qquad B=(E\times F)\cup(E\times G).$$

Решение:

$E\times(F\cup G)=\{(x,y)\mid x\in E, y\in F\cup G\}=\{(x,y)\mid x\in E, y\in F \text{ или } y\in G\}$;

$(E\times F)=\{(x,y)\mid x\in E, y\in F\}$;

$(E\times G)=\{(x,y)\mid x\in E, y\in G\}$;

$(E\times F)\cup(E\times G)=\{(x,y)\mid x\in E, y\in F, y\in G\}$.

Замечаем, что $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, следовательно, $A=B$.

14. Докажите справедливость следующего выражения:

$$((S\cup T)-R)\equiv((S-R)\cup(T-R)).$$

Доказательство: Для того чтобы доказать эквивалентность двух выражений *E* и *F*, необходимо:

а) выбрать произвольный элемент *x* из *E* и доказать, что он принадлежит и *F*;

б) выбрать произвольный элемент *x* из *F* и доказать, что он принадлежит и *E*.

а) Предположим что *x* принадлежит выражению, которое находится в левой части.

Последовательность рассуждений приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Этап		Объяснение
1	$x \in ((S \cup T)\text{-}R)$	дано
2	$x \in (S \cup T)$	определение операции “-” и (1)
3	$x \notin R$	определение операции “-” и (1)
4	$x \in S$ или	определение операции “$\cup$”, (1) и (2)
5	$x \in T$	определение операции “$\cup$”, (1) и (2)
6	$x \in (S–R)$ или	определение операции “-”, (4) и (3)
7	$x \in (T\text{-}R)$	определение операции “-”, (5) и (3)
8	$x \in ((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R))$	определение операции “$\cup$”, (6) и (7)

Пришли к заключению, что x принадлежит и правой части. Так как x был выбран произвольно, то левая часть является подмножеством правой части: $((S \cup T)\text{-}R) \subseteq ((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R))$.

Необходимо еще доказать, что и правая часть является подмножеством левой части.

б) Предположим, что $x \in ((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R))$.

Последовательность рассуждений приведена в табл. 1.2.

Таблица 1.2.

Этап		Объяснение
1	$x \in ((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R))$	дано
2	$x \in (S\text{-}R)$ или	определение операции “$\cup$” и (1)
3	$x \in (T\text{-}R)$	определение операции “$\cup$” и (1)
4	$x \in S$	определение операции “-” и (2)
5	$x \notin R$	определение операции “-” и (2)
6	$x \in T$	определение операции “-” и (3)
7	$x \in (S \cup T)$	определение операции “$\cup$”, (4) и (6)
8	$x \in ((S \cup T)\text{-}R)$	определение операции “-”, (7) и (5)

Из табл. 1.2 следует, что $((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R)) \subseteq ((S \cup T)\text{-}R)$.

Из табл. 1.1 и 1.2 следует, что $((S\text{-}R) \cup (T\text{-}R)) \equiv ((S \cup T)\text{-}R)$.

15. Представьте графически множества M^2, N^2, P^2, $M\times N$, $M\times P$, $N\times P$, если:

$$M=\{-2,1\}\cup\{0, 2\},$$
$$N=\{-2, 1\}\cup[0, 2],$$
$$P=[-2,1]\cup[0,2].$$

Решение:

$M=\{-2, 1, 0, 2\}$,

$M^2=M\times M=\{-2, 1, 0, 2\}\times\{-2, 1, 0, 2\}$ (рис. 1.1).

$N=\{-2, 1\}\cup[0, 2]=\{-2\}\cup[0, 2]$,

$N^2=(\{-2\}\cup[0,2])\times(\{-2\}\cup[0,2])$ (рис. 1.2).

$P=[-2,1]\cup[0,2]=[-2, 2]$, $P^2=[-2,2]\times[-2,2]$ (рис. 1.3).

$M\times N=\{-2,1,0,2\}\times(\{-2\}\cup[0,2])$ (рис. 1.4).

$M\times P=\{-2,1,0,2\}\times[-2,2]$ (рис. 1.5).

$N\times P=(\{-2\}\cup[0,2])\times[-2.2]$ (рис. 1.6).

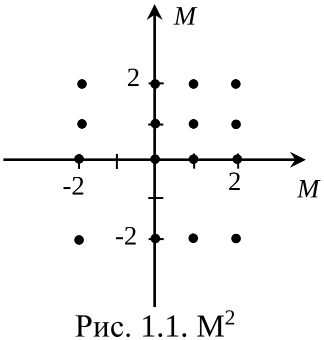


Рис. 1.1. M^2

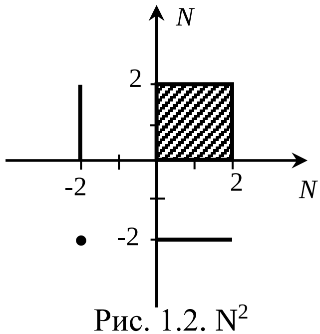


Рис. 1.2. N^2

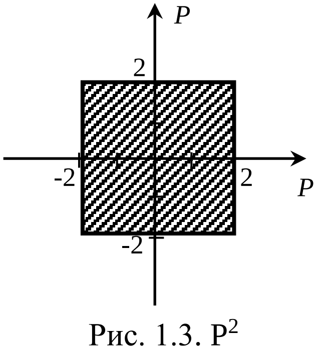


Рис. 1.3. P^2

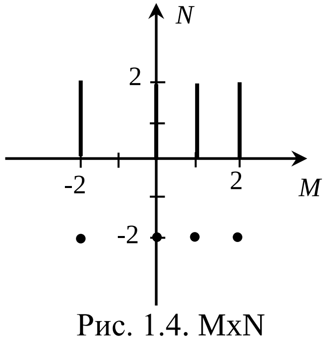


Рис. 1.4. MxN

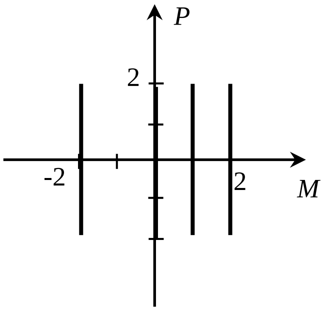


Рис. 1.5. MxP

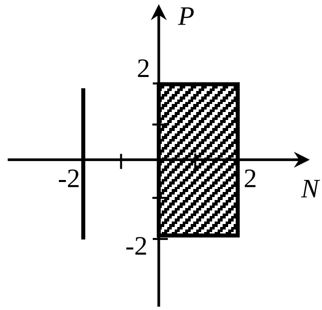


Рис. 1.6. NxP

16. Докажите, что объединение двух счетных множеств является счетным множеством.

Доказательство: Множества *равномощны,* если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Множества, равномощные N, называются *счетными.*

Пусть A и B – счетные множества:

$A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$,

$B=\{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$,

$C=A\cup B =\{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...\ a_n, b_n\ \dots\ \}$.

Множество C является счетным, так как каждый элемент можно занумеровать (например, a_2 можно достигнуть через 3 шага, b_2 через 4 шага, a_j через ($2j$-1) шага, а b_j через $2j$ шага).

17. Докажите, что любое подмножество некоторого счетного множества является счетным.

Доказательство: Пусть $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. Выберем из A первые четыре элемента. Получим:

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\cup \{a_5, a_6,\dots, a_n, \dots\}$.

Множество $\{a_1,a_2, a_3, a_4\}$ является конечным, а это означает что оно является счетным.

Множество $\{a_5, a_6,\dots, a_n, \dots\}$ эквивалентно множеству натуральных чисел, так как возможно образование множества C пар $\{(a_5,1), (a_6,2),\dots,(a_n,(n\text{-}4)),\dots\}$, т.е. является счетным множеством.

18. Докажите, что любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество B.

Доказательство: Пусть A бесконечное множество. Выделим из множества A произвольный элемент и обозначим его a_1. Так как множество A бесконечно, то оно не исчерпывается выделением элемента a_1, и мы можем выделить элемент a_2 из оставшегося множества. Ввиду бесконечности множества A мы можем продолжать этот процесс неограниченно, в результате чего получим последовательность выделенных элементов a_1, a_2, a_3, ..., a_n,.., которая и образует искомое счетное подмножество B множества A.

19. Установите свойства соответствия между множеством A и множеством B (отображение $f: A \to B$), удовлетворяющее равенству $y = 2x$, если

$$A=\{0,1,4\},$$
$$B=(-\infty, +\infty).$$

Решение: Соответствием между множествами A и B называется подмножество $H = A \times B$. Множество npH_1 называется *областью определения соответствия,* множество npH_2 называется *областью значений соответствия*.

На основании заданного равенства определим значения $y \in B$, когда x принимает значения из множества A:

x	0	1	4
y	0	2	8

Каждому элементу x из множества A соответствует один элемент y из множества B: 0→0, 1→2, 4→8; имеет место отображение A на B. Область определения соответствия – множество $\{0,1,4\}$, а область значений соответствия – множество $\{0,2,8\}$.

Замечаем, что всем элементам x из множества A соответствуют элементы $y \in B$, а это означает, что соответствие является *всюду определенным*.

Данное соответствие *не является сюръективным*, так как не всем элементам y из множества B соответствуют элементы $x \in A$.

Соответствие является *функциональным*, так как каждому элементу $x \in A$ соответствует один единственный элемент $y \in B$.

Соответствие является *инъективным*, так как каждому элементу из области значений соответствует один единственный элемент из области определения.

20. Найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций: $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$.

Решение: Пусть даны функции $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Функция $h: A \to C$ называется *композицией* функций f и g (обозначение $f \circ g$), если имеет место равенство $h(x)=g(f(x))$, где $x \in A$. Имеем:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

и

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

21. Установите свойства соответствия между множеством месяцев года и множеством $\boldsymbol{N}_{12}$ натуральных чисел от 1 до 12.

Решение: Представление месяцев года через их числа является биекцией между множеством месяцев и множеством $\boldsymbol{N}_{12}$ натуральных чисел от 1 до 12:

$A = \{январь, февраль, ..., декабрь\}$ - множество месяцев,

$B = \{1,2,3,...,12\}$ - множеством $\boldsymbol{N}_{12}$ натуральных чисел от 1 до 12.

$H \subseteq A \times B = \{(январь,1),(февраль,2),...,(декабрь,12)\}$ - установленное соответствие между множествами A и B.

Свойства соответствия:

1. $пр_1 H = A$ - *всюду определено*, так как всем элементам из множества A соответствуют элементы из множества B;

2. $пр_2 H = B$ - *сюръективно*, так как всем элементам из множества B соответствуют элементы из множества A;

3. *функционально*, так как каждому элементу из области определения соответствует один единственный элемент из области значений;

4. *инъективно*, так как каждому элементу из области значений соответствует один единственный элемент из области определения соответствия.

22. Определите два множества A и B и соответствие (отображение f: $A \to B$), которое позволило бы истолковать ситуацию: „англо-румынский словарь”.

Решение: Англо-румынский словарь устанавливает соответствие между множеством английских (множество A) и множеством румынских (множество B) слов. Это соответствие не является функциональным (так как одному английскому слову, как правило, ставится в соответствие несколько румынских слов); кроме того, оно практически никогда не является полностью определенным: всегда можно найти английское слово, не содержащееся в данном словаре.

23. Пусть M - множество детей у одних родителей: M = $\{$*Коля, Саша, Вера*$\}$. На множестве M задается отношение R = «*быть братом*». Найдите элементы множества R. Постройте соответствующую матрицу.

Решение: Рассмотрим отношение «*быть братом*» на множестве M. Выпишем те пары (a,b) элементов из M, в которых a является братом b. Это множество $R=\{$(*Коля, Вера*), (*Коля,Саша*), (*Саша, Вера*), (*Саша, Коля*)$\}$.

Матрица, соответствующая отношению «*быть братом*» на множестве M, дана на рисунке 1.7.

	Коля	*Саша*	*Вера*
Коля	0	1	1
Саша	1	0	1
Вера	0	0	0

Рис. 1.7

24. На множестве M = {2,4,8,16} задается отношение «a делится на b без остатка». Определите элементы и свойства соответствующего отношения.

Решение:

$R = \{(2,2),(4,4),(8,8),(16,16),(4,2,(8,2),(8,4),(16,2),(16,4),(16,8))\}$.

Отношение «a делится на b без остатка» на заданном множестве M = {2,4,8,16} является:

а) *рефлексивным*, так как для всякого $a \in M$ верно aRa, т.е. любой элемент из множества M делится на себя без остатка;

б) *антисимметричным*, так как для несовпадающих элементов a и b, принадлежащих M, из aRb не следует bRa, т.е. из того, что 4 делится на 2 без остатка, не следует что и 2 делится на 4 без остатка;

в) *транзитивным*, так как для любых трех элементов a, b и c, принадлежащих M, из aRb и bRc следует aRc, т.е. если 4 делится на 2 без остатка и 8 делится на 4 без остатка, то и 8 делится на 2 без остатка.

25. Пусть Q_z –множество всех целых чисел, Q_{2z}-множество всех четных чисел. Доказать, что алгебры (Q_z; +) и (Q_{2z}; +) изоморфны.

Доказательство: Рассмотрим две алгебры одинакового типа: $A = (K; \varphi_1, ..., \varphi_p)$ и $B = (M; \psi_1, ..., \psi_p)$. *Гомоморфизмом* алгебры A в алгебру B называется отображение $\Gamma : K \to M$, удовлетворяющее условию $\Gamma(\varphi_i(k_{j1}, ..., k_{jl(i)})) = \psi_i(\Gamma(k_{j1}), ..., \Gamma(k_{jl(i)}))$ для всех $i = 1, ..., p$ и всех $k_{jr} \in K$, $l(i)$- арность операций φ_i и ψ_i, которая у них по условию одинакова.

Изоморфизмом алгебры A на алгебру B называется взаимно-однозначный гомоморфизм. В этом случае существует обратное отображение $Г^{-1}: M \to K$, также взаимно однозначное.

Замечаем, что алгебры (Q_z; +) и (Q_{2z}; +) одинакового типа-типа (2), так как *"+"* - бинарная операция. Изоморфизмом является отображение $Г_{2n} : n \to 2n$, причем условие гомоморфизма здесь имеет вид: $2(a+b)=2a+2b$. Смысл этого условия состоит в том, что независимо от того, выполнена ли сначала операция *"+"* в множестве Q_z и затем произведено отображение $Г$, либо сначала произведено отображение $Г$, а затем в Q_{2z} выполнена соответствующая операция *"+"*, результат будет одинаков.

Отображение $Г_{-n}: n \to (-n)$ является для алгебры (Q_z; +) автоморфизмом, так как $(-a)+(-b)=-(a+b)$.

1.2. ЗАДАЧИ

1. Какие из приведенных ниже выражений неверны и почему?

а) $\{a\} \in \{a,b,c\}$;

б) $a \in \{a,b,c\}$;

в) $\{a,b\} \in \{a,b,c\}$;

г) $\{b,c\} \in \{a,b,c\}$.

2. Проверьте, равны ли множества A и B.

а) $A=\{1, (2,5), 6\}$, $B=\{1,2,5,6\}$;

б) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{5,2,4\}$;

в) $A=\{1,4,2\}$, $B=\{1,2,4\}$;

г) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{2,4,3\}$;

д) $A=\{1,\{2,5\},6\}$, $B=\{1,\{5,2\},6\}$;

е) $A=\{1,\{2,7\},8\}$, $B=\{1,(2,7),8\}$.

3. Приняв отрезок $U=[0,1]$ за универсальное множество, найдите дополнения следующих множеств:

а) $B=(1/4,1/2)$;

б) $C=(0,1/2]$;

в) $D=\{1/4\}\cup[3/4,1)$.

4. Для множества $B=\{a, b\}$ определите:

а) элементы $\rho(B)$;

б) элементы $\rho(\rho(B))$.

5. Установите, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1,2\}\subseteq\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\}\subseteq\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

6. Определите мощность множества

$A=\{(x,y)\in N\times N \mid 5x+3y=1980\}$.

7. Найдите элементы заданных множеств:

а) $A=\{x\in R \mid x(x+5)=14\}$;

б) $A=\{x\in R \mid x^3-3x^2+2x=0\}$;

в) $A=\{x\in R \mid x+1/x \le 2$ и $x>0\}$;

г) $A=\{x\in N \mid x^2-3x-4 \le 0\}$;

д) $A=\{x\in N \mid \log_{1/2}1/x<2\}$;

е) $A=\{x\in R \mid \cos^2 2x=1$ и $0 < x \leq 2\pi\}$.

8. Описать перечислением всех элементов множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ и $B\setminus A$, если:

$$A=\{x\in R \mid x^2+x-20=0\},\ B=\{x\in R \mid -x^2+x+12=0\}.$$

9. Запись $m|n$, где $m,n\in Z$, означает, что число m есть делитель числа n. Описать следующие множества:

а) $\{x\in N \mid x|8$ и $x\neq 1\}$;

б) $\{x\in N \mid x|12\}\cap\{x\in N \mid x|8\}$;

в) $\{x\in Z \mid 8|x\}$;

г) $\{x\in N \mid 12 \mid x\}\cap\{x\in N \mid 8 \mid x\}$.

10. Пусть $A=\{x\in N \mid 2< x \leq 7\}$, $B=\{x\in N \mid 1 \leq x< 5\}$, $C=\{x\in N \mid x^2\text{-}9=0\}$.

Найдите множества:

а) $B\cup C$; б) $A\cap B\cap C$;

в) $A\cup B\cup C$; г) $(A\cap B)\cup(B\cup C)$;

д) $B\times C$; е) $C\times B$.

11. Докажите, что для ($\forall$) $m\in R$ множество $\{x\in R|x^2+2(m+1)x+m=0\}\cup\{x\in R|x^2+2mx+m\text{-}1=0\}$ содержит четыре элемента.

12. Для заданных семейств множеств A_n, $n\in N$ найдите $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ и $\bigcap\limits_{n\in N} A_n$:

а) $A_n=\{3n\text{-}2, 3n\text{-}1\}$;

б) $A_n=\{x\in Z \mid \text{-}n\leq x \leq n\}$.

13. Определите непустые множества, которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

а) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$;
$A\setminus B=\{1,2\}$;
$A\cap B=\{3,4\}$;
$B\setminus A=\{5\}$.

б) $C\times\{1,2,4\}\subseteq\{1,2,3,5\}\times B$;
$\{1,2,3\}\times B\subseteq C\times\{1,2,4,5\}$;
$(5,3)\notin C\times B$;
$(1,5)\in C\times B$;
$C\Delta B=\{3,4,5\}$.

в) $A\cap C=\{1,2,5\}$;
$B\cup C=\{1,2,4,5,6\}$;
$C\backslash A=\{6\}$;
$C\Delta B=\{1,5,4,6\}$.

г) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$;
$5\notin A\backslash B$;
$A\cap B=\{1,2\}$;
$|A|>|B|$.

14. Проверьте справедливость равенств:

а) $(S\cup(T\cap R))\equiv((S\cup T)\cap(S\cup R))$;

б) $(S-(T\cup R))\equiv((S-T)-R)$;

в) $E\times(F\cap G)=(E\times F)\cap(E\times G)$;

г) $E\cup(F\times G)=(E\cup F)\times(E\cup G)$;

д) $E\cap(F\times G)=(E\cap F)\times(E\cap G)$;

е) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

15. Представьте графически множества A^2, B^2, C^2, $A\times B$, $A\times C$, $B\times C$, если:

а) $A=[-3,-1]\cup[1,3]$;
$B=\{-3,-1\}\cup[1,3]$;
$C=\{-3,-1\}\cup\{1,3\}$.

б) $A=[2,5]\cup[3,7]$;
$B=\{2,5\}\cup[3,7]$;
$C=\{2,5\}\cup\{3,7\}$.

в) $A=\{-3,3\}\cup\{0,4\}$;
$B=\{-3,3\}\cup[0,4]$;
$C=[-3,3]\cup[0,4]$.

16. Докажите, что:

а) $\rho(S)\cup\rho(T)\subseteq\rho(S\cup T)$;

б) $\rho(S)\cap\rho(T)=\rho(S\cap T)$.

17. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество**.**

18. Докажите, что множество конечных подмножеств множества N является счетным.

19. Докажите, что объединение конечного множества и счетного множества без общих элементов есть счетное множество.

20. Докажите, что объединение конечного числа попарно не пересекающихся счётных множеств есть счётное множество.

21. Установите свойства соответствия между множеством A и множеством B (отображение $f: A \to B$), удовлетворяющее заданному равенству:

а) $A = \{0,2,6\}$, $B = (-\infty, +\infty)$, $y = -\dfrac{3}{5}x$.

б) $A = Z$, $B = Z$, $y = x^2$.

в) $A = N$, $B = N$, $y = x^2 + x$.

22. Найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций:

а) $f(x)=1-x$, $g(x)=x^2$; б) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$;

в) $f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ x, x \in (0, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ -x^2, x \in (0, +\infty) \end{cases}$;

г) $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \arcsin x$.

23. На множестве $M = \{2,4,6,8\}$ задается отношение

R = “*быть больше*”.

Определите элементы множества R. Представьте графически и установите свойства заданного отношения.

24. Определите два множества A и B и соответствие (отображение $f{:}A \to B$), которое позволило бы истолковать следующие ситуации:

а) оглавление некоторой книги;

б) англо-русский словарь;

в) кодирование букв азбукой Морзе.

25. Докажите, что алгебры $(R_+, \times)$ и $(R, +)$ являются изоморфными. (R_+ - положительное подмножество R).

1.3. ОТВЕТЫ

1. а) неверно; б) верно; в) неверно; г) неверно.
2. а) $A \neq B$; б) $A = B$; в) $A = B$;
   г) $A \neq B$; д) $A = B$; е) $A \neq B$.
3. а) $\overline{B} = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; б) $\overline{C} = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$;
   в) $\overline{D} = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \{1\}$.
4. а) $\rho(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;
   б) $\rho(\rho(B))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\varnothing,\{a\}\}, \{\varnothing,\{b\}\},\{\varnothing,\{a,b\}\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},\{\{b\},\{a,b\}\},\{\varnothing,\{a\},\{b\}\},\{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\},\{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\},\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\varnothing, \{a\},\{b\}, \{a,b\}\}\}$.
5. а) $\{1,2\} \subseteq \{1,2,\{1,2,3\}\}$; б) обе записи верны.
6. $3y=1980-5x \Rightarrow y=660-\frac{5x}{3} \Rightarrow x=3k \Rightarrow y=660-5k$, где $0\le k\le 132$.

Следовательно, $|A|=133$.

7. а) $A = \{-7,2\}$; б) $A = \{0,1,2\}$; в) $A = \{1\}$;
   г) $A = \{1,2,3,4\}$; д) $A = \{1,2,3\}$;
   е) $A = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$.
8. $A \cup B = \{-5,-3,4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{-3\}$.
9. а) $\{2,4,8\}$; б) $\{1,2,4\}$; в) $\{8k \mid k \in Z\}$; г) $\{24k \mid k \in N\}$.
10. а) $\{1,2,3,4\}$; б) $\{3\}$; в) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; г) $\{1,2,3,4\}$;
    д) $\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$; е) $\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.
12. а) $\{n \in N \mid n \neq 3k, k \in N\}$, Ø; б) Z, $\{-1,0,1\}$.
13. а) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$;
    б) $C = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4,5\}$;
    в) $A = \{1,2,5\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{1,2,5,6\}$;
    г) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5\}$.

14. а) справедливо; б) справедливо; в) справедливо;
г) неверно; д) неверно; е) справедливо.

15. а) $A = [-3,-1] \cup [1,3]$; $B = \{-3,-1\} \cup [1,3]$; $C = \{-3,-1,1,3\}$.

$A^2 = A \times A = ([-3,-1] \cup [1,3]) \times ([-3,-1] \cup [1,3])$ (рис. 1.1).

$B^2 = B \times B = (\{-3,-1\} \cup [1,3]) \times (\{-3,-1\} \cup [1,3])$ (рис. 1.2).

$C^2 = C \times C = \{-3,-1,1,3\} \times \{-3,-1,1,3\}$ (рис. 1.3).

$A \times B = ([-3,-1] \cup [1,3]) \times (\{-3,-1\} \cup [1,3])$ (рис. 1.4).

$A \times C = ([-3,-1] \cup [1,3]) \times \{-3,-1,1,3\}$ (рис. 1.5).

$B \times C = (\{-3,-1\} \cup [1,3]) \times \{-3,-1,1,3\}$ (рис. 1.6).

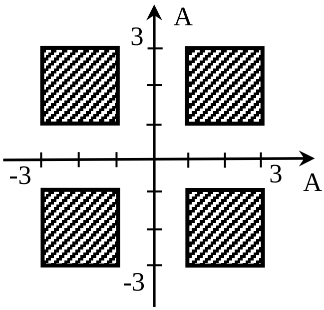


Рис. 1.1. A^2

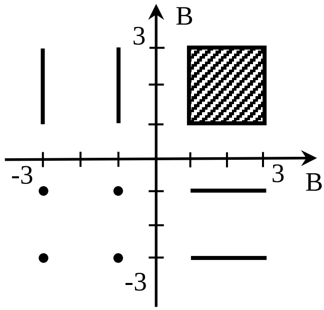


Рис. 1.2. B^2

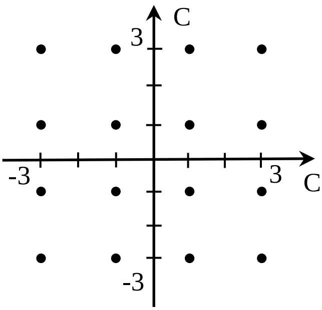


Рис. 1.3. C^2

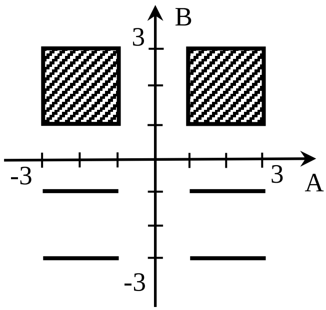


Рис. 1.4. AxB

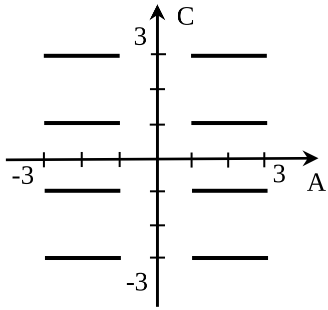


Рис. 1.5. AxC

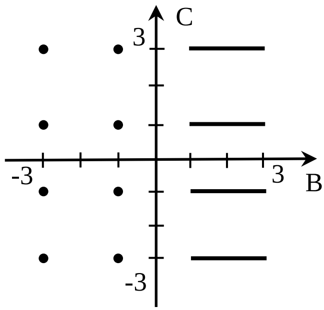


Рис. 1.6. BxC

б) $A = [2,7]$; $B = \{2\} \cup [3,7]$; $C = \{2{,}5{,}3{,}7\}$.

$A^2 = A \times A = [2,7] \times [2,7]$.

$B^2 = B \times B = (\{2\} \cup [3,7]) \times (\{2\} \cup [3,7])$.

$C^2 = C \times C = \{2{,}5{,}3{,}7\} \times \{2{,}5{,}3{,}7\}$.

$A \times B = [2,7] \times (\{2\} \cup [3,7])$.

$A \times C = [2,7] \times \{2{,}5{,}3{,}7\}$.

$B \times C = (\{2\} \cup [3,7]) \times \{2{,}5{,}3{,}7\}$.

в) $A = \{-3{,}3{,}0{,}4\}$; $B = \{-3\} \cup [0,4]$; $C = [-3,4]$.

$A^2 = A \times A = \{-3{,}3{,}0{,}4\} \times \{-3{,}3{,}0{,}4\}$.

$B^2 = B \times B = (\{-3\} \cup [0,4]) \times (\{-3\} \cup [0,4])$.

$C^2 = C \times C = [-3,4] \times [-3,4]$.

$A \times B = \{-3{,}3{,}0{,}4\} \times (\{-3\} \cup [0,4])$.

$A \times C = \{-3{,}3{,}0{,}4\} \times [-3,4]$.

$B \times C = (\{-3\} \cup [0,4]) \times [-3,4]$.

16. а) Элементами объединения $\rho(S) \cup \rho(T)$ являются подмножества, лежащие в S, и подмножества, лежащие в T. Следовательно, $\rho(S) \cup \rho(T) \subseteq \rho(S \cup T)$. Обратного же включения нет, поскольку подмножество объединения $S \cup T$ не обязательно целиком содержится либо в S, либо в T. Пусть, например, $S = \{1{,}2{,}3\}$, $T = \{4{,}5\}$, а $C = \{1{,}2{,}5\}$. Тогда, конечно, $C \in \rho(S \cup T)$, но, очевидно, $C \notin \rho(S) \cup \rho(T)$.

б) Пусть $C \in \rho(S) \cap \rho(T)$. Тогда $C \subseteq S$ и $C \subseteq T$, поэтому $C \subseteq (S \cap T)$. Следовательно, $\rho(S) \cap \rho(T) \subseteq \rho(S \cap T)$. Теперь возьмем $C \in \rho(S \cap T)$. Тогда $C \subseteq (S \cap T)$, т.е. $C \subseteq S$ и $C \subseteq T$. Значит, $\rho(S \cap T) \subseteq \rho(S) \cap \rho(T)$. Отсюда вытекает равенство $\rho(S) \cap \rho(T) = \rho(S \cap T)$.

17. *Доказательство*: Пусть $\boldsymbol{E}$ – такое множество. Так как оно не пусто, мы можем выбрать среди его элементов какой-нибудь один; пусть это будет e_1; множество $\boldsymbol{E}$-e_1 также не пусто; выберем в нём какой-нибудь элемент e_2 и т.д. После выделения таким способом $\boldsymbol{n}$ элементов множество $\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{(}e_1, e_2, e_3, ..., e_n\boldsymbol{)}$ снова не будет пустым и можно будет выбрать ещё один элемент e_{n+1} и т.д. Следовательно, множество $\boldsymbol{E}$ содержит счётное подмножество $\boldsymbol{(}e_1, e_2, e_3, ..., e_n, ...\boldsymbol{)}$.

19. *Доказательство*: Пусть: $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$,

$$B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}.$$

Если $A \cap B = \varnothing$, тогда $A \cup B$ можно представить в форме: $C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$, т.е. становится очевидной возможность перенумеровать множество, следовательно получаем, что множество C счетно.

20. *Доказательство*: Проведем доказательство для случая объединения трёх множеств, из контекста будет ясна полная общность рассуждения.

Пусть A, B, C три счётных множества: $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$ и $C = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$.

Тогда множество $D = A \cup B \cup C$ можно представить в форме последовательности: $D = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, ...\}$, и счётность множества D очевидна.

21. а) всюду определено, не сюръективно, функционально, инъективно, не биективно;

б) всюду определено, не сюръективно, функционально, не инъективно, не биективно;

в) всюду определено, не сюръективно, функционально, инъективно, не биективно.

22. а) $f \circ g = 1 - x^2$, $g \circ f = (1-x)^2$;

б) $f \circ g = x$, $x > 0$; $g \circ f = x$;

в) $f \circ g = 0$, $g \circ f = g$;

г) $f \circ g = x$, $g \circ f = \begin{cases} x+\pi, x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x-\pi, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$.

23. $R = \{(4,2),(6,2),(6,4),(8,2),(8,4),(8,6)\}$. Отношение антирефлексивно, не симметрично, транзитивно.

24. б) англо-русский словарь устанавливает соответствие между множеством английских и русских слов. Это соответствие не является функциональным, так как одному английскому слову, как правило, ставится в соответствие несколько русских слов. Оно практически никогда не является полностью определенным: всегда можно найти английское слово, не содержащееся в данном словаре;

в) кодирование букв азбукой Морзе является соответствием между кодируемыми объектами и присваиваемыми им кодами. Это соответствие обладает всеми свойствами взаимно однозначного соответствия, кроме сюръективности. Отсутствие сюръективности означает, что не всякий код имеет смысл, т.е. соответствует какому-либо объекту.

25. Изоморфизмом между алгебрами (R_+, $\times$) и (R, $+$) является отображение $a \to \log a$. Условие гомоморфизма имеет вид равенства $\log ab = \log a + \log b$.

2. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Функции алгебры логики. Формы задания булевых функций. Минимизация булевых функций. Синтез логических схем

2.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Для заданной логической функции

$$y=\overline{\left(\overline{x_1\oplus x_2}\downarrow\overline{x_1\to\overline{x_3\oplus x_4}}\right)\sim\overline{\left(\left(x_1\overline{x_3}\vee x_1\overline{x_4}\right)\mid\left(\overline{x_2\vee x_3}\downarrow\overline{x_4\sim x_2}\right)\right)}}$$

а) составьте таблицу истинности;

б) определите СДНФ и СКНФ;

в) найдите минимальную ДНФ и минимальную КНФ с помощью диаграммы Карно;

г) синтезируйте логическую схему в базисе “И-НЕ” (NAND) и в базисе “ИЛИ-НЕ” (NOR).

Решение:

а) Для того, чтобы упростить заданную логическую функцию, введем следующие обозначения:

$x_1\oplus x_2=\varphi_1$ $\quad\overline{\varphi_1}=\varphi_2$ $\quad x_3\oplus x_4=\varphi_3$ $\quad\overline{\varphi_3}=\varphi_4$

$x_1\to\varphi_4=\varphi_5$ $\quad\overline{\varphi_5}=\varphi_6$ $\quad\varphi_2\downarrow\varphi_6=\varphi_7$ $\quad\overline{x_3}=\varphi_8$

$x_1\varphi_8=\varphi_9$ $\quad\overline{x_4}=\varphi_{10}$ $\quad x_1\varphi_{10}=\varphi_{11}$ $\quad\varphi_9\vee\varphi_{11}=\varphi_{12}$

$x_2\vee x_3=\varphi_{13}$ $\quad\overline{\varphi_{13}}=\varphi_{14}$ $\quad x_4\sim x_2=\varphi_{15}$ $\quad\overline{\varphi_{15}}=\varphi_{16}$

$\varphi_{14}\downarrow\varphi_{16}=\varphi_{17}$ $\quad\varphi_{12}\mid\varphi_{17}=\varphi_{18}$ $\quad\overline{\varphi_{18}}=\varphi_{19}$ $\quad\varphi_7\sim\varphi_{19}=\varphi_{20}$

$\overline{\varphi_{20}}=y$

Составляем таблицу истинности, таблица 2.1.

Таблица 2.1

N	x_1	x_2	x_3	x_4	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	y
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0

б) *Элементарной конъюнкцией* (ЭК) называется выражение вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

ЭК называется *правильной*, если все входящие в неё переменные различны. Правильная ЭК называется *полной* относительно данного набора переменных, если в неё входят все эти переменные.

Для элементарных дизъюнкций (ЭД) – аналогичный набор определений. ЭД – выражение вида $x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$.

ДНФ – дизъюнкция разных правильных элементарных конъюнкций. ДНФ называется совершенной (СДНФ), если все входящие в неё элементарные конъюнкции полны относительно данного набора переменных.

1) Чтобы привести логическую функцию к СДНФ, необходимо выполнить следующие шаги:

Для каждого набора переменных, отображенных в 1, записываем элементарные конъюнкции, в которых x_i взято с отрицанием, если $x_i = 0$ в соответствующем наборе значений переменных, и без отрицания, если $x_i = 1$.

ЭК:

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$
$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$
$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$$
$$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \qquad x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Объединяем все ЭК знаком дизъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$$
$$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$ - СДНФ.

Или иначе можем записать:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$=Σ(4-8,10,11,13) – СДНФ.

2) Чтобы привести логическую функцию к СКНФ, необходимо выполнить следующие шаги:

Из таблицы истинности выбираем все наборы переменных, отображенных в 0. Для каждого выбранного набора переменных записываем элементарные дизъюнкции (ЭД), в которых переменная x_i берется без отрицания, если она равна 0, и с отрицанием, если она равна 1.

ЭД:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \qquad \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \qquad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \qquad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \qquad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

Объединяем все ЭД знаком конъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$

$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$ – СКНФ.

Или можем записать:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(0,1,2,3,4,9,12,14,15)$ – СКНФ.

в) Определяем минимальную ДНФ и минимальную КНФ с помощью диаграммы Карно:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Рис.2.1

Диаграмма Карно была изобретена в 1950-ых годах с целью упрощения булевых функций (БФ). Под упрощением БФ подразумеваем эквивалентное выражение, использующее меньше символов, чем исходное.

Диаграмма Карно представляет собой двухмерную таблицу, которая для функции от n-аргументов содержит 2^p строк и 2^q столбцов, $p + q = n$. На пересечении некоторой линии и некоторого столбца находится поле диаграммы, в которое записывается значение функции. Названия столбцов и строк образованы из возможных наборов значений переменных, расположенных в коде Грей. Этот код обеспечивает отношение смежности между полями диаграммы. Два поля называются смежными, если их названия отличаются на один ранг (одну переменную). Два смежных поля согласно закону склеивания $xy \vee x\bar{y} = x$ всегда можно склеить. Смежными считаются и те поля, которые лежат на границах диаграммы. Или, другими словами, объединение двух соседних клеток диаграммы Карно соответствует исключению переменной, значение которой изменяется при переходе от одной из этих клеток к другой. Можем объединить 2^n смежных поля ($n = 1,2,3,\ldots$).

Для того чтобы получить минимальную ДНФ, применяем вышеприведенное правило к единичным значениям БФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 .$$

Минимальную КНФ получаем, рассматривая нулевые значения БФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4).$$

г) Чтобы синтезировать логическую схему в базисе «И-НЕ», преобразуем минимальную ДНФ с помощью двойного отрицания и законов де Моргана:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$\overline{\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3}} = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_2} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4} \cdot \overline{x_2 \bar{x}_3 x_4} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_2 x_3}}$$

(рис. 2.2).

Применив двойное отрицание и законы де Моргана к минимальной КНФ, можем синтезировать логическую схему в базисе «ИЛИ-НЕ»:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)}} =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)} \vee \overline{(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)}}$$

(рис. 2.3).

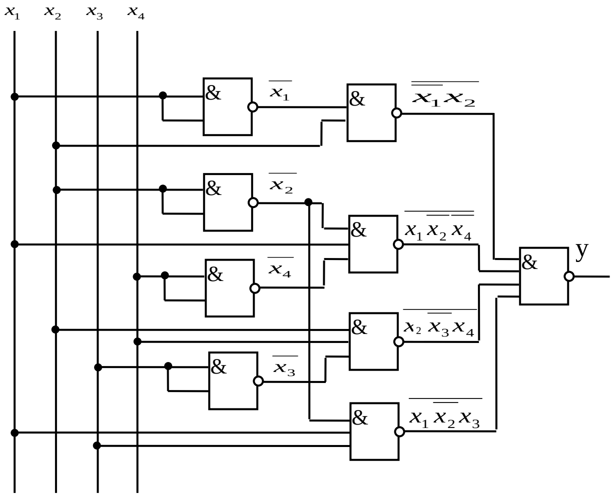


Рис. 2.2

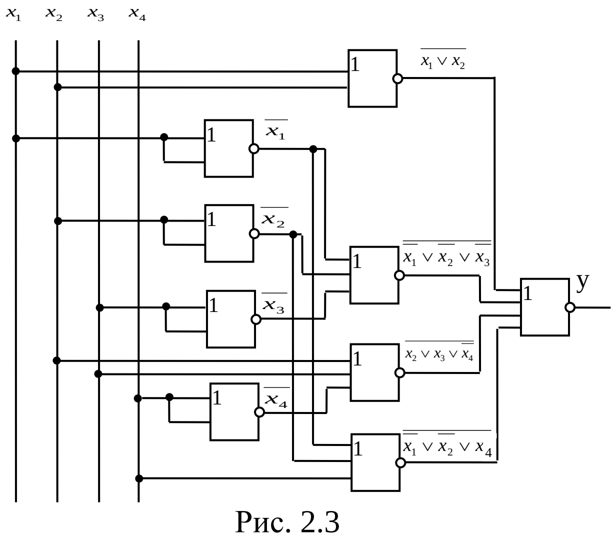


Рис. 2.3

2. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee$$
$$\vee\, x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Определите минимальную ДНФ методом Квайна.

Решение:

I. Проводим все возможные склеивания между ЭК согласно закону склеивания $xy \vee x\bar{y} = x$.

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = x_1 \bar{x}_3 x_4$$

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

II. Между полученными ЭК необходимо провести все возможные склеивания до тех пор, пока это возможно. Замечаем, что для полученных ЭК ранга 3 операция склеивания не может быть применена.

III. Необходимо провести поглощение между всеми получившимися ЭК по правилу: $x \vee xy = x$. Для полученных ЭК операция поглощения не может быть применена.

IV. В результате мы получили только простые импликанты. Простым импликантом некоторой БФ называются элементарные конъюнкции, которые имплицируют функцию без удаления переменной. Дизъюнкция простых импликантов приводит к *сокращенной* ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 .$$

V. Выбираем существенные импликанты. Для этого необходимо построить таблицу покрытия (таблица 2.2). Таблица покрытия - двумерная таблица, каждой строке которой взаимно однозначно соответствует простой импликант, а каждому столбцу – ЭК из заданной СДНФ. На пересечении i-й строки и j-го столбца находится единица, если простой импликант входит (покрывается) в ЭК. Простой импликант покрывается ЭК, если он содержится в данной ЭК.

Выбираем минимальное количество простых импликантов (существенных), таким образом, чтобы все были покрыты ЭК.

Таблица 2.2

Простые импликанты	Элементарные конъюнкции (ЭК)					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	0	0	0	0
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	0	0	0	0	1
$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	0	1	1	0	0	0
$x_2\bar{x}_3 x_4$	0	0	1	1	0	0
$x_1\bar{x}_3 x_4$	0	0	0	1	1	0
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	0	0	0	0	1	1

VI. Дизъюнкция существенных импликантов приводит к *минимальной* ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

или

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4\,.$$

В результате получили две минимальные формы. Следовательно, БФ может иметь несколько минимальных форм.

Недостаток метода Квайна – необходимость полного попарного сравнения всех ЭК на этапе нахождения простых импликантов. Идея модификации метода Квайна - метод Квайна-Мак-Класки.

3. Найдите минимальную ДНФ функции

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum(0,1,2,3,4,7,8,11,12,13,15)$$

методом Квайна-Мак-Класки.

Решение:

Этот метод удобен для нахождения минимальной ДНФ функции от любого числа переменных.

Каждой ЭК ставим в соответствие булев вектор. (x с отрицанием – 0, без отрицания – 1).

I.Выписываем все ЭК из СДНФ функции в формализованном виде в столбец, располагая их в порядке возрастания числа единиц в векторах и разбивая на классы по числу единиц. (рис.2.4).

Уровни (классы)	Двоичный эквивалент	Десятичный эквивалент
0	0000	0
1	0001 0010 0100 1000	1 2 4 8
2	0011 1100	3 12
3	0111 1011 1101	7 11 13
4	1111	15

Рис. 2.4

II.Между ЭК проводим все возможные склеивания. Элементы при склеиваниии помечаем $\vee$. Склеивать можно только ЭК из соседних классов.(рис.2.5).

	000- 00-0 0-00 -000	$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
	00-1 001- -100 1-00	$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
A	0-11 -011 110-	$\vee$ $\vee$
B	-111 1-11 11-1	$\vee$ $\vee$

Рис.2.5

ЭК, которые не могут больше учавствовать в склеивании, обозначим через A,B,.. ЭК такого вида являются *простыми импликантами* данной функции.

III. Для полученных ЭК еще раз применяем шаг 2 (рис.2.6).

Все ЭК, которые остались непомеченными $\vee$, являются простыми импликантами БФ.

C D	00-- --00
E	--11

Рис.2.6

IV. Выбираем существенные импликанты. Для этого строим таблицу покрытия, определяем минимальное покрытие (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Простые импликанты	Десятичный эквивалент исходной ЭК										
	0	1	2	3	4	7	8	11	12	13	15
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1

V. Определяем минимальную ДНФ. (Дизъюнкция существенных импликантов).

Замечаем, что в нашем случае функцию можно представить двумя выражениями:

1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=A+C+D+E=x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee x_3x_4$

или

2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=B+C+D+E=x_1x_2x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee x_3x_4$.

Вывод: минимальная форма не является единственной.

4. Для заданной функции $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_2\vee\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ постройте соответствующую временную диаграмму.

Решение: Введем следующие обозначения:

$\overline{x_1} = \varphi_1$ $\qquad$ $\overline{x_3} = \varphi_4$

$\varphi_1 x_2 = \varphi_2$ $\qquad$ $\varphi_3 \varphi_4 = \varphi_5$

$\overline{x_2} = \varphi_3$ $\qquad$ $\varphi_2 \vee \varphi_5 = \varphi_6$.

Построим таблицу истинности заданной функции (таблица 2.4):

Таблица 2.4

x_1	x_2	x_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Временная диаграмма функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$ имеет следующий вид (рис. 2.7).

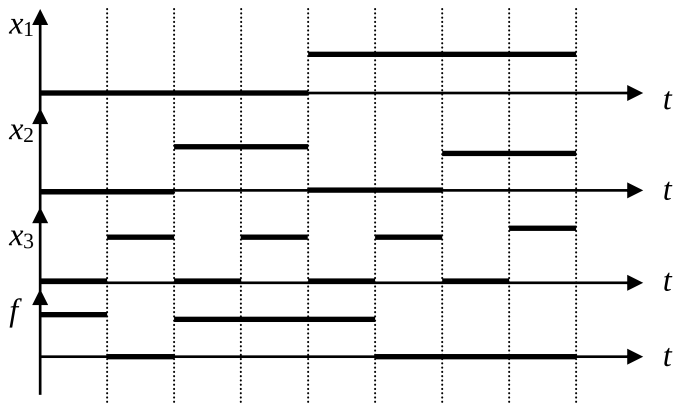


Рис.2.7

5. Пусть функция $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ задана СДНФ:

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum(0,1,2,3,6,7).$$

а) определите минимальную КНФ методом Квайна-Мак-Класки.

Решение:

I. Конвертируем элементарные дизъюнкции (ЭД) из десятичной системы в двоичную:

4 - 0100	11 - 1011
5 - 0101	12 - 1100
8 - 1000	13 - 1101
9 - 1001	14 - 1110
10 - 1010	15 – 1111

II. Разбиваем на классы (уровни) двоичные эквиваленты по числу единиц (рис. 2.8).

Классы	Двоичный эквивалент	Десятичный эквивалент
0	0100 1000	4 8
1	0101 1001 1010 1100	5 9 10 12
2	1011 1101 1110	11 13 14
3	1111	15

Рис. 2.8

III. Определяем простые импликанты (рис. 2.9, 2.10, 2.11).

	010- -100 100- 10-0 1-00	∨ ∨ ∨ ∨∨ ∨∨
	-101 10-1 1-01 101- 1-10 110- 11-0	∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨
	1-11 11-1 111-	∨ ∨ ∨

Рис.2.9. I-е склеивание

A B 	-10- 10-- 1--0	 ∨
 C	1--1 1-1-	∨

Рис.2.10. II-е склеивание

D	1---	

Рис.2.11. III-е склеивание

IV. Строим таблицу покрытия (таблица. 2.5):

Таблица 2.5

Простые импликанты	Десятичный эквивалент исходной ЭК									
	4	5	8	9	10	11	12	13	14	15
A	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
B	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
D	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A \wedge D = (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge \overline{x_1}$ - минимальная КНФ.

б) определите минимальную КНФ с помощью диаграммы Карно.

Минимальную КНФ получаем, рассматривая нулевые значения БФ (рис. 2.12): $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge \overline{x_1}$.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Рис.2.12

6. Упростите следующее логическое выражение:
$(a \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee c) \wedge (\overline{a} \vee b) \wedge (b \vee c)$.

Решение:

$(a \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee c) \wedge (\overline{a} \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \vee \overline{c}) \wedge \overline{a} \wedge c =$
$((\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge \overline{c})) \wedge c = \overline{a} \wedge \overline{c} \wedge c$.

2.2 ЗАДАЧИ

1. Опираясь на законы булевой алгебры, проверьте, равны ли следующие логические выражения:

а) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$ и $\bar{x} \vee y$;

б) $\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$;

в) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$ и $x \vee \bar{y}$;

г) $x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y$ и $x\bar{z} \vee y$;

д) $xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}$ и $xz \vee y \vee z$;

е) $\bar{x} \vee y \vee \bar{x}z \vee yz$ и $\bar{x} \vee y$;

ж) $xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$ и $\bar{z}$;

з) $xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$ и z;

и) $x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}$ и у.

2. Упростите следующие логические выражения:

а) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$;

б) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$;

в) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$;

г) $x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y$;

д) $x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

е) $xy \vee yz \vee \bar{x}y$;

ж) $xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$;

з) $\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee yz$;

и) $\left(\left(a \vee c\right) \wedge \left(a \vee d\right)\right) \wedge \left(\left(\left(c \vee \left(c \wedge b\right)\right) \wedge \bar{c}\right) \vee \bar{a}\right)$;

к) $\left(\bar{b} \vee d\right) \wedge \left(\left(\bar{d} \wedge c\right) \vee \left(a \wedge c\right) \vee \left(\bar{d} \wedge \bar{c}\right) \vee \left(a \wedge \bar{c}\right)\right) \wedge \left(b \vee d\right)$;

л) $\left(\left(\left(d \vee \left(d \wedge c\right)\right) \wedge \bar{d}\right) \vee \bar{b}\right) \wedge \left(\left(b \vee d\right) \wedge \left(b \vee a\right)\right)$;

м) $\left(d \vee \left(\bar{a} \wedge \bar{d}\right) \vee a\right) \wedge \left(\left(b \vee \left(d \vee \left(d \wedge c\right)\right)\right) \wedge \left(\overline{c \wedge a}\right) \wedge \left(d \wedge \bar{a}\right)\right)$.

3. Найдите СДНФ и СКНФ для следующих логических функций:

а) $f(x,y,z) = x \vee y \vee xy \vee yz$;

б) $f(x,y,z) = x\overline{y} \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$;

в) $f(x,y,z) = x\overline{z} \vee xy \vee \overline{x}y$;

г) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{(x_1 \oplus x_2) \downarrow x_3x_4} \to (x_1x_3 \vee x_2\overline{x_4})$;

д) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2\overline{x_3} \mid \overline{x_1}x_4) \to \overline{x_1x_4} \oplus \overline{(x_1x_2 \sim x_3x_4)}$.

4. Для логической функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (таблица 2.6).

а) составьте таблицу истинности;

б) определите СДНФ и СКНФ;

в) найдите минимальную ДНФ и минимальную КНФ;

г) синтезируйте логическую схему в базисе “И-НЕ” и в базисе “ИЛИ-НЕ”.

д) представьте функцию временной диаграммой.

Таблица 2.6

Номер варианта	Функция $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	$(x_2\overline{x_3} \mid \overline{x_1}x_4) \to \overline{x_1x_4} \oplus \overline{(x_1x_2 \sim x_3x_4)}$
1	$((\overline{x_1}x_2 \downarrow \overline{x_3x_4}) \oplus (x_1 \vee x_2\overline{x_3})) \sim (x_3\overline{x_2} \mid x_1x_4)$
2	$((x_1\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3}x_4) \to (x_1x_3 \mid \overline{x_2x_4})) \oplus (\overline{x_1x_4 \sim x_2x_3})$
3	$((x_1\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3x_4}) \oplus (\overline{x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_4})) \sim (x_3\overline{x_4} \mid \overline{x_1}x_2)$
4	$\overline{((\overline{x_1x_2} \downarrow \overline{x_3}x_4) \oplus (x_1\overline{x_3} \vee x_2x_4)) \sim (\overline{x_3}x_4 \mid x_1\overline{x_2})}$
5	$(\overline{x_3\overline{x_4} \oplus x_1\overline{x_2}}) \to ((\overline{x_1}x_2 \downarrow x_3\overline{x_4}) \oplus x_2\overline{x_3})$
6	$\overline{(((x_1\overline{x_2}) \downarrow (\overline{x_3}x_4)) \oplus (\overline{x_2x_4} \mid \overline{x_1x_3})) \to (\overline{x_1x_2 \sim x_3x_4})}$
7	$((x_1 \oplus x_2) \to x_1\overline{x_3}) \downarrow ((x_3\overline{x_4}) \mid (\overline{x_1x_2})) \downarrow x_3x_4 \vee x_1\overline{x_3}$
8	$((x_3\overline{x_4} \downarrow \overline{x_1}x_2) \to (x_2x_3 \mid \overline{x_1x_4})) \oplus (\overline{x_2x_4 \sim x_1\overline{x_3}})$
9	$(\overline{x_3}x_4 \mid x_1\overline{x_2}) \to (\overline{x_2x_3}) \oplus (\overline{x_3x_2 \sim x_1x_4})$

5. Синтезируйте логическую схему, реализующую булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,1,5,6,7)$ в базисе Пирса и в базисе Шеффера.

6. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0-2,6,7,11,15)$$

а) найдите минимальную КНФ методом Квайна-Мак-Класки и с помощью диаграммы Карно;

б) найдите минимальную ДНФ методом Квайна, Квайна-Мак-Класки и с помощью диаграммы Карно.

7. Для логической функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1,2,5,6,8,9,12,13,14)$$

а) определите минимальную ДНФ и минимальную КНФ методом Квайна-Мак-Класки;

б) определите минимальную ДНФ и минимальную КНФ с помощью диаграммы Карно;

в) синтезируйте логическую схему в базисе „И-НЕ” и в базисе „ИЛИ-НЕ”:

г) представьте функцию временной диаграммой.

2.3. ОТВЕТЫ

1. а) верно; б) верно; в) верно; г) верно; д) неверно; е) верно; ж) неверно; з) неверно; и) неверно.
2. а) $x \vee \bar{x}y$; б) $y \vee \bar{x}\bar{y}$; в) $x \vee \bar{x}\bar{y}$; г) $x\bar{z} \vee y$; д) $\bar{y}$; е) y; ж) z; з) $x \vee y$; и) $cd\bar{a}$; к) ad; л) $\bar{b}da$; м) $\bar{a}d$.
3. а) $f(x,y,z) = \sum(2-7)$, $f(x,y,z) = \prod(0,1)$;

   б) $f(x,y,z) = \sum(0,1,4,5)$, $f(x,y,z) = \prod(2,3,6,7)$;

   в) $f(x,y,z) = \sum(2,3,4,6,7)$, $f(x,y,z) = \prod(0,1,5)$;

   г) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0-2,4,6,10-15)$,
   $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,5,7,8,9)$;

   д) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,10,11,13)$,
   $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,7,9,12,14,15)$.

4. 0)
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,10,11,13)$,
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(3,7,9,12,14,15)$.
мин. ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4$,
мин.КНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge$
$\wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

   1)
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(3,4,5,8-14)$,
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(0,1,2,6,7,15)$.
мин. ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4$,
мин.КНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

   2)
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(0-5,8,10,12,14,15)$,
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod(6,7,9,11,13)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3$,

мин.КНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}\right)$.

3)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,2-5,8,12,13,15\right)$,

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(1,6,7,9,10,11,14\right)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$,

мин КНФ:

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right) \wedge \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$.

4)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0-4,6,9-12,15\right)$,

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(5,7,8,13,14\right)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x_2}x_4$,

мин.КНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4\right) \wedge$

$\wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$.

5)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0-6,8,9,11,14,15\right)$,

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(7,10,12,13\right)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_3x_4$,

мин. КНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4\right)$.

6)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,2,4,5,6,10\right)$,

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(1,3,7,8,9,11-15\right)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}$,

мин. КНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}\right)$.

7)

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum\left(0,1,4,5,8,9,10,12,13,14\right)$,

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \prod\left(2,3,6,7,11,15\right)$.

мин.ДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4}$,

мин.КНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_3}\right)$.

8)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum(0-4,6,10,11,13,14),$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod(5,7,8,9,12,15).$$

мин.ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_3\overline{x_4}\vee \overline{x_2}x_3\vee \overline{x_1}\,\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_3}x_4$,

мин.КНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_1}\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee \overline{x_2}\vee \overline{x_4})\wedge(\overline{x_2}\vee \overline{x_3}\vee \overline{x_4})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee \overline{x_3}).$$

9)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum(0-8,10,12,14),$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod(9,11,13,15).$$

мин.ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\vee \overline{x_4}$,

мин.КНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\vee \overline{x_4}$.

5. мин.ДНФ : $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_1x_2\vee x_1x_3$,

мин.КНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee \overline{x_2})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)$.

6.

а) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_2}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee x_4)\wedge(x_1\vee x_2\vee \overline{x_3}\vee \overline{x_4})$;

б) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee \overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_2x_3x_4\vee x_1x_3x_4$.

7. мин.ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\vee \overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_2x_3\overline{x_4}$

или

мин.ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\vee \overline{x_1}x_3\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_4}$

мин.КНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_3}\vee \overline{x_4})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee \overline{x_3})\wedge(x_1\vee x_3\vee x_4).$$

3. ГРАФЫ
Определение графа. Степени вершин графа. Связность графа. Деревья. Плоские графы. Минимальный (максимальный) путь. Транспортные сети. Гамильтонов путь(цикл)

3.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Пусть задан граф $G=(X,U)$ (рис.3.1). Определите отношения, которые определяют многозначное отображение U множества $X=\overline{\{1,6\}}$ в множество X.

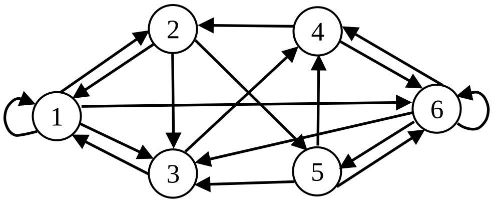


Рис.3.1

Решение: Многозначное отображение U множества X в множество X определяется отношениями:

$$U_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6)\}, \qquad U_4=\{(4,2),(4,6)\},$$
$$U_2=\{(2,1),(2,3),(2,5)\}, \qquad U_5=\{(5,3),(5,4),(5,6)\},$$
$$U_3=\{(3,1),(3,4)\}, \qquad U_6=\{(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

2. Докажите, что в любом неориентированном графе G, содержащем $n\geq 2$ вершин, хотя бы две вершины имеют одинаковую степень.

Доказательство: Предположим, что ряд, содержащий степени вершин графа, состоит из n различных чисел, т.е. для $x\in X$, $d(x)\in\{0,1,2,\ldots,\text{n-1}\}$. Из этого выражения следует, что в графе G существуют изолированная вершина (d=0) и вершина, смежная со всеми остальными вершинами ($d=n$-1), в том числе и с изолированной вершиной. Пришли к противоречию, а это означает, что в графе , содержащем $n \geq 2$ вершин, хотя бы две вершины имеют одинаковую степень.

3. Пусть задан неориентированный граф $G=(X,Y)$ и его дополнение $G_1=(X,U_1)$. Доказать, что если граф G не является связным, тогда его дополнение G_1 является связным.

Доказательство: Как известно, дополнением графа G называется граф G_1 с тем же множеством вершин что и у G, причем две различные вершины смежны в G_1 тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Пусть $x,y \in X, x \neq y$. Докажем, что существует $L_{x,y}$ в G_1. Если x и y не являются смежными в G_1, тогда они смежны в G. Из условия, что G не является связным, следует, что в G существует компонента связности C, которая не содержит вершины x и y. Пусть z – одна из вершин, принадлежащей C. Из определения дополнения графа следует, что в G_1 существуют ребра $[x,z]$ и $[y,z]$, или существует $L_{x,y}=[x,z,y]$. А это означает, что граф G_1 является связным.

4. Проверьте, является ли граф на рисунке 3.2 сильно связным.

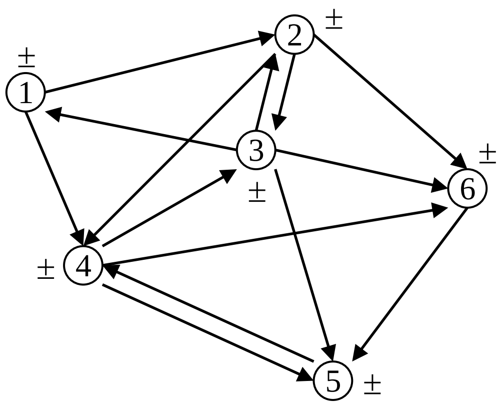


Рис.3.2

Решение: По определению, ориентированный граф называется сильно связным, если любая пара вершин соединена путем. Для того, чтобы выяснить, является ли граф G сильно связным, воспользуемся следующей процедурой: берем произвольную вершину i и присваиваем ей метку $\pm$; если вершина j без метки, тогда присваиваем ей метку $+$, если существует дуга (i,j), и присваиваем ей метку -, если существует дуга (j,i).

Если в результате использования вышеприведенной процедуры любой вершине графа G была присвоена метка $\pm$, тогда граф является сильно связным.

Если же в результате использования вышеприведенной процедуры осталась хотя бы одна непомеченная $\pm$ вершина, тогда граф не является сильно связным.

Для графа на рисунке 3.2 можно с уверенностью утверждать, что любая вершина может быть помечена $\pm$, а это означает, что граф является сильно связным.

5. Пусть $H=(X,U)$ является деревом и $H_1=(X_1,U_1)$, $H_2=(X_2,U_2)$ – два его поддерева. Докажите, что если $Y= X_1 \cap X_2$, тогда Y есть множество вершин одного из поддеревьев H.

Доказательство: Как известно, *деревом называется связный граф без циклов.* Из условия, что H является деревом, следует, что подграф A, состоящий из множества вершин Y, не содержит циклов. Необходимо еще доказать, что подграф A является связным. Пусть x и y – две вершины из множества Y. В H_1 и H_2 существует цепь между вершинами x и y. Пусть цепи, связывающие вершины x и y в H_1, и соответственно в H_2, являются простыми. Эта цепь является простой и в H. *Цепь называется простой*, если все ее вершины и ребра различны. Однако нам известно, что любые две вершины дерева связаны одной и только одной цепью, иначе образовался бы цикл. Это означает, что рассмотренные выше простые цепи совпадают и состоят из вершин, которые принадлежат и множеству X_1, и множеству X_2. В результате мы получили цепь, образованную из вершин, принадлежащих множеству Y, и соединяющую вершины x и y, т.е. мы доказали, что подграф A является связным. Итак, мы доказали, что подграф A не содержит циклов и является связным, а это означает, что подграф A является поддеревом дерева H.

6. Пусть $D=(x,\ldots,y)$ – путь, соединяющий вершины x и y $(x \neq y)$ в ориентированном графе G. Докажите, что в графе G существует простой путь, соединяющий вершины x и y $(x \neq y)$.

Доказательство: Пусть k является первой вершиной в D, которая повторяется, или $D=(x,\ldots,I,k,j,\ldots,q,k,p,\ldots,y)$. Из D удалим часть, которая находится между первым появлением вершины k (включая и k) и последующим появлением k (не включая k), получим путь $D_1=(x,\ldots I,k,p,\ldots,y)$. Если полученный таким образом путь является простым, тогда поставленная задача решена. Если полученный путь не является простым, тогда применяем приведенный выше способ к D_1 и т.д., пока не получим простой путь.

7. Докажите, что если все степени вершин неориентированного графа G являются четными числами, тогда граф G содержит множество простых циклов таким образом, что каждое ребро графа G точно принадлежит одному из этих простых циклов.

Доказательство: Из условия, что все степени вершин графа G являются четными числами, следует, что каждая компонента связности графа G является эйлеровым подграфом. *Подграф называется эйлеровым*, если он содержит эйлеровый цикл. *Цикл называется эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. А это означает, что каждое ребро графа G принадлежит одному циклу. Но любой цикл, не являющийся простым, можно разложить на простые циклы. Обратно, если каждое ребро точно принадлежит одному простому циклу, тогда каждая вершина в этом цикле является смежной двум вершинам, т.е. для $\forall x \in X$, $d(x)$ является четным числом.

8. Докажите что в связном неориентированном плоском графе G, содержащем n вершин, m ребер и f граней (включая бесконечную грань), имеет место *формула Эйлера*:

$$n\text{-}m+f=2$$

Доказательство: Плоским графом называется граф, изображенный на плоскости так, что никакие два его ребра геометрически не пересекаются нигде, кроме инцидентной им обоим вершины.

Доказательство проводится по числу ребер в G. Если m = 0, то n = 1(т.к. G связен) и f = 1 (бесконечная грань); итак, в этом случае теорема верна.

Предположим теперь, что теорема верна для любого графа G, имеющего m – 1 ребер, и добавим к G новое ребро e. Тогда либо

1) e является петлей, и в этом случае возникает новая грань, а число вершин остается неизменным, либо

2) e соединяет две различные вершины из G, и в этом случае одна из граней графа G расщепляется на две, увеличивая число граней на единицу, но оставляя число вершин неизменным, либо

3) e инцидентно только одной вершине в G, и в этом случае необходимо добавить еще одну вершину, увеличивая тем самым число вершин на единицу, но оставляя число граней неизменным.

Формула Эйлера остается справедливой в каждом из перечисленных случаев (только эти случаи и возможны).

9. Определите величину максимального потока для транспортной сети $R=\left(X,U\right)$, изображенной на рисунке 3.3, согласно алгоритму Форда-Фулкерсона.

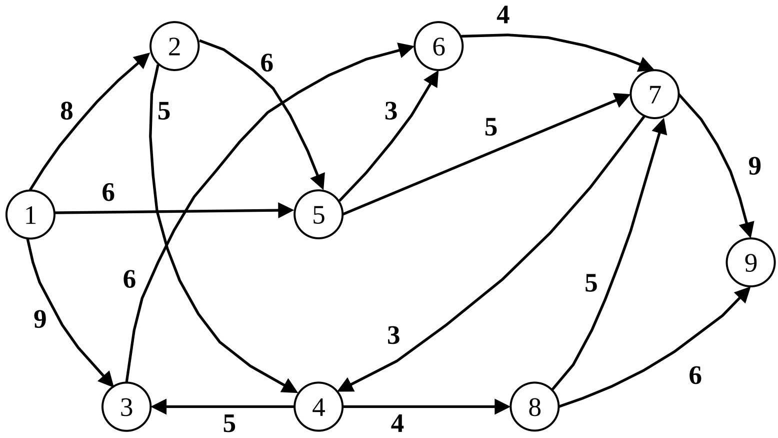


Рис. 3.3

Решение:

Теорема Форда-Фулкерсона: В транспортной сети величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза, т.е. $\max f_b = \min c\left(\omega^-(A)\right)$,

где b – выход сети, $\omega^-(A)$- разрез, $A \subseteq X$.

Доказательством теоремы является *алгоритм Форда-Фулкерсона*. Алгоритм начинает свою работу с нулевого потока и на каждой своей итерации увеличивает поток в сети. На каждом шаге находится увеличивающая величину потока цепь. Поток увеличивается вдоль дуг этой цепи, пока она не станет насыщенной.

Для нахождения увеличивающей цепи используется “Метод расстановки меток”. Процесс расстановки меток начинается в источнике сети и заканчивается в ее стоке. Как только сток оказался помеченным, мы можем говорить о существовании увеличивающей цепи из источника в сток.

I. Определяем исходный поток, который имеет нулевые компоненты на каждой дуге, т.е. $f(u) = 0 \ \forall \ u \in U$.

II. Определяем ненасыщенные пути(цепи) от входа (истока) сети x_1 к выходу(стоку) сети x_9 с помощью следующей процедуры расстановки меток:

а) присваиваем входу сети x_1 метку “+”;

б) присваиваем метку “$+x_i$” вершине x_k, если дуга $(x_i, x_k) \in U$ является ненасыщенной;

в) присваиваем метку “$-x_k$” вершине x_i, если $(x_i, x_k) \in U$ и $f(x_i, x_k) > 0$.

III. Определяем значение ε, на которое увеличиваем или уменьшаем поток на каждой дуге в выбранном пути или цепи:

$\varepsilon_1 = min(c(u) - f(u))$, $u \in U^+$, (U^+ - множество дуг, которые направлены от истока к стоку).

$\varepsilon_2 = \min(f(u))$, $u \in U^-$, (U^- - множество дуг, которые направлены от стока к истоку).

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & если \quad U^- = \phi \\ \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), & если \quad U^- \neq \phi \end{cases}$$

IV. Если $\varepsilon > 0$, тогда определяем новый поток $f_1(u)$ следующим образом:

$$f_1(u) = \begin{cases} f(u), если & u \notin l \\ f(u) + \varepsilon, если & u \in U^+ \\ f(u) - \varepsilon, если & u \in U^- \end{cases}$$

l - выбранный путь или цепь.

V. Переходим на шаг II с новым улучшенным потоком.

Если с помощью вышеприведенной процедуры невозможно присвоить метку выходу сети, тогда поток имеет максимальное значение на выходе, а множество дуг, которые соединяют помеченные вершины с непомеченными, составляет разрез минимальной пропускной способности.

В результате помечивания вершин были получены следующие пути(цепи):

путь l_1={1,2,5,6,7,9}, ε_1=min(8,6,3,4,9)=3;

путь l_2={1,2,5,7,9}, ε_2=min(8-3,6-3,5,9-3)=3;
путь l_3={1,2,4,8,7,9}, ε_3=min(8-6,5,4,5,9-6)=2;
путь l_4={1,5,7,9}, ε_4=min(6,5-3,9-8)=1;
путь l_5={1,3,6,7,4,8,9}, ε_5=min(9,6,4-3,3,4-2,6)=1;
путь l_6={1,5,7,4,8,9}, ε_6=min(6-1,5-4,3-1,4-3,6-1)=1;
цепь l_7={1,5,2,4,7,8,9}, ε_7=min(6-2,6,5-2,2,2,6-2)=2.

Все пути (цепи) насыщенны.

Минимальный разрез определяется для множества вершин A={7,8,9}(множество непомеченных вершин).

$\omega^{-}(A)=\{(6,7),(5,7),(4,8)\}$ - минимальный разрез.

$c(\omega^{-}(A))=4+5+4=13$ - пропускная способность разреза.

Согласно теореме Форда-Фулкерсона $f_{\max}9=c(\omega^{-}(A))=13$ (рис. 3.4).

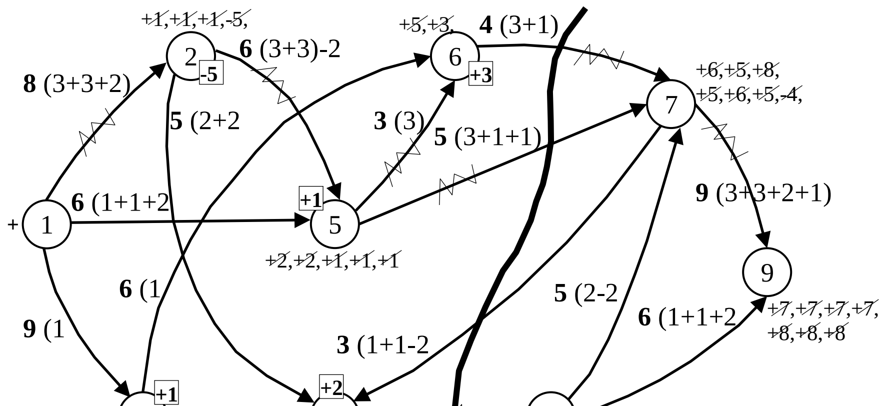


Рис. 3.4

10. Для транспортной сети $R=(X,U)$, изображенной на рисунке 3.5, определите величину максимального потока согласно алгоритму Форда-Фулкерсона.

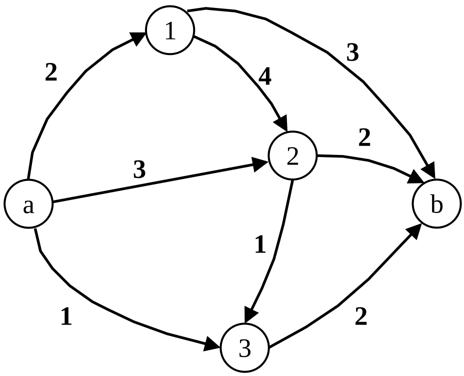


Рис. 3.5

Решение:

I. Определяем исходный поток, который имеет нулевые компоненты на каждой дуге, т.е. $f(u) = 0 \ \forall \ u \in U$.

II. Определяем ненасыщенные пути (цепи) и значение ε, на которое увеличиваем или уменьшаем поток на каждой дуге в выбранном пути или цепи:

путь l_1={a,1,2,b}, ε_1=min(2,4,2)=2;
путь l_2={a,3,b}, ε_2=min(1,2)=1;
путь l_3={a,2,3,b}, ε_3=min(3,1,2-1)=1;
цепь l_4={a,2,1,b}, ε_4=min(3-1,2,3)=2.

Все пути (цепи) насыщенны.

III. Определяем множество непомеченных вершин: A={1,2,3,b}.

IV. Определяем минимальный разрез и пропускную способность разреза:

$$\omega^-(A) = \{(a,1),(a,2),(a,3)\},$$

$$c(\omega^-(A)) = 2+3+1 = 6,$$

$$f_{\max} b = c(\omega^-(A)) = 6$$ (рис. 3.6).

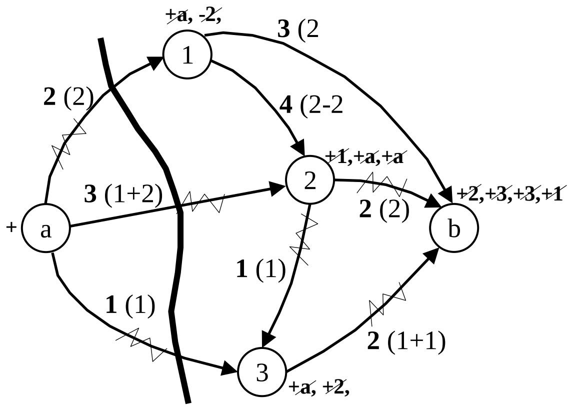


Рис. 3.6

11. Для графа, изображенного на рисунке 3.7, определите минимальный путь между вершинами x_1 и x_7 согласно алгоритму Форда.

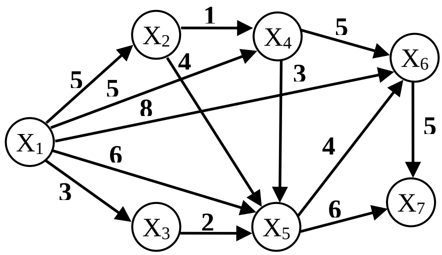


Рис.3.7

Алгоритм Форда позволяет найти минимальные (кратчайшие) пути из какой-либо одной вершины графа во все остальные. Эту исходную вершину можно выбрать произвольно, но, сделав выбор, далее уже исходить из того, что будут найдены минимальные пути именно из этой вершины во все остальные.

I. Исходной вершине x_1 присваиваем метку $H_0 = 0$.

II. Всем остальным вершинам графа присваиваем метку $H_j = \infty$. (∞ представляет собой длину произвольного пути между вершинами x_1 и x_j).

III. Вычисляем разности $H_j - H_i$ для каждой дуги (x_i, x_j) данного графа и сравниваем эту разность с весом дуги (x_i, x_j). Возможны 3 случая:

а) $H_j - H_i < L_{ij}$, L_{ij} - вес дуги (x_i, x_j);

б) $H_j - H_i = L_{ij}$;

в) $H_j - H_i > L_{ij}$.

Случай в) позволяет нам уменьшить расстояние между вершинами x_i и x_j: $H_j = L_{ij} + H_i$.

III-й шаг выполняется до тех пор, пока существуют дуги (x_i, x_j), для которых выполняется неравенство в).

Полученные метки вершин H_i определяют значение минимального пути из исходной вершины в вершину x_i.

IV. Определяем последовательность вершин, которые составляют минимальный путь. Путь определяем с помощью обратного хода от конечной вершины к начальной, причем для вершины x_j предшествующей будет вершина x_i, если выполняется $H_j - H_i = L_{ij}$. Если существует несколько таких пар, то выбирается любая из них.

Решение:

I. $H_0 = 0$; II. $H_j = \infty$;

III. Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_1:

$H_2 - H_1 > L_{12}$ $\quad \infty - 0 > 5 \Rightarrow \quad H_2 = H_1 + L_{12} = 0 + 5 = 5$

$H_4 - H_1 > L_{14}$ $\quad \infty - 0 > 5 \Rightarrow \quad H_4 = H_1 + L_{14} = 0 + 5 = 5$

$H_6 - H_1 > L_{16}$ $\quad \infty - 0 > 8 \Rightarrow \quad H_6 = H_1 + L_{16} = 0 + 8 = 8$

$H_5 - H_1 > L_{15}$ $\quad \infty - 0 > 6 \Rightarrow \quad H_5 = H_1 + L_{15} = 0 + 6 = 6$

$H_3 - H_1 > L_{13}$ $\quad \infty - 0 > 3 \Rightarrow \quad H_3 = H_1 + L_{13} = 0 + 3 = 3$

(рис. 3.8).

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_2:

H_4-H_2<L_{24} 5-5<1 $\Rightarrow$ Метка вершины x_4 не меняется.

H_5-H_2<L_{25} 6-5<4 $\Rightarrow$ Метка вершины x_5 не меняется.

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_3:

H_5-H_3>L_{35} 6-3>2 $\Rightarrow$ H_5=H_3+L_{35}=3+2=5

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_4:

H_5-H_4<L_{45} 5-5<3 $\Rightarrow$ Метка вершины x_5 не меняется.

H_6-H_4<L_{46} 8-5<5 $\Rightarrow$ Метка вершины x_6 не меняется.

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_5:

H_6-H_5<L_{56} 8-5<4 $\Rightarrow$ Метка вершины x_6 не меняется.

H_7-H_5>L_{57} ∞-5>6 $\Rightarrow$ H_7=H_5+L_{57}=5+6=11

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_6:

H_7-H_6<L_{67} 11-8<5 $\Rightarrow$ Метка вершины x_7 не меняется.

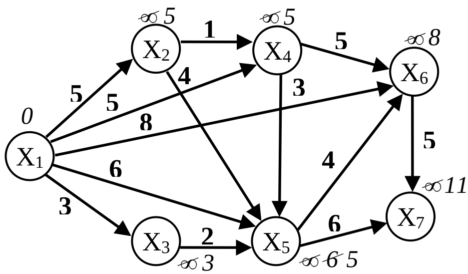


Рис.3.8

Процесс назначения меток вершинам графа на каждом шаге удобно представить в виде следующей таблицы (рис.3.9):

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
II_1		5	3	5	6	8	∞
III_2							∞
IV_3					5		∞
V_4							∞
VI_5							11
VII_6							
	0	5	3	5	5	8	11

Рис.3.9

$l_{\min}(1-7)=11$ - значение минимального пути между вершинами x_1 и x_7.

IV. Определяем минимальный путь:

$H_7 - H_5 = L_{57}$, 11-5 = 6

$H_5 - H_3 = L_{35}$, 5-3 = 2

$H_3 - H_1 = L_{13}$, 3-0 = 3

Путь, соответствующий минимальному значению 11:

$1 \to 3 \to 5 \to 7$

12. Используя алгоритм Форда, определите для графа на рисунке 3.7 максимальный путь между вершинами x_1 и x_7.

Решение:

I. $H_0 = 0$;

II. $H_j = -\infty$;

III. Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_1:

$H_2-H_1<L_{12}$ $-\infty - 0 < 5 \Rightarrow$ $H_2=H_1+L_{12}=0+5=5$

$H_4-H_1<L_{14}$ $-\infty-0<5 \Rightarrow$ $H_4=H_1+L_{14}=0+5=5$

$H_6-H_1<L_{16}$ $-\infty-0<8 \Rightarrow$ $H_6=H_1+L_{16}=0+8=8$

$H_5-H_1<L_{15}$ $-\infty-0<6 \Rightarrow$ $H_5=H_1+L_{15}=0+6=6$

$H_3-H_1<L_{13}$ $-\infty-0<3 \Rightarrow$ $H_3=H_1+L_{13}=0+3=3$

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_2:

H_4-H_2<L_{24} 5-5<1 $\Rightarrow$ H_4=H_2+L_{24}=5+1=6

H_5-H_2<L_{25} 6-5<4 $\Rightarrow$ H_5=H_2+L_{25}=5+4=9

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_3:

H_5-H_3>L_{35} 9-3>2 $\Rightarrow$ Метка вершины x_5 не меняется.

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_4:

H_5-H_4=L_{45} 9-6=3 $\Rightarrow$ Метка вершины x_5 не меняется.

H_6-H_4<L_{46} 8-6<5 $\Rightarrow$ H_6=H_4+L_{46}=6+5=11

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_5:

H_6-H_5<L_{56} 11-9<4 $\Rightarrow$ H_6=H_5+L_{56}=9+4=13

H_7-H_5<L_{57} -∞-9<6 $\Rightarrow$ H_7=H_5+L_{57}=9+6=15

Рассмотрим все дуги, которые выходят из вершины x_6:

H_7-H_6<L_{67} 15-13<5 $\Rightarrow$ H_7=H_6+L_{67}=13+5=18

Процесс назначения меток вершинам графа на каждом шаге удобно представить в виде следующей таблицы (рис.3.10):

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞
II_1		5	3	5	6	8	-∞
III_2				6	9		-∞
IV_3							-∞
V_4						11	-∞
VI_5						13	15
VII_6							18

Рис.3.10

$l_{\max}(1-7)=18$ - значение максимального пути.

IV. Определяем максимальный путь:

$H_7 - H_6 = L_{67}$, 18-13 = 5

$H_6 - H_5 = L_{56}$, 13-9 = 4

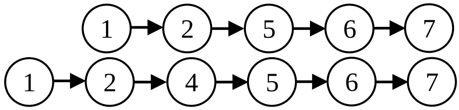
$H_5 - H_4 = L_{45}$, 9-6 = 3

$H_5 - H_2 = L_{25}$, 9-5 = 4

$H_4 - H_2 = L_{24}$, 6-5 = 1

$H_2 - H_1 = L_{12}$, 5-0 = 5

Пути, соответствующие максимальному значению 18:



13. Для графа, изображенного на рисунке 3.7, определите минимальный путь между вершинами x_1 и x_7 с помощью алгоритма Беллмана-Калаба.

Решение:

Алгоритм Беллмана-Калаба позволяет определить минимальные пути из каждой вершины графа в фиксированную вершину, названную конечной.

I. Строим взвешенную матрицу смежности заданного графа *G=(X,U)* по следующим правилам:

а) $m_{ij} = L_{ij}$, если существует дуга (x_i, x_j) с весом L_{ij};

б) $m_{ij} = \infty$, если не существует дуга (x_i, x_j), а ∞ - максимально возможное число для данной задачи (∞ представляет собой длину произвольного пути между вершинами x_i и x_j);

в) $m_{ij} = 0$, если $i = j$.

Для графа на рисунке 3.7 взвешенная матрица смежности приведена на рисунке 3.11.

II. Строим вектор V_i^0 следующим образом:

а) $V_i^0 = L_{in}$, если существует дуга (x_i, x_n), где x_n – конечная вершина, для которой находим минимальный путь, L_{in} – вес этой дуги;

б) $V_i^0 = \infty$, если не существует дуга (x_i, x_n);

в) $V_i^0 = 0$, если $i = n$.

Координаты вектора V_i^0 для заданного графа приведены на рисунке 3.11.

III. Вычисляем координаты вектора V_i^k следующим образом:

$V_i^k = \min\{L_{ij} + V_j^{k-1}\}$, где $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$

$V_n^k = 0$.

Если $V^k = V^{k-1}$ - STOP.

i – я компонента вектора V_i^k дает нам длину минимального пути между вершинами x_i и x_n.

IV. Определяем путь между вершинами x_i и x_n, соответствующий минимальному значению:

$$V^k = L_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow L_{ij} = V^k - V^{k-1}$$

Для заданного графа вычисляем координаты вектора V_i^k:

$$V_{(1)}^1 = \min\{L_{12} + V_2^0, L_{13} + V_3^0, L_{14} + V_4^0, L_{15} + V_5^0, L_{16} + V_6^0, L_{17} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{5 + \infty, 3 + \infty, 5 + \infty, 6 + 6, 8 + 5, \infty + 0\} = 12$$
$$V_{(2)}^1 = \min\{L_{21} + V_1^0, L_{23} + V_3^0, L_{24} + V_4^0, L_{25} + V_5^0, L_{26} + V_6^0, L_{27} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, 1 + \infty, 4 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 10$$
$$V_{(3)}^1 = \min\{L_{31} + V_1^0, L_{32} + V_2^0, L_{34} + V_4^0, L_{35} + V_5^0, L_{36} + V_6^0, L_{37} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 2 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 8$$
$$V_{(4)}^1 = \min\{L_{41} + V_1^0, L_{42} + V_2^0, L_{43} + V_3^0, L_{45} + V_5^0, L_{46} + V_6^0, L_{47} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 3 + 6, 5 + 5, \infty + 0\} = 9$$
$$V_{(5)}^1 = \min\{L_{51} + V_1^0, L_{52} + V_2^0, L_{53} + V_3^0, L_{54} + V_4^0, L_{56} + V_6^0, L_{57} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 4 + 5, 6 + 0\} = 6$$
$$V_{(6)}^1 = \min\{L_{61} + V_1^0, L_{62} + V_2^0, L_{63} + V_3^0, L_{64} + V_4^0, L_{65} + V_5^0, L_{67} + V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 6, 5 + 0\} = 5$$
$$V_{(1)}^2 = \min\{L_{12} + V_2^1, L_{13} + V_3^1, L_{14} + V_4^1, L_{15} + V_5^1, L_{16} + V_6^1, L_{17} + V_7^1\} =$$
$$= \min\{5 + 10, 3 + 8, 5 + 9, 6 + 6, 8 + 5, \infty + 0\} = 11$$
$$V_{(2)}^2 = \min\{L_{21} + V_1^1, L_{23} + V_3^1, L_{24} + V_4^1, L_{25} + V_5^1, L_{26} + V_6^1, L_{27} + V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty + 12, \infty + 8, 1 + 9, 4 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 10$$
$$V_{(3)}^2 = \min\{L_{31} + V_1^1, L_{32} + V_2^1, L_{34} + V_4^1, L_{35} + V_5^1, L_{36} + V_6^1, L_{37} + V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty + 12, \infty + 10, \infty + 9, 2 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 8$$

$$V_{(4)}^{2}=\min\left\{L_{41}+V_{1}^{1},L_{42}+V_{2}^{1},L_{43}+V_{3}^{1},L_{45}+V_{5}^{1},L_{46}+V_{6}^{1},L_{47}+V_{7}^{1}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+12,\infty+10,\infty+8,3+6,5+5,\infty+0\}=9$$
$$V_{(5)}^{2}=\min\left\{L_{51}+V_{1}^{1},L_{52}+V_{2}^{1},L_{53}+V_{3}^{1},L_{54}+V_{4}^{1},L_{56}+V_{6}^{1},L_{57}+V_{7}^{1}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+12,\infty+10,\infty+8,\infty+9,4+5,6+0\}=6$$
$$V_{(6)}^{2}=\min\left\{L_{61}+V_{1}^{1},L_{62}+V_{2}^{1},L_{63}+V_{3}^{1},L_{64}+V_{4}^{1},L_{65}+V_{5}^{1},L_{67}+V_{7}^{1}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+12,\infty+10,\infty+8,\infty+9,\infty+6,5+0\}=5$$
$$V_{(1)}^{3}=\min\left\{L_{12}+V_{2}^{2},L_{13}+V_{3}^{2},L_{14}+V_{4}^{2},L_{15}+V_{5}^{2},L_{16}+V_{6}^{2},L_{17}+V_{7}^{2}\right\}=$$
$$=\min\{5+10,3+8,5+9,6+6,8+5,\infty+0\}=11$$
$$V_{(2)}^{3}=\min\left\{L_{21}+V_{1}^{2},L_{23}+V_{3}^{2},L_{24}+V_{4}^{2},L_{25}+V_{5}^{2},L_{26}+V_{6}^{2},L_{27}+V_{7}^{2}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+11,\infty+8,1+9,4+6,\infty+5,\infty+0\}=10$$
$$V_{(3)}^{3}=\min\left\{L_{31}+V_{1}^{2},L_{32}+V_{2}^{2},L_{34}+V_{4}^{2},L_{35}+V_{5}^{2},L_{36}+V_{6}^{3},L_{37}+V_{7}^{3}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+11,\infty+10,\infty+9,2+6,\infty+5,\infty+0\}=8$$
$$V_{(4)}^{3}=\min\left\{L_{41}+V_{1}^{2},L_{42}+V_{2}^{2},L_{43}+V_{3}^{2},L_{45}+V_{5}^{2},L_{46}+V_{6}^{3},L_{47}+V_{7}^{3}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+11,\infty+10,\infty+8,3+6,5+5,\infty+0\}=9$$
$$V_{(5)}^{3}=\min\left\{L_{51}+V_{1}^{2},L_{52}+V_{2}^{2},L_{53}+V_{3}^{2},L_{54}+V_{4}^{2},L_{56}+V_{6}^{3},L_{57}+V_{7}^{3}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+11,\infty+10,\infty+8,\infty+9,4+5,6+0\}=6$$
$$V_{(6)}^{3}=\min\left\{L_{61}+V_{1}^{2},L_{62}+V_{2}^{2},L_{63}+V_{3}^{2},L_{64}+V_{4}^{2},L_{65}+V_{5}^{3},L_{67}+V_{7}^{3}\right\}=$$
$$=\min\{\infty+11,\infty+10,\infty+8,\infty+9,\infty+6,5+0\}=5$$

Замечаем, что вектор $V_i^3=V_i^2$ - STOP.

Полученные данные представлены и на рисунке 3.11:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	∞
2	∞	0	∞	1	4	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	3	5	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	4	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$V_{(i)}^{0}$	∞	∞	∞	∞	6	5	0
$V_{(i)}^{1}$	12	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^{2}$	11	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^{3}$	11	10	8	9	6	5	0

Рис. 3.11

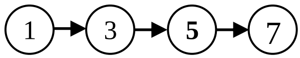
$l_{\min}(1-7)=11$ - значение минимального пути между вершинами x_1 и x_7.

Определяем минимальный путь:

$L_{13}=V_1-V_3$ $\quad$ $L_{35}=V_3-V_5$ $\quad$ $L_{57}=V_5-V_7$

3 = 11 - 8 $\quad$ 2 = 8 – 6 $\quad$ 6 = 6 – 0

Путь, соответствующий минимальному значению 11:



14. Для графа, изображенного на рисунке 3.7, определите максимальный путь между вершинами x_1 и x_7 с помощью алгоритма Беллмана-Калаба.

Решение:

I. Строим взвешенную матрицу смежности заданного графа $G=(X,U)$ по следующим правилам:

а) $m_{ij} = L_{ij}$, если существует дуга (x_i, x_j) с весом L_{ij};

б) $m_{ij} = -\infty$, если не существует дуга (x_i, x_j);

в) $m_{ij} = 0$, если $i = j$.

Для графа на рисунке 3.7 взвешенная матрица смежности приведена на рисунке 3.12.

II. Строим вектор V_i^0 следующим образом:

а) $V_i^0 = L_{in}$, если существует дуга (x_i, x_n), где x_n – конечная вершина, для которой находим максимальный путь, L_{in} – вес этой дуги;

б) $V_i^0 = -\infty$, если не существует дуга (x_i, x_n);

в) $V_i^0 = 0$, если $i = n$.

Координаты вектора V_i^0 для заданного графа приведены на рисунке 3.12.

III. Вычисляем координаты вектора V_i^k следующим образом:

$V_i^k = \max\{L_{ij} + V_j^{k-1}\}$, где $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$.

$V_n^k = 0$.

Если $V^k = V^{k-1}$ - STOP.

i – я компонента вектора V_i^k дает нам длину максимального пути между вершинами x_i и x_n.

Координаты вектора V_i^k представлены на рисунке 3.12.

IV. Определяем путь между вершинами x_i и x_n, соответствующий максимальному значению:

$V^k = L_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow L_{ij} = V^k - V^{k-1}$.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	-∞
2	-∞	0	-∞	1	4	-∞	-∞
3	-∞	-∞	0	-∞	2	-∞	-∞
4	-∞	-∞	-∞	0	3	5	-∞
5	-∞	-∞	-∞	-∞	0	4	6
6	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0	5
7	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0
$V_{(i)}^0$	-∞	-∞	-∞	-∞	6	5	0
$V_{(i)}^1$	13	10	8	10	9	5	0
$V_{(i)}^2$	15	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^3$	18	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^4$	18	13	11	12	9	5	0

Рис. 3.12

$l_{\max}(1-7) = 18$ - значение максимального пути между вершинами x_1 и x_7.

Определяем максимальный путь:

$L_{12} = V_1 - V_2$ $\quad$ $L_{24} = V_2 - V_4$ $\quad$ $L_{25} = V_2 - V_5$ $\quad$ $L_{45} = V_4 - V_5$

5 = 18 - 13 $\quad$ 1 = 13 – 12 $\quad$ 4 = 13 – 9 $\quad$ 3 = 12 – 9

$L_{56} = V_5 - V_6$ $\quad$ $L_{67} = V_6 - V_7$

4 = 9 – 5 $\quad$ 5 = 5 – 0

Пути, соответствующие максимальному значению 18:

$1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7$

$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$

15. Определите гамильтонов путь (если он есть) графа $G = (X, U)$, изображенного на рисунке 3.13.

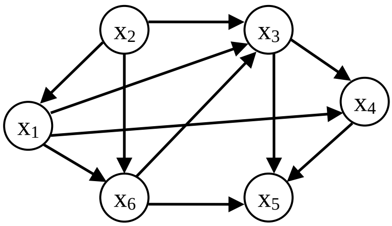


Рис. 3.13

Решение:

Путь, в котором вершины и дуги не повторяются, называется *простым путем*. Простой путь, содержащий все вершины графа, называется *гамильтоновым путем*.

Теорема Чена: Пусть $G = (X, U)$- орграф без циклов порядка *n*. Для того чтобы в заданном графе существовал гамильтонов путь, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \frac{n(n-1)}{2},$$

где $p(x_i)$ - степень достижимости вершин.

Граф $G = (X, U)$ является ориентированным и ациклическим. Применяем следующий алгоритм:

I. Строим матрицу смежности заданного графа $A_{n\times n}=\{a_{ij}\}$ (рис. 3.14):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	0	1	0

Рис. 3.14

II. Определяем матрицу путей $D_{n\times n}=\{d_{ij}\}$, где

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}\qquad \text{(рис. 3.15)}$$

Этапы построения i_d-й строки матрицы путей:

а) Если i-я строка матрицы смежности содержит элементы $a_{ip}, a_{ir}, ..., a_{iv}$ равные 1, тогда к элементам i-й строки логически прибавляем элементы строк $p, r, ..., v$ и пусть в строке i_d получены новые элементы $d_{i\alpha}, d_{i\beta}, ..., d_{i\lambda}$, равные 1;

б) прибавляем логически элементы строк $\alpha, \beta, ..., \lambda$ матрицы смежности к элементам строки i_d, образовывая или нет элементы, равные 1, в i_d-й строке матрицы путей;

в) повторяем шаги а) и б) для всех строк матрицы смежности и в результате получаем матрицу путей (рис. 3.15).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$P(x_i)$
x_1	0	0	1	1	1	1	4
x_2	1	0	1	1	1	1	5
x_3	0	0	0	1	1	0	2
x_4	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1	1	1	0	3

Рис.3.15

III. *Степенью достижимости* вершины x_i называется количество вершин, которые могут быть достижимы из вершины x_i.

Вычисляем степени достижимости вершин $p(x_i)$. Для этого вычисляем количество ненулевых элементов в строке x_i матрицы путей. Вычисляем сумму степеней достижимости вершин $\sum p(x_i)$: $\sum P(x_i) = 4+5+2+1+0+3 = 15$.

IV. Сравниваем $\sum P(x_i)$ с $\frac{n(n-1)}{2}$ (n – количество вершин). Если равны, значит в графе $\exists$ гамильтонов путь:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15 = \sum p(x_i) \Rightarrow \exists \text{ гамильтонов путь.}$$

V. Записываем последовательность степеней достижимости вершин в убывающем порядке. Эта последовательность и является гамильтоновым путем в заданном графе:

$$x_2 \to x_1 \to x_6 \to x_3 \to x_4 \to x_5$$

16. Докажите, что ориентированный ациклический граф не может содержать больше одного гамильтонового пути.

Доказательство:

Единственная последовательность вершин $x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_N^{'}$, которая приводит к гамильтоновому пути, имеет следующий вид:

$$(x_1^{'}, x_2^{'}), (x_2^{'}, x_3^{'}), ..., (x_{N-1}^{'}, x_N^{'}).$$

Действительно, если предположить что существует еще один гамильтонов путь, тогда соответствующая последовательность вершин содержит по крайней мере одну дугу вида $(x_j^{'}, x_i^{'})$, где $j < i$. Отсюда следует, что строка $x_j^{'}$ предшествует строке $x_i^{'}$ в матрице путей $D^{'}$ и $d_{ji}^{'} = 1$, то есть существует по крайней мере один путь из вершины $x_j^{'}$ в вершину $x_i^{'}$, что является несовместимым с существованием в графе дуги $\left(x_i^{'}, x_j^{'}\right)$, с которой образовался бы цикл.

17. В графе $G=\left(X,U\right)$, изображенном на рисунке 3.16, определите гамильтоновы пути.

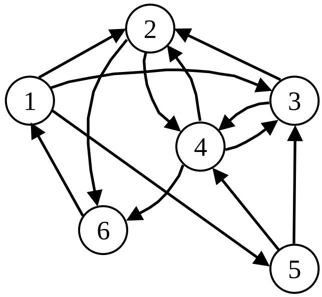


Рис.3.16

Решение:

Заданный граф является ориентированным и содержит циклы. Применяем *алгоритм Кауфмана,* который позволяет определить простые пути любой длины в орграфе (циклическом или ациклическом), в частности и гамильтоновы пути (если они существуют):

I. Для заданного графа $G=\left(X,U\right)$ составляем латинскую матрицу L следующим образом: в *i*-й строке и *j*-м столбце записываем элемент *ij*, если дуга $\left(x_i, x_j\right)\in U$ и 0 – в противном случае (рис.3.17):

$L=$

1	2	3	4	5	6	
0	12	13	0	15	0	1
0	0	0	24	0	26	2
0	32	0	34	0	0	3
0	42	43	0	0	46	4
0	0	53	54	0	0	5
61	0	0	0	0	0	6

Рис.3.17

II. Для каждого элемента $ij \in L$ удаляем i-й элемент, и в результате получаем модифицированную матрицу L^* (рис.3.18):

$L^* =$

1	2	3	4	5	6	
0	2	3	0	5	0	1
0	0	0	4	0	6	2
0	2	0	4	0	0	3
0	2	3	0	0	6	4
0	0	3	4	0	0	5
1	0	0	0	0	0	6

Рис.3.18

III. Осуществляем латинское умножение $(l.)$ матриц L и L^*. В результате умножения получаем матрицу L^2, элементы которой получены по обычному правилу умножения 2-х матриц, к которому добавляются следующие правила:

1) элементы матрицы L^2 равны 0, если хотя бы один из элементов матриц L и L^* равен 0 или если невозможно составить последовательность из различных цифр;

2) элементами матрицы L^2 являются все последовательности, состоящие из различных цифр, полученные при умножении матриц L и L^*: $L^2 = L(l.)L^*$ (рис. 3.19):

1	2	3	4	5	6	
0	132	153	124,134,154	0	126	1
261	0	243	0	0	246	2
0	342	0	324	0	326,346	3
461	432	0	0	0	426	4
0	532,542	543	534	0	546	5
0	612	613	0	615	0	6

Рис.3.19

Элементы матрицы L^2 представляют собой простые пути длины 2.

IV. $L^3 = L^2(l.)L^*$ (рис. 3.20):

1	2	3	4	5	6	
0	1532 1342 1542	1243 1543	1324 1534	0	1326,1246 1346,1546	1
2461	0	2613	0	2615	0	2
3261 3461	0	0	0	0	3426 3246	3
4261	4612	4613	0	4615	4326	4
5461	5432 5342	0	5324	0	5326 5426 5346	5
0	6132	6153	6124 6134 6154	0	0	6

Рис.3.20

Элементы матрицы L^3 представляют собой простые пути длины 3.

V. $L^4 = L^3(l.)L^*$ (рис. 3.21):

1	2	3	4	5	6	
0	15432 15342	0	15324	0	15326,13426 15426,13246 15346	1
0	0	24613 26153	26134 26154	24615	0	2
34261 32461	34612	0	0	32615 34615	0	3
43261	46132	42613 46153	0	42615	0	4
53261 54261 53461	54612	54613	0	0	54326 53426 53246	5
0	61532 61342 61542	61243 61543	61324 61534	0	0	6

Рис.3.21

Элементы матрицы L^4 представляют собой простые пути длины 4.

VI. $L^5 = L^4(l.)L^*$ (рис. 3.22):

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	154326 153426 153246	1
0	0	261543 246153	261534	0	0	2
0	0	0	326154	342615 324615	0	3
0	461532	426153	0	432615	0	4
543261 534261 532461	534612 546132	542613	0	0	0	5
0	615432 615342	0	615324	0	0	6

Рис.3.22

Элементы матрицы L^5 представляют собой простые пути длины 5 и для заданного графа эти пути являются гамильтоновыми путями.

18. Нарисуйте граф рефлексивного отношения $a \geq b$, где $a, b \in M = \{1,2,3\}$.

Решение: (рис. 3.23).

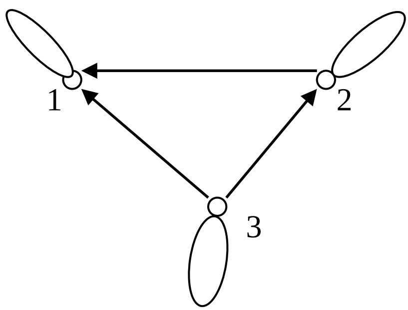


Рис. 3.23

19. На множестве $M=\{1,2,3\}$ задается отношение $R=$*”быть меньше”*. Определите элементы множества R. Установите свойства отношения R. Нарисуйте граф отношения.

Решение: $R=\{(1,2);(1,3);(2,3)\}$.

Свойства отношения:

1. *антирефлексивно*, так как не существует элемента $a\in M$, для которого имеет место aRa, например 1 не меньше 1;

2. *не является симметричным*, так как не существует пар $(a,b)\in M^2$, для которых выполняется: из $aRb\Rightarrow bRa$, например из $1R2$ не следует $2R1$;

3. *транзитивно*, так как из aRb и $bRc\Rightarrow aRc$, например из $1R2$ и $2R3\Rightarrow 1R3$.

Граф заданного отношения изображен на рисунке 3.24.

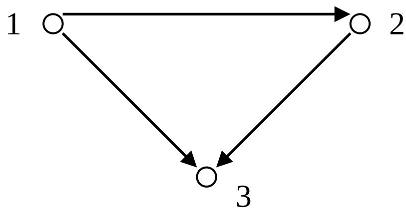


Рис. 3.24

3.2. ЗАДАЧИ

1. Для графа, изображенного на рисунке 3.25, определите отношения, которые определяют многозначное отображение U множества $X = \overline{\{1,7\}}$ в множество X.

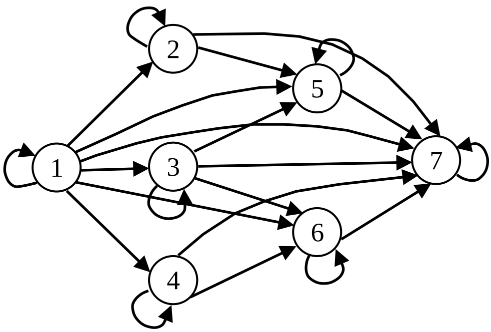


Рис.3.25

2. Докажите, что если неориентированный граф содержит n вершин и хотя бы n ребер, тогда он содержит хотя бы один цикл.

3. Выясните, существует ли неориентированный граф с 10-ю вершинами, для которого ряд, содержащий степени вершин, имеет следующий вид: 1,1,1,3,3,3,4,6,7,9.

4. С помощью матрицы смежности некоторого ориентированного графа определите:

а) степени вершин графа;

б) существуют ли изолированные вершины;

в) является ли граф полным.

5. Докажите, что если ориентированный граф G с множеством вершин X содержит m дуг, тогда выполняется равенство:

$$\sum_{x \in X} d^{-}(x) = \sum_{x \in X} d^{+}(x) = m$$

6. Проверьте, является ли граф, изображенный на рисунке 3.26 сильно связным, а на рисунке 3.27 - не сильно связным.

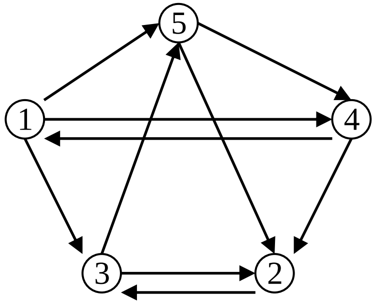


Рис. 3.26

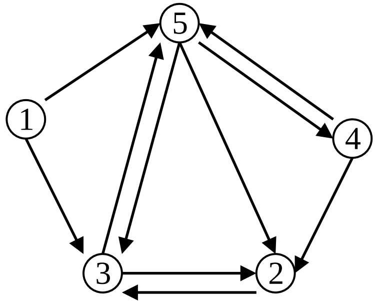


Рис. 3.27

7. Для графа, изображенного на рисунке 3.28, определите минимальный путь между вершинами 1 и 8 с помощью алгоритма Беллмана-Калаба.

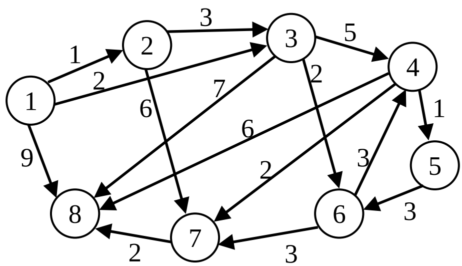


Рис.3.28

8. Нарисуйте граф с шестью вершинами, соответствующий:
   а) рефлексивному отношению;
   б) антирефлексивному отношению;
   в) транзитивному отношению.

9. На множестве $M=\{2,3,4,7\}$ задано отношение *R="быть больше"*. Определите элементы множества *R*. Установите свойства отношения *R*. Нарисуйте граф.

10. Пусть M= {Юрий, Виктор, Диана} – множество детей у одних родителей. На множестве M задано отношение R=” быть братом”. Определите элементы множества R. Установите свойства отношения R. Нарисуйте граф.

11. Для графа, изображенного на рисунке 3.29, определите минимальный путь между вершинами 0 и 9, используя:

а) алгоритм Беллмана-Калаба;

б) алгоритм Форда.

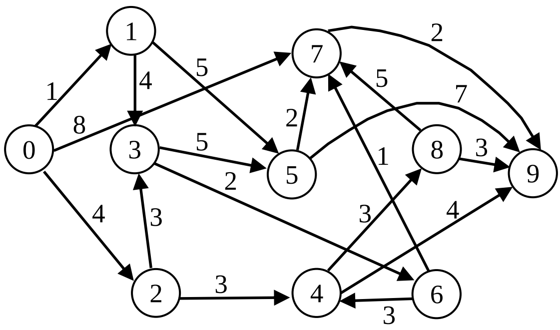


Рис.3.29

12. Используя алгоритм Беллмана-Калаба, определите минимальный путь между вершинами 1 и 8 для графа, изображенного на рисунке 3.30.

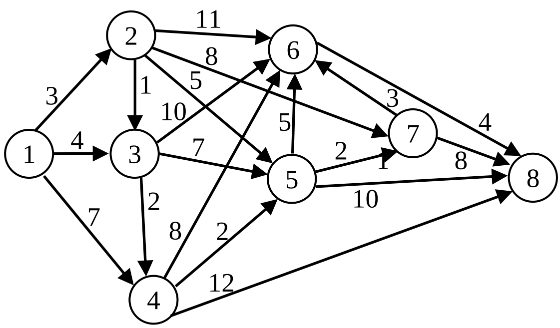


Рис.3.30

13. Используя алгоритм Форда, определите минимальный путь между вершинами 1 и 7 для графа, изображенного на рисунке 3.31.

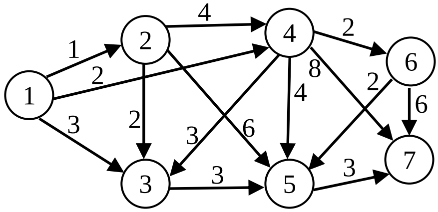


Рис.3.31

14. Изображенная на рисунке 3.32 сеть представляет собой систему сообщения данных относительно количества сырья, требуемого для предприятия. Определите оптимальный маршрут, который определяет оптимальное время передачи информации между вершинами 0 и 7.

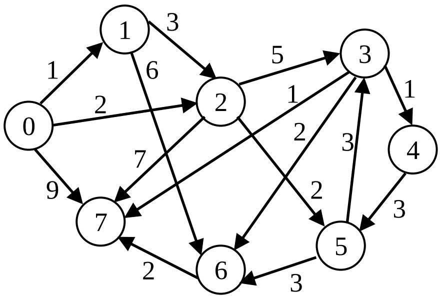


Рис.3.32

15. Между населенными пунктами 0 и 7 строится телефонная сеть, которая должна проходить через некоторые из населенных пунктов 1, 2, ..., 6, в которых устанавливается внутренняя телефонная сеть с возможностью расширения и для других населенных пунктов. Стоимость установок между населенными пунктами, включая установки в точках соединения, указана на соответствующих дугах (i,j) графа,

изображенного на рисунке 3.33. Требуется определить схему установки телефонной сети, которая проходила бы через наибольшее количество населенных пунктов с минимальными затратами для установки.

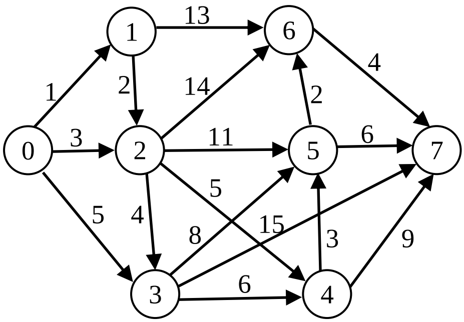


Рис.3.33

16. Для графа, изображенного на рисунке 3.34, определите минимальный путь между вершинами 1 и 8, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Беллмана-Калаба.

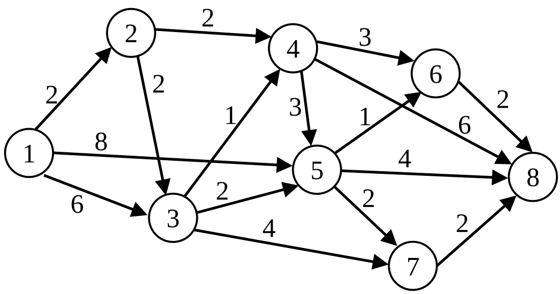


Рис.3.34

17. Для графа, изображенного на рисунке 3.35, определите минимальный путь между вершинами 1 и 8, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Беллмана-Калаба.

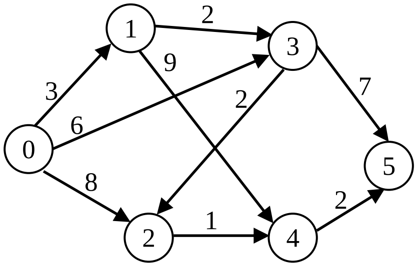


Рис.3.35

18. Определите минимальный путь между вершинами 1 и 9 для графа, изображенного на рисунке 3.36, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Белмана-Калаба.

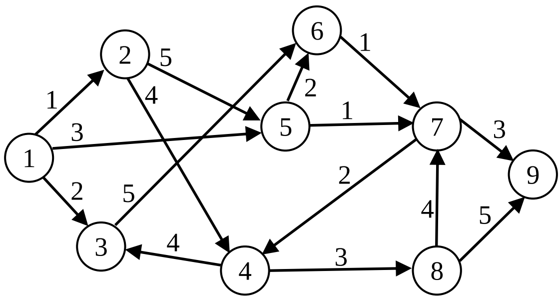


Рис.3.36

19. Районное предприятие по ремонту дорог и мостов выделило на карте района конфигурацию, которая состояла из девяти населенных пунктов 0.1....8 и промежуточных дорог между ними (рис.3.37).

В целях построения асфальтированной дороги между пунктами 0 и 8 было проведено исследование, которое включало в себя: расстояние между пунктами, количество требуемых мостов, расходы на строительные материалы и т. д. В результате исследования была установлена стоимость для построения каждой промежуточной дороги, которая указана на каждой дуге заданного графа.

Требуется составить проект для асфальтирования дороги между пунктами 0 и 8 таким образом, чтобы необходимые затраты были минимальными, и если возможно, чтоб дорога проходила через промышленный центр, который находится в пункте 5. В случае если существует больше путей с одинаковой минимальной стоимостью, в целях дальнейшего развития данного района, какой из путей представляет наибольший интерес?

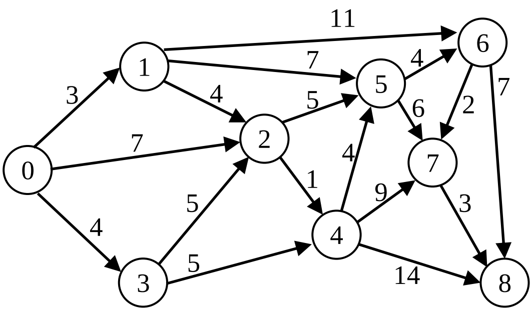


Рис.3.37

20. Предположим что из населенного пункта 0 востребовано срочно сырье для предприятия, которое находится в населенном пункте 6. Для перевозки сырья можно использовать железнодорожную сеть, изображенную на рисунке 3.3.8, где для каждого участка дороги указано время, необходимое для транспортировки сырья от одного пункта к другому. Определите маршрут между двумя указанными пунктами таким образом, чтобы время транспортировки сырья было минимальным.

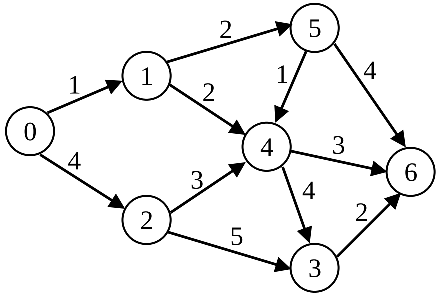


Рис.3.38

21. Для графа, изображенного на рисунке 3.39, определите минимальный путь между вершинами 0 и 12, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Беллмана-Калаба.

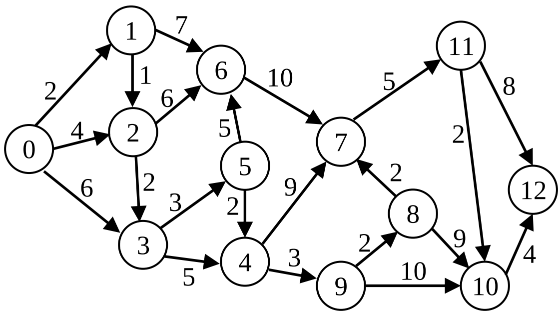


Рис.3.39

22. С помощью алгоритма Форда определите максимальный путь между вершинами 1 и 7 для графа, изображенного на рисунке 3.40.

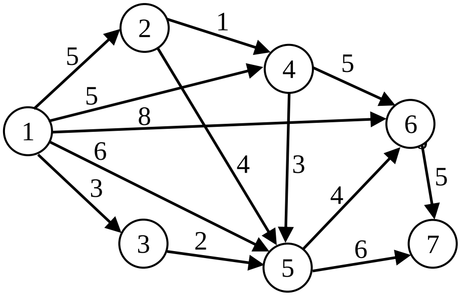


Рис.3.40

23. Определите максимальный путь между вершинами 0 и 6 для графа, изображенного на рисунке 3.41, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Белмана-Калаба.

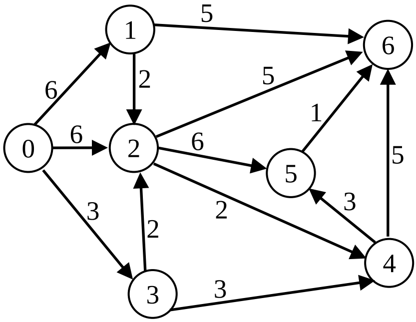


Рис.3.41

24. Для графа, изображенного на рисунке 3.42, определите максимальный путь между вершинами 0 и 8, используя:

а) алгоритм Форда;

б) алгоритм Белмана-Калаба.

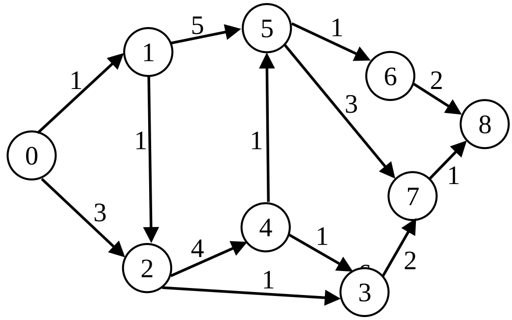


Рис.3.42

25. Граф, изображенный на рисунке 3.43, представляет собой транспортную сеть сырья для алюминиевого завода, который находится в пункте 7. Рассчитанная максимальная прибыль, полученная в результате выбора произвольной транспортной линии (в зависимости от загрузочных станций, которые существуют на каждой транспортной линии), указана на каждой дуге графа. Зная, что транспортные средства, используемые для транспортировки сырья, находятся в 0 пункте, определите маршруты, для которых полученная прибыль будет максимальной.

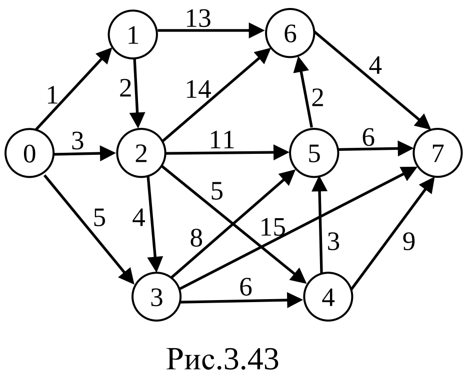


Рис.3.43

26. Игрок в теннис, который участвует в соревновании на звание лучшего игрока года, должен участвовать в теннисных турнирах различной категории. Каждый турнир котируется

определенным количеством очков. Возможность участия после турнира, проведенного в населенном пункте “*k*” в следующем турнире, находящемуся в пункте “*j*”, указана в графе на рисунке 3.44. Выигранный турнир в пункте *j* добавляет к общему счету количество очков, указанное числом в вершине *j*. Определите количество и порядок проведения турниров, которые должен выиграть игрок для получения максимального количества очков. Участие в турнире, организованном в населенном пункте 8, является обязательным.

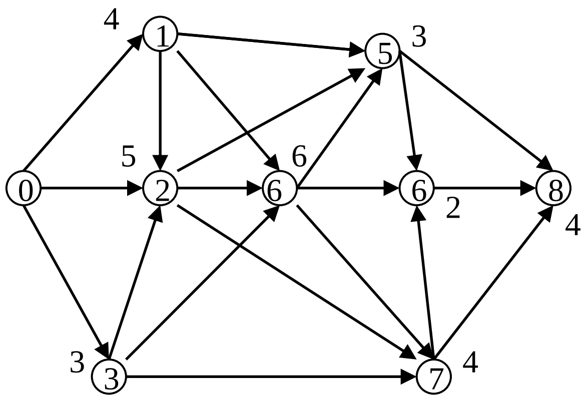


Рис. 3.44

27. Для транспортной сети, изображенной на рисунке 3.45, определите величину максимального потока согласно алгоритму Форда-Фулкерсона.

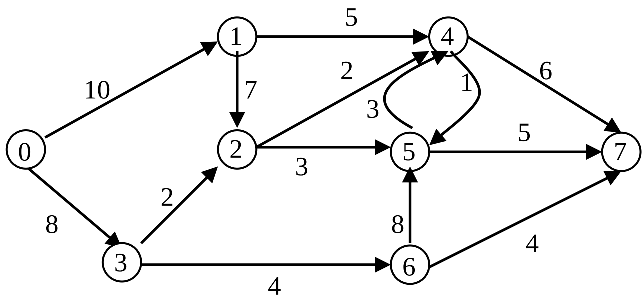


Рис.3.45

28. В порту 0 находятся 35 пароходов, которые должны переместиться в 9-й порт. Перемещение 35 пароходов из одного порта в другой происходит через промежуточные порты 1,2,…,8 согласно ограничениям, приведенным на рис.3.46 (между двумя портами не могут одновременно перемещаться больше пароходов, чем заданное число). Определите максимальное количество пароходов, которые приплывут в 9-й порт на первом этапе.

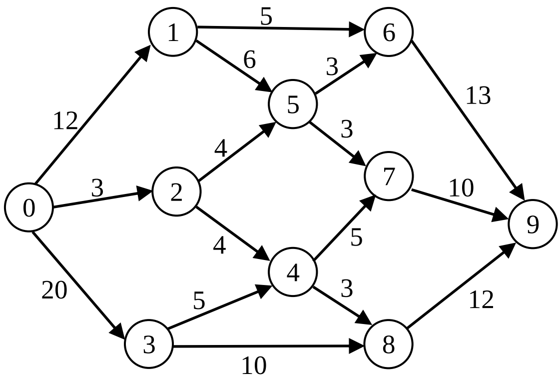


Рис.3.46

29. Используя алгоритм Форда-Фулкерсона, определите максимальный поток в транспортной сети, изображенной на рисунке 3.47.

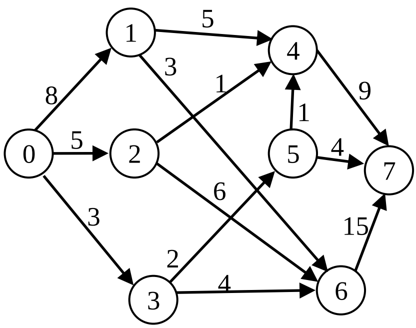


Рис.3.47

30. Используя алгоритм Форда-Фулкерсона, определите максимальный поток в транспортной сети, изображенной на рисунке 3.48.

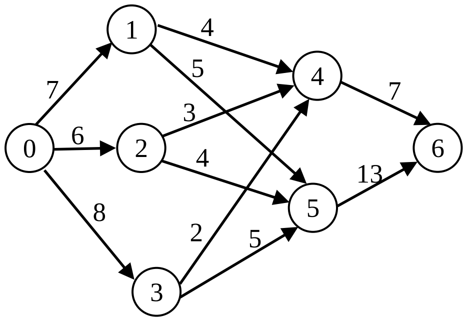


Рис.3.48

31. Между 11 пунктами некоторой земледельческой фермы существует сеть каналов, представленная на рисунке 3.49, где на каждой дуге указана максимальная пропускная способность соответствующего канала.

Зная, что источником воды является вершина 0 и в вершине 10 находится участок, который очень нуждается в воде, определите способ использования сети каналов таким образом, чтобы в вершине 10 был максимальный приход воды.

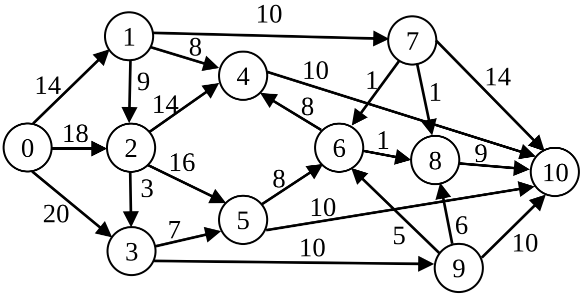


Рис.3.49

32. Пусть имеется 5 изделий P_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$, которые необходимо обработать в соответствии со следующими отношениями порядка:

- изделие P_2 предшествует изделиям P_1, P_4 и P_5;
- изделие P_3 предшествует изделиям P_2, P_4;
- изделие P_4 предшествует изделиям P_1, P_5;
- изделие P_5 предшествует изделию P_1 .

Отношения порядка установлены исходя из производственных требований.

Необходимо установить, если возможна обработка изделий согласно установленным отношениям, и если такая обработка возможна, определить последовательность, в которой будет выполнена обработка.

33. Определите, является ли граф, изображенный на рисунке 3.50, гамильтоновым.

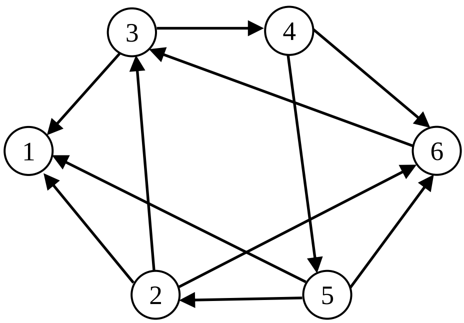


Рис.3.50

34. Докажите что в графе, изображенном на рисунке 3.51, не существует гамильтонового пути. Определите минимальное количество дуг, которые необходимо добавить для того, чтобы в графе существовал гамильтонов путь.

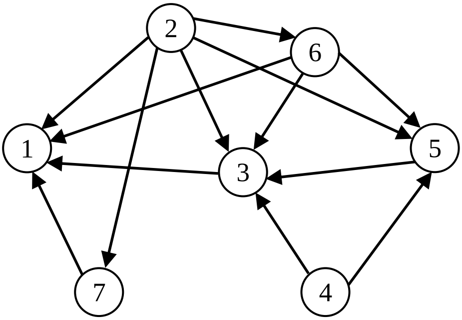


Рис.3.51

35. Используя алгоритм Кауфмана, определите гамильтоновы циклы в графе, изображенном на рисунке 3.52.

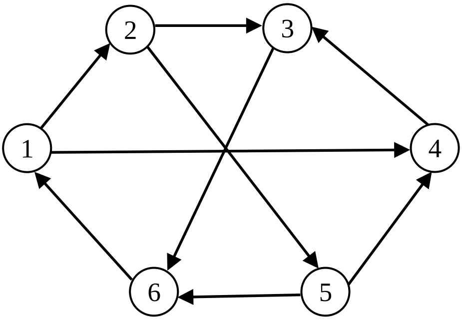


Рис.3.52

36. Используя латинское умножение, определите гамильтонов путь в графе, изображенном на рисунке 3.53.

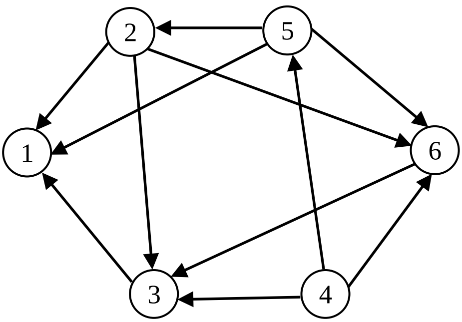


Рис.3.53

37. Построить орграф $G=(X,U)$ и определите в нем гамильтонов путь.

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_3),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_1),(x_6,x_3),(x_6,x_5)\}$.

38. Построить орграф $G=(X,U)$ и определите в нем гамильтоновы пути.

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

$U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_3),(x_3,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_4),(x_4,x_1),(x_4,x_3)\}$.

39. Определите гамильтонов путь в графе $G=(X,U)$:

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_5),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_5,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_3),(x_6,x_4)\}$.

40. Определите гамильтоновы пути в графе, изображенном на рисунке 3.54.

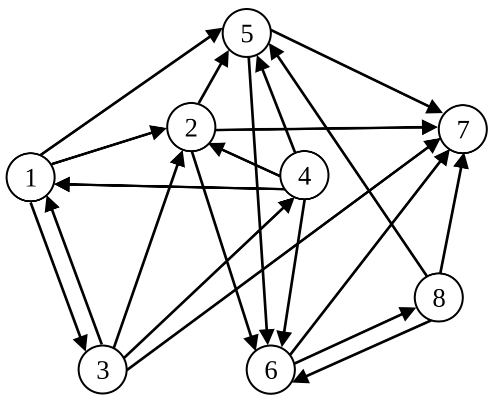


Рис. 3.54

3.3. ОТВЕТЫ

1. Имеем

$U_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7)\}$;

$U_2 = \{(2,2),(2,5),(2,7)\}$; $U_5 = \{(5,5),(5,7)\}$;

$U_3 = \{(3,5),(3,6),(3,7)\}$; $U_6 = \{(6,6),(6,7)\}$;

$U_4 = \{(4,4),(4,6),(4,7)\}$; $U_7 = \{(7,7)\}$.

2. Максимальное количество дуг, содержащихся в ациклическом графе с n вершинами, есть n -1. Если граф содержит хотя бы n дуг, тогда он не может быть ациклическим.

3. Если бы ответ был утвердительным, тогда 10-я вершина является смежной со всеми остальными, в том числе и с 7. Из того, что вершины 1, 2 и 3 имеют степень, равную 1, следует, что 9-я вершина может быть смежна и с 10-3-1 = 6 вершинами, что является противоречием, так как $d(9) = 7$.

4. а) Сумма элементов i–й линии является внешней степенью вершины x_i, а сумма элементов i–го столбца является внутренней степенью вершины x_i;

б) вершина x_i является изолированной тогда и только тогда, когда все элементы i –й строки и i –го столбца равны 0;

в) для любой пары (i, j) с $i \neq j$ хотя бы один из элементов $a[i, j]$, $a[j, i]$ равен 1.

5. Каждая дуга (x, y) участвует один и только один раз в $d^+(x)$ и один и только один раз в $d^-(y)$.

7. Определены следующие пути: (1,2,7,8), (1,3,6,7,8), (1,3,8) şi (1,8), значение которых равно 9.

10. (рис.3.56).

$R = \{(\text{Юрий}, \text{Виктор}), (\text{Юрий}, \text{Диана}), (\text{Виктор}, \text{Юрий}), (\text{Виктор}, \text{Диана})\}$,

Отношение является:

1. антирефлексивным, так как не существует $a \in M$, для которого выполняется aRa, например Юрий не является братом Юрия;

2. не является симметричным, так как не существует пар $(a,b) \in M^2$, для которых из $aRb \Rightarrow bRa$, например из *ЮрийRДиана* не следует *ДианаRЮрий*;

3. не является транзитивным, так как из *aRb* и *bRc* не следует *aRc*, например из *Юрий R Виктор* и *Виктор R Юрий* не следует *Юрий R Юрий.*

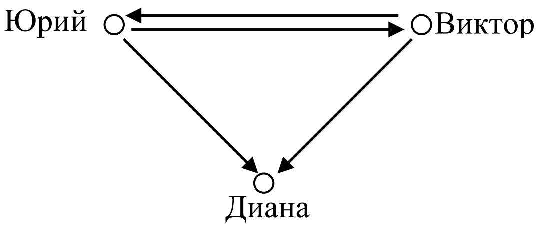


Рис. 3.56

11. Минимальное значение 10 содержит путь (0,1,3,6,7,9).

12. Найдены следующие пути, содержащие минимальное значение 17: (1,2,3,4,5,6,8), (1,2,5,6,8), (1,3,4,5,6,8).

13. Определены пути: (1,4,5,7), (1,3,5,7), (1,2,3,5,7), (1,4,6,5,7), значение которых равно 9.

14. Минимальный путь между вершинами 0 и 7 и является оптимальным маршрутом, который определяет оптимальное время для передачи информации. Найдены следующие пути, содержащие минимальное значение 8, которые являются оптимальными маршрутами: (0,2,5,3,7), (0,2,3,7).

15. Определение схемы установки телефонной сети минимальной стоимости сводится к определению минимального пути между вершинами 0 и 7 заданного графа. Найдены следующие пути, которые содержат минимальное значение 17: (0,1,2,4,5,6,7), (0,2,4,5,6,7), (0,1,2,4,5,7), (0,2,4,5,7), (0,1,2,4,7),

(0,2,4,7). Из всех этих путей путь (0,1,2,4,5,6,7) определяет схему установки телефонной сети, которая охватывает наибольшее количество населенных пунктов.

16. Найдены следующие пути, соответствующие минимальному значению 9: (1,2,4,6,8), (1,2,3,5,6,8).

17. Путь, соответствующий минимальному значению 10: (0,1,3,2,4,5).

18. Путь, соответствующий минимальному значению 7: (1,5,7,9).

19. Нахождение маршрута минимальной стоимости сводится к определению минимального пути между вершинами 0 и 8 заданного графа. Пути, соответствующие минимальному значению 19: A = (0,1,5,6,7,8), B = (0,1,6,7,8), C = (0,1,5,7,8).

С экономической точки зрения существование множества решений предоставляет возможность выбора, по необходимости, того или иного пути. В данном случае выберем путь A, который проходит через промышленный центр 5, как и путь C, но в отличие от него охватывает наибольшее количество населенных пунктов.

20. Определяется минимальный путь в заданном графе. Минимальному значению 6 соответствует путь (0,1,4,6).

21. Определены следующие пути, соответствующие минимальному значению 27: (0, 1, 2, 3, 5, 4, 9,10, 12), (0,1,2,3,4,9,10,12).

22. Найдены пути (1,2,4,5,6,7) и (1,2,5,6,7), значение которых равно 18.

23. Путь (0,1,2,5,6) или (0,1,2,4,6) с максимальным значением 15.

24. Путь (0,2,4,5,7,8) с максимальным значением 12.

25. Определение маршрутов, для которых полученная прибыль максимальна, сводится к нахождению максимального пути между вершинами 0 и 7 заданного графа. Найдены следующие пути с максимальным значением 22:

(0,1,2,3,4,5,6,7), (0,2,3,4,5,6,7), (0,1,2,3,4,5,7), (0,2,3,7), (0,1,2,3,7), (0,2,3,4,5,7), (0,1,2,3,4,7), (0,2,3,4,7).

В зависимости от количества доступных транспортных средств, которое варьирует изо дня в день, можно выбрать один или несколько из указанных маршрутов. Максимальное значение 22 и является максимальной прибылью.

26. Если каждой дуге (i, j) (где j-конец дуги) присвоить значение, соответствующее вершине, тогда количество турниров, которые необходимо выиграть, представлены последовательностью вершин, которая определяет максимальный путь между вершинами 0 и 8.

Максимальный путь со значением 25 определяет 6 турниров, которые необходимо выиграть. Порядок этих турниров определен последовательностью вершин пути (0,1,2,4,7,6,8). Максимальное количество очков, которые можно выиграть, равно 25.

27. $A = \{4,5,6,7\}$ - множество непомеченных вершин,

$\omega^{-}(A) = \{(1,4),(2,4),(2,5),(3,6)\}$ - разрез,

$f_{\max} = c(\omega^{-}(A)) = 14$.

28. Требуемый оптимальный транспортный план определяется максимальным потоком, который проходит через заданную сеть. Максимальный поток определяем с помощью алгоритма Форда-Фулкерсона.

$\omega^{-}(A) = \{(1,6),(5,6),(5,7),(4,7),(8,9)\}$ - разрез.

$f_{\max} = c(\omega^{-}(A)) = 28$ - максимальный поток.

Следовательно, на первом этапе из 0 порта в 9-й порт приплывут 28 пароходов.

29. $A = \{1,2,4,5,6,7\}$ - множество непомеченных вершин,

$\omega^{-}(A) = \{(0,1),(0,2)(3,5),(3,6)\}$ - разрез,

$f_{\max} = c(\omega^{-}(A)) = c(0,1) + c(0,2) + c(3,5) + c(3,6) = 8 + 5 + 2 + 4 = 19$.

30. $A = \{1,2,4,5,6\}$ - множество непомеченных вершин,

$\omega^{-}(A) = \{(0,1),(0,2),(3,4),(3,5)\}$ - разрез,

$f_{\max} = c(\omega^{-}(A)) = c(0,1) + c(0,2) + c(3,4) + c(3,5) = 7 + 6 + 2 + 5 = 20$.

31. $A=\{7,8,9,10\}$, $\omega^-(A)=\{(1,7),(4,10),(6,8),(5,10),(3,9)\}$,

$f_{\max}=c(\omega^-(A))=10+10+1+10+10=41$.

32. Определим граф (рис. 3.57), который содержит 5 вершин. Вершины соответствуют заданным изделиям. Задача сводится к определению гамильтонового пути в этом ориентированном ациклическом графе.

Так как $\sum P(x_i)$ = $\dfrac{n(n-1)}{2}$ =10, то граф содержит гамильтонов путь $d_H=(P_3,P_2,P_4,P_5,P_1)$, который и определяет порядок обработки изделий.

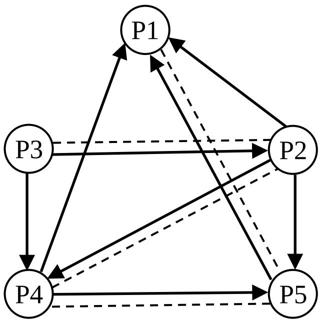


Рис 3.57

33. $L^5=L^4(l.)L^*=$

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
452631	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	5
634521	0	0	0	0	0	6

Рис.3.58

34. Так как $\sum P(x_i)$ = 15 $\neq \dfrac{n(n-1)}{2}$, то в заданном графе не существует гамильтонового пути. Добавление дуг (6,4) и

(3,7) обеспечивает существование гамильтонового пути $d_H = (2,6,4,5,3,7,1)$.

35. $L^6 = L^5(l.)L^* = L^4(l.)(L^2)^* =$

1	2	3	4	5	6	
1254361	0	0	0	0	0	1
0	2543612	0	0	0	0	2
0	0	3612543	0	0	0	3
0	0	0	4361254	0	0	4
0	0	0	0	5436	0	5
0	0	0	0	0	6125436	6

Рис.3.61

36. $d_H = (4,5,2,6,3,1)$.
37. $d_H = (4,6,5,1,2,3)$.
38. $L^3 = L^2(l.)L^* =$

1	2	3	4	
0	0	1243	1234	1
2431 2341	0	0	0	2
3241	3412	0	3124	3
0	4312	0	0	4

Рис.3.62

39. $d_H = (1,2,5,6,3,4)$.
40. Гамильтоновы пути:
(1,3,4,2,5,6,8,7), (3,4,1,2,5,6,8,7), (4,1,3,2,5,6,8,7),
(1,3,4,2,6,8,5,7), (3,4,1,2,6,8,5,7), (4,1,3,2,6,8,5,7).

Литература

1. V. Beşliu. Ciclu de prelegeri “Matematica discretă”. - Chişinău, U.T.M., 2001.
2. О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. Дискретная математика для инженера. - Москва, Энергоатомиздат, 1988.
3. О. Е. Акимов. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - Москва, Лаборатория базовых знаний, 2001.
4. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – Москва, Физматлит, 2001.
5. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. - Москва, Наука, 1977.
6. Р. Хаггарти. Дискретная математика для программистов. - Москва, Техносфера, 2004.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - Санкт-Петербург, Питер, 2001.

Содержание