I. Balmuş, Gh. Ceban, A. Leahu,
I. Lisnic, A. Moloşniuc

Teoria Probabilităților si a Informației în Sistemul de programe Mathematica

(Teorie, indicatii metodice si probleme propuse)

Chisinau
2016

Cuprins

Motto. *Matematica este arta de a da lucrurilor diferite unul si acelasi nume.*

Henri Poincare (1854-1912)

1. Întroducere

1.1. Obiectul de studiu al Teoriei Probabilitatiilor

Apariția Teoriei Probabilităților ca ramură a Matematicii datează din sec. XVII și este legată de numele marilor matematicieni Blaise Pascal (1623-1662), Pierre Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695) și Jacob Bernoulli (1654-1705), plecând de la rezolvarea unor probleme legate de jocurile de noroc. Necesitatea de a largi aria de aplicabilitate a acestei teorii a condus la varianta ei moderna și anume, Teoria axiomatică a Probabilităților, propusa in anul 1933 de catre matematicianul rus Andrei Nikolaevici Kolmogorov (1903-1987).

Daca e să ne referim la obiectul ei de studiu, putem spune ***ca Teoria Probabilităților studiază modele matematice ale fenomenelor (experimentelor) aleatoare (înâmplătoare, stochastice sau indeterministe, cum li se mai spune)***. Aici se impun unele lămuriri suplimentare.

Mulțimea de fenomene care se întâlnesc în lumea înconjurătoare se împarte în două clase: *fenomene deterministe* si *fenomene indeterministe* sau, cu alte cuvinte, *fenomene aleatoare.*

Spunem, astfel, ca *fenomenul este determinist daca observatorul* *poate anticipa cu certitudine evoluția acestuia.* În calitate de exemplu putem lua fenomenul atracŞei universale. Observa˝Hile fŁcute asupra acestui fenomen i-au permis marelui matematician si fizician englez Isaac Newton (1642-1727) sŁ descopere *Legea Atracţiei Universale:*

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

AceastŁ formulŁ reprezintŁ un exemplu tipic de model mathematic al unui fenomen (in cazul dat, determinist). Ea ne aratŁ cŁ, for˝Ha F de atracŞe dintre douŁ corpuri, unul de masŁ m_1, altul de masa m_2, este direct proportionalŁ cu produsul $k{\cdot}m_1{\cdot}m_2$ кi invers propor˝HionalŁ cu pŁtratul distan˝Hei r dintre aceste corpuri, unde k este o constanta universalŁ.

Putem spune, aкadar, cŁ ***a modela mathematic , spre a fi cercetat, un fenomen (experiment, eveniment sau obiect oarecare) înseamna a-l descrie, fie şi aproximativ, cu ajutorul noţiunilor şi formulelor matematice, cu alte cuvinte, a-l descrie în limbajul mathematic***. Dealtfel , unul кi acelaкi model mathematic poate descri doua sau mai multe fenomene, in esenŞŁ, diferite. De exemplu, formula de mai sus serveкte in calitate de model matematic кi pentru fenomenul atractiei dintre doua particule elementare (Legea lui Coulomb).

DimpotrivŁ, spunem despre *un fenomen că este indeterminist (aleator) dacă observatorul fenomenului nu poate anticipa cu certitudine evoluţia lui.* Din punct de vedere al observatorului, observaŞile facute asupra unui fenomen sau masuratorile corespunzatoare echivaleaza cu efectuarea unui experiment legat de fenomenul dat. Or, prin experiment vom în˝Helege observarea unui fenomen dat. *Experimentele indeterministe se împart*, la rândul lor, *în doua subclase*: *(a) experimente indeterministe (aleatoare) care poseda proprietatea regularității statistice¸si (b) experimente aleatoare care nu poseda proprietatea regularitatii statistice.*

Definiţia 1. *Vom spune ca un experiment aleator $\mathcal{E}$ poseda proprietatea regularitaţii (stabilităţii) statistice dacă acesta verifică urmatoarele proprietati:*

1) poate fi reprodus, ori de câte ori dorim, practic în aceleasi conditii;
2) pentru orice eveniment A asociat lui $\mathcal{E}$ *frecventa lui relativa în n probe, adica* $f_n(A)$*=numarul de probe in care s-a produs A raportat la numarul total de probe=n(A)/n, oscileaza în jurul unui numar notat cu P(A), P(A) ia valori din [0,1],* $f_n(A)$ *devenind, odata cu cresterea lui n, „tot mai aproape ¸si mai aproape de* ***P****(A)";*
3) pentru doua serii diferite, respectiv de n¸si m probe, atunci când n si m sunt foarte mari, avem ca $f_n(A)$ *coincide aproximativ cu* $f_m(A)$ *.*

În concluzie, stabilitatea statisticŁ a frecvenŞelor relative conferŁ verosimilitate ipotezei, conform cŁreia pentru orice eveniment *A*, posibil ca rezultat observabil al unui experiment aleator $\mathcal{E}$, putem defini numŁrul ***P****(A)* cu ajutorul cŁruia mŁsuram gradul (кansele) de realizare a lui *A* într-un numar foarte mare de probe. Astfel, în Teoria probabilitatilor devine postulat afirmatia, conform careia pentru orice eveniment *A* asociat unui experiment aleator $\mathcal{E}$ existŁ (in mod ***obiectiv***) un numar ***P****(A),* numit probabilitate a lui *A*. Proprietatea fireasca a acestui numar rezidŁ în faptul cŁ, odatŁ cu creкterea numarului *n* de probe (experimente) independente, frecvenŞa relativŁ $f_n(A)$ se apropie, tot mai mult кi mai mult, de ***P****(A)*.

Numarul P(A) se numeste probabilitate statistica (sau frecventiala) a evenimentului A.

Exemplu. ConsiderŁm, în calitate de experiment aleator $\mathcal{E}$, aruncarea monedei o singurŁ data. Fie *A* evenimentul ce constŁ în apariŞa stemei. Observam, astfel, ca $f_{1000}(A)$ coincide aproximativ cu *1/2* adica *P(A)=1/2* iar $f_{2000}(A)$ coincide, la fel, aproximativ cu *1/2*, adica probabilitatea *P(A)=1/2*. Prin urmare, putem afirma probabilitatea (statisticŁ) a apariŞei stemei la aruncarea monedei o singura datŁ este egalŁ cu *½,* ceea ce inseamna, ca aruncând moneda de un numar suficient de mare de ori, stema va apare în aproximativ 50% de cazuri .

Putem aduce si alte exemple de fenomene aleatoare: rezultatele aruncŁrii unui zar, greutatea unui bob ge grâu ales la întâmplare, numarul de bacterii descoperite într-o picaturŁ de apŁ, durata vieŞi unui calculator produs de întreprinderea datŁ, numarul de apeluri telefonice înregistrate la o staŞe telefonicŁ pe durata unei zile, etc., etc. Enumerarea lor poate continua la nesfârsit, însa ele toate vor avea acelasi caracter, fiiind însoŞte de astfel de noŞuni imprecise (deocamdatŁ) ca aruncare Ăonestaò, monedŁ Ăperfectaò, probe independente, etc.

Remarcă. ***Probabilitatea statistică nu poate fi aplicata întotdeauna, deoarece nu orice experiment poate fi repetat în conditii identice ori de câte ori dorim. experimentele aleatoare care posedă proprietatea regulăritatii statistice ţin de fenomenele de masă. Pentru studiul experimentelor care nu posedă aceasta proprietate, putem folosi noţiunea de probabilitate subiectivă.***

Definitia 2. *Prin probabilitate subiectiva vom întelege acea regula P conform careia o persoana data îi asociaza fiecarui eveniment aleatoriu A un numar P(A) din intervalul [0,1],numit probabilitatea evenimentului A.*

Astfel, putem vorbi despre probabilitatea subiectivŁ, evaluatŁ, sŁ zicem, de un expert, ca pânŁ în anul 2020 se va produce prima expeditie a omului pe Marte. Pentru studiul fenomenelor aleatoare indeterministe, în afara de *probabilitate subiectivă* si *probabilitate frecvenţială*, existŁ si notiunile de *probabilitate clasica*, *probabilitate geometrica*, *probabilitate discreta* si *probabilitate definita în sens axiomatic*. Toate aceste noŞuni au ca scop definirea unei modalitŁŞ de masurare a ĸanselor (gradelor) de realizare a evenimentelor aleatoare date, defi-niŞa axiomaticŁ a probabilitŁŞi fiind, într-un anumit sens, acoperitoare pentru toate celelate definiŞi.

Lucrarea data este axata numai ĸi numai pe probabilitŁŞ obiective, nu si subiective.

1.2. Considerente de ordin general asupra sistemu-lui de programe (soft-ului) Mathematica

Înainte de a trece nemijlocit la tema enunŞatŁ în denumirea paragra-fului, oferim o scurtŁ informaŞe privind Sistemul de programe Mathe-matica. La întrebarea ĂCine a creat Sistemul de programe Mathe-matica?ò putem da urmŁtorul rŁspuns.

Creatorul Sistemului Mathematica este **Stephen Wolfram** (S.U.A.). El s-a nascut la Londra în a. 1959. Prima lucrare кtiinŞficŁ a elaborat-o la vârsta de 15 ani. La vârsta de 20 ani a obŞnut titlul кtiinŞfic de Doctor în fizica teoreticŁ. Din 1973 începe sŁ aplice calculatorul în cercetŁrile sale кtiinŞfice. Între anii 1979 кi 1983 creazŁ programa SMP care este prima programŁ ce ˇЊe de domeniul Calculului simbolic. MenŞonŁm cŁ anterior calculatorul era, de obicei, folosit la rezolvarea problemelor din Matematica de calcul. În anul 1986, odatŁ cu apariˇЊa primelor PC-uri, începe crearea Sistemului (pachetului de programe) Mathematica, în anul 1988 aparând prima lui variantŁ, Mathematica 1. AceastŁ activitate a continuat кi în anul 1991, având ca rezultat Mathematica 2; în anul 1996 a apŁrut Mathematica 3 iar în anul 1999 ï Mathematica 4. Aceste sisteme au mai multe versiuni. În unele sŁli de calculatoare din U.T.M. este instalat Sistemul de programe Mathematica 5.1. Anume acest Sistem este folosit de cŁtre studenŞ în cadrul lucrŁrilor de laborator la TPI. Dealtfel, pe Internet poate fi accesata o varianta online la adresa http://www.wolframalpha.com/. Activitatea privind dezvoltarea de mai departe a Sistemului Mathematica (SM) continuŁ si în prezent în cadrul firmei **Wolfram Research,** Inc, avândul ca Preкedinte pe Stephen Wolfram. In prezent Sistemul Mathematica apare in versiunea 10.

LucrŁrile pe care le putem realiza cu ajutorul SM pot fi grupate in urmŁtoarele categorii:

Calcule Numerice. Rezultatele acestor calcule sunt numere. Exemple de astfel de prelucrari sunt: calculul integralei definite a unei functii, determinarea radacinilor unui polinom cu coeficienti numerici, determinarea limitei unui sir numeric etc.

Calcule Simbolice. Rezultatele calculelorlor simbolice sunt, de regulŁ, expresii algebrice sau chiar propoziŞi matematice. Exemple de astfel de calcule sunt: calculul primitivei unei functii, determinarea radacinilor unui polinom cu coecienti simbolici, efectuarea unui rationament logic etc.

Trasarea Graficelor. Rezultatele acestor prelucrŁri sunt, de fapt, reprezentŁri grafice ale unor functii, curbe, suprafeŞe sau alte obiecte

grafice descrise prin ecuaŞi sau prin punctele pe care le conŞn. Pot fi create si obiecte grafice pornind de la primitive. Soft-ul Mathematica oferŁ posibilitatea efectuŁrii fiecŁreia dintre aceste prelucrŁri.
Unele lucrŁri pot fi efectuate direct existÂnd comenzi specifice iar altele pot fi descrise in limbajul de programare specific sistemului. Spre deosebire de limbajele de programare de uz general sistemele de software matematic contin un limbaj de comanda mult mai bogat in sensul ca pot fi specificate printr-o singurÂcomandÂsi lucrÂri bazate pe algoritmi relativ complicaŞ (de exemplu inversarea unei matrici, rezolvarea simbolica sau numerica a unui sistem de ecuatii diferentiale etc).

Sistemele de software matematic se pot aplica in domenii diferite, cum ar fi:

-**Matematica** (pentru verificarea unei teorii, enunt»area de noi conjecturi, elaborarea unor demonstratii care implica doar calcule de rutina sau rationamente standard, vizualizarea
grafica a unor obiecte geometrice etc.);

- Fizica (pentru prelucrarea datelor experimentale, si simularea soft a unor fenomene fizice);

-**Chimie** (pentru simularea soft a structurilor moleculare si prelucrarea relatiilor ce descriu reactiile chimice);

-**Statistica** (pentru vizualizarea grafica si analiza datelor, efectuarea de inferenŞe statistice pornind de la date obtinute din sondaje, analiza corelaŞei dintre date etc.);

-**Inginerie** (pentru prelucrarea semnalelor si modelarea sistemelor, proiectare asistata de calculator);

-**Biologie** si medicina (pentru simularea fenomenelor biomecanice, prelucrarea semnalelor si imaginilor din medicina etc.);

-Economie si finante (pentru modelare financiara, planificare si analiza economica, efectuare de predictii etc.)

1.2.1. Generalităţi

a) Începutul lucrului. În calculator este instalat corect sistemul **Mathematica**

Varianta 1. PoziŞa iniŞalŁ: masa de lucru pe care este instalatŁ pictograma Mathematica-5. Facem dublu clic pe pictograma Mathematica. Se lanseazŁ sistemul Matematica ĸi apare fereastra **Untitled 1** ĸi o paletŁ cu simboluri. Se poate de scris ce trebuie în aceastŁ fereastrŁ. Astfel se va începe un document. DacŁ paleta nu apare, atunci ea poate fi instalatŁ tastând: File, Paletes, 4.Basicinput.

Varianta 2. PoziŞa iniŞalŁ: masa de lucru pe care nu este instalatŁ pictograma Mathematica. Pentru a apela sistemul Mathematica tastŁm: Start, Programs, Mathematica 5. Apare fereastra Untitled 1 ĸi se poate de început lucrul cu acest sistem.

b)Tipul documentelor. Documentele în sistemul Mathematica sunt de tipul **notebook.** Ele conŞin, în caz general, texte cu comentarii ĸi celule care conŞin formule matematice ĸi rezultatele rezolvŁrilor problemelor în diferite forme, inclusiv tabele, matrice ĸi grafice. Denumirile funcŞilor se aseamŁnŁ cu cele obiĸnuite ĸi se încep cu literŁ majusculŁ: **Sin**[**x**], **Save**[**eqn,x**],...

c) Rezolvarea unei probleme. Pentru a rezolva o problemŁ trebuie de scris instrucŞunea respectivŁ ĸi de tastat **Shift+Enter** (sau Enter de lângŁ cifre, din partea dreaptŁ). Se afiĸeazŁ

In[nr.d.r] **:=instrucţiunea**

Out[nr.d.r]**=rezultatul.**

În paranteze pŁtrate se conŞine numŁrul de rând al problemei care s-a rezolvat în documentul curent. DacŁ instrucŞunea n-a fost scrisŁ corect, atunci se afiĸeazŁ indicaŞi în privinŞa greĸelii ĸi conŞnutul instrucŞunii.

d) Finisarea lucrului. DacŁ dupŁ lucrul cu documentul dat pentru prima datŁ vrem sŁ-l pŁstrŁm, atumci tastŁm : File, Save As (scriem numele dorit al documentului), Save. Astfel noul document se va salva în sistemul Mathematica. DacŁ se lucreazŁ cu un fiĸier vechi, atunci salvarea redacŞei noi a lui se efectueazŁ prin tastŁrile : File, Save. Documentul poate fi salvat ĸi pe un careva disc în mod obiĸnuit.

e) Utilizarea parantezelor. Parantezele rotunde (ĸi) se folosesc pentru a grupa expresii; parantezele pŁtrate [ĸi] se folosesc pentru delimitarea argumentelor funcŞei, iar acoladele { ĸi } se folosesc pentru delimitarea elementelor din listŁ.

f) Observaţie. Textul care urmeazŁ este scris în Microsoft Word. Pentru scrierea unor formule se folosekte redactorul Equation кi de aceea literele latine sunt scrise italic. Acest text poate fi scris direct în Mathematica, unde literele se scriu normal кi în aкa fel se afiкeazŁ. Folosirea redactorului Microsoft Word face ca textul sŁ fie scris mai compact.

1.2.2. Operaţii aritmetice şi de calcul

În Sistemul de programe Mathematica se folosesc urmŁtoarele **notaţii: Pi** este notaŞa numŁrului π; **E** este notaŞa numŁrului e; **I** este notaŞa numŁrului $i = \sqrt{-1}$; **Infinity** este notaŞa lui ∞; **n!** este notaŞa lui n factorial; **x + y** -- adunarea, **x – y** -- scŁderea, **x/y** -- împŁrŞrea, **x*y** sau **x y** ï înmulŞrea (la înmulŞre între x кi y se pune sau semnul * sau spaŞu liber), –**x** -- minus x, **x^y** ï ridicarea la putere x^y, **x = = y** ï egalitate, **x** > **y** ï mai mare, **x** < **y** ï mai mic, **x** >= **y** ï mai mare sau (кi) egal, **x** <= **y** ï mai mic sau (кi) egal, **x! = y** ï x este diferit de y. Termenii se grupeazŁ cu ajutorul parantezelor rotunde. Se folosesc кi notaŞi obiкnuite.

La rezolvarea problemelor de aritmeticŁ кi de calcul pot fi folosite кi funcŞile ce urmeazŁ.

Plus[**x,y,...,z**] – calculeazŁ suma x+y+é +z;

Times[**x,y,...,z**] – calculeazŁ produsul xy···z ;

Power[**x,n**] – calculeazŁ expresia x^n;

List[$\mathbf{x_1,x_2,...,x_n}$] – creazŁ lista $\{x_1,x_2,...,x_n\}$;

Rule[**a,b**] – efectueazŁ substituŞa a–>b;

Set[**a,b**] – atribuie lui a valoarea b;

Prime[**n**] – determinŁ al n-lea numŁr prim;

FactorInteger[**n**] – determinŁ factorii primi ai numŁrului n кi exponenŞi puterilor lor;

Max[**x,y,...,z**] – determinŁ cel mai mare numŁr din lista datŁ;

Min[**x,y,...,z**] – determinŁ cel mai mic numŁr din lista datŁ;

Abs[**x**] – determinŁ valoarea absolutŁ a numŁrului real x кi modulul numŁrului complex x.

é .

Exemplul 1. Se dŁ o expresie aritmeticŁ :

$$\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}. \qquad (1)$$

Se cere :a) sŁ se determine valoarea exactŁ a acestei expresii ; b) sŁ se determine o careva valoare aproximativŁ a expresiei date ; c) sŁ se determine o valoare aproximativŁ care conŞne 10 cifre semnificative.

Rezolvare. a) Pentru a obŞne valoarea exactŁ a expresiei (1) procedŁm astfel. Scriem aceastŁ expresie cu ajutorul paletei în forma (2.1) sau în forma $\frac{3\verb|^|5\,(25+4)-52}{45+36}$ кi tastŁm Shift+Enter (sau Enter de lângŁ cifre). Se afiкeazŁ :

In[**1**] **:=** $\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$

Out[**1**]= $\frac{6995}{81}$ **.**

b) Pentru a obŞne o valoare aproximativŁ scriem un punct dupŁ un numŁr (de exemplu 45.) din expresie. Acest numŁr va fi considerat aproximativ кi rezultatul se va obŞne tot aproximativ. Deci scriem expresia datŁ în forma **:** $\frac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ:

In[**2**] **:=** $\frac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$

Out[**2**]**=86.358.**

AltŁ variantŁ de rezolvare. Acelaкi rezultat se obŞne dacŁ scriem $\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$ // N кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[**3**] **:=** $\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$ // **N**

Out[**3**]**=86.358.**

c) Scriem N[$\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$,10] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[**4**] **:=** $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$

Out[**4**]**=86.35802469**.Δ

Exemplul 2. SŁ se determine primul numŁr prim.

Rezolvare. Scriem: Prime[1] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[**4**] **:=Prime**[**1**]

Out[**5**]**=2**.Δ

Exemplul 3. SŁ se extragŁ rŁdŁcina pŁtratŁ din primul numŁr prim (adicŁ din doi): a) sŁ se afiкeze rezultatul cu 20 cifre semnificative; b) sŁ se afiкeze o valoare aproximativŁ arbitrarŁ.

Rezolvare. a) Scriem N[$\sqrt{2}$,20] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[**6**] **:= N**[$\sqrt{2}$,20]

Out[**6**] **=1,41421356237309504880**.

b) Scriem $\sqrt{2}$ //N кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ :

In[**7**] **:=** $\sqrt{2}$ **//N**

Out[**7**] **=1,41421**.Δ

Exemplul 4. Se dŁ expresia 59^{50}. Se cere : a) sŁ se calculeze valoarea exactŁ a acestei expresii ; b) sŁ se determine o valoare aproximativŁ cu 20 cifre semnificative ; c) sŁ se determine o valoare aproximativŁ arbitrarŁ.

Rezolvare. a) Scriem 59^{100} кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ:

In[**8**] **:=** $\mathbf{59^{50}}$

Out[**8**] **=3488193609475279505101723465884297484478538062136**
391444045413957494335048576178788280700 1.

b) Scriem N[59^{50},20] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ:

In[**9**] **:= N**[$\mathbf{59^{50}}$**,20**]

Out[**9**] **=** $\mathbf{3.488193609\times10^{88}}$.

c) Scriem 59^{50}//N кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ:

In[10] **:=** $\mathbf{59^{50}}$**//N**
Out[10] **=** $\mathbf{3.48819\times10^{88}}$**.**$\Delta$

Exerciţii pentru lucrul individual

E.2.1. 1) SŁ se construiascŁ o expresie care conŞne cele patru operaŞi aritmetice, ridicarea la putere, fracŞi кi paranteze. 2) SŁ se determine valoarea exactŁ a expresiei construite. 3) SŁ se determine o careva valoare aproximativŁ. 4) SŁ se determone o valoare aproximativŁ care conŞne 20 cifre semnificative.

E.2.2. SŁ se determine al *n*-lea numŁr prim, unde *n* este egal cu numŁrul variantei.

E.2.3. Fiind dat al *n*-lea numŁr prim (exerciŞul E.2.1), se cere : 1) sŁ se determine o careva valoare aproximativŁ a rŁdŁcinii pŁtrate din acest numŁr; 2) sŁ se determine valoarea aproximativŁ care conŞne 20 cifre semnificative a rŁdŁcinii pŁtrate din acest numŁr.

E.2.4. Se dŁ expresia $(10+n)^{30}$, unde *n* este numŁrul variantei. Se cere : 1) sŁ se determine valoarea exactŁ a acestei expresii ; 2) sŁ se determine o careva valoare aproximativŁ ; 3) sŁ se determine o valoare aproximativŁ care conŞne 20 cifre semnificative.

1.2.3. Algebra elementară

DŁm câteva exemple de funcŞi care pot fi aplicate la rezolvarea exerciŞilor din algebra elementarŁ.

Solve[**lhs==rhs,x**] – rezolvŁ în raport cu variabila *x* ecuaŞa lhs = rhs;

NSolve[**lhs==rhs,x**] – rezolvŁ numeric ecuaŞa lhs = rhs în raport cu variabila *x*;

Solve[**{**$\mathbf{lhs_1==rhs_1,lhs_2==rhs_2}$**,…},{x,y,…}**] – rezolvŁ în raport cu variabilele *x*, *y*,é sistemul* de ecuaŞi $lhs_1=rhs_1$, $lhs_2=rhs_2$,é ;

Reduce[inecuaţie,*x*] ï rezolvŁ inecuaŞa datŁ în raport cu variabila *x*;

Factor[**expresie**] – dezvoltŁ în produs de factori expresia datŁ;**

Simplify[**%**] – reduce la o formŁ mai simplŁ expresia obŞnutŁ în exerciкiul precedent;

Simplify[**expresie**] – reduce la o formŁ mai simplŁ expresia datŁ;

Factor[**polinom cu coeficienţi întregi**] – dezvoltŁ polinoame în produs de factori cu coeficienŞ întregi;

FactorList[**polinom**] – determinŁ factorii polinomului кi exponenŞi puterilor lor;

...

Exemplul 1. SŁ se rezolve ecuaŞa $x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 = 0$.

Rezolvare. Scriem Solve$[x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x]$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ:

In[**1**] **:= Solve**$[x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x]$

Out[**1**]**={{x→–2–2i},{x→-2+2i},{x→1},{x→4}}.**

S-au obŞnut partu soluŞi: $x_1 = -2-2i$, $x_2 = -2+2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.Δ

Exemplul 2. SŁ se resolve inecuaŞa $(x+5)^4 + (x-1)^4 \leq 626$.

Rezolvare. Scriem Reduce$[(x+5)^4 + (x-1)^4 <= 626, x]$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[2]:=Reduce$[(x+5)^4 + (x-1)^4 <= 626, x]$

Out[2]= $\mathbf{-4 \leq x \leq 0}$.Δ

Exemplul 3. SŁ se dezvolte în produs de factori cu coeficienŞi întregi exprexia $x^{10} - 1$.

Rezolvare. Scriem Factor[$x^{10} - 1$] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[3] := Factor[$x^{10} - 1$**]**

Out[3]=$\mathbf{(-1+x)(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)}$.Δ

Exemplul 4. SŁ se reducŁ la o formŁ mai simplŁ expresia obŞnutŁ în exerciŞul precedent.

Rezolvare. Scriem Simplify[%] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[4]:= Simplify[%]

Out[4]=$-1 + x^{10}$.Δ

Exemplul 5. SŁ se rezolve ecuaŞa $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: 1) exact; 2) numeric.

Rezolvare. 1) Scriem Solve$[x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[5]:= Solve$[x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]$

Out[5]={{x→–1},{x→–i},{x→i}}.

S-a obŞnut o rŁdŁcinŁ realŁ кi douŁ rŁdŁcini complexe conjugate.

2) Scriem NSolve$[x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[6]:= NSolve$[x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]$

Out[6]={{x→–1},{x→–7.1245×10^{-19}+1.i},{x→–7.1245×10^{-19}–1.i}.

ObservŁm cŁ am primit rezultate diferite, dar care diferŁ foarte puŞn unul de altul.∆

1.2.4. Exerciţii din algebra liniară

Matricele pot fi notate cu A, B, M, a, b, m, é кi ele nu trebuie notate cu C, D. O matrice se introduce în formŁ de listŁ, elementele cŁreia sunt liste care conŞn elementele liniilor matricei date. De exemplu matricea pŁtraticŁ de ordinul trei A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se introduce in document (fiкier) astfel. Aflându-ne în fereastra acestui document, scriem A:={{a_{11},a_{12},a_{13}},{a_{21},a_{22},a_{23}},{a_{31},a_{32},a_{33}}} кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[1]:=A:={{a_1,a_{12},a_{13}},{a_{21},a_{22},a_{23}},{a_{31},a_{32},a_{33}}}.

Astfel matricea A a fost introdusŁ кi cu ea pot fi effectuate operaŞile necesare. DacŁ vrem ca matricea A sŁ fie scrisŁ кi în forna obiкnuitŁ, atunci scriem **MatrixForm**[**A**] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

Out[1]//MatrixForm[A]=

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Printre funcŞile algebrei liniare sunt:

Det[**A**] – calculeazŁ determinantul matricei A кi se afiкeazŁ valoarea lui;

Dot[**A,B**] – calculeazŁ produsul matricelor A кi B кi se afiкeazŁ rezultatul în formŁ de listŁ;

Inverse[**A**] – calculeazŁ inversa matricei A кi o afiкeazŁ în formŁ de listŁ;

Transpose[**A**] – calculeazŁ transpusa matricei A кi o afiкeazŁ în dormŁ de listŁ ;

Eigenvalues[**A**] – calculeazŁ valorile proprii ale matricei A кi le afiкeazŁ în formŁ de listŁ;

Eigenvectors[**A**] – calculeazŁ vectorii proprii ai matricei A кi îi afiкeazŁ în formŁ de listŁ, elementele cŁreia sunt liste alcŁtuite din coordonatele vectorilor proprii;

Eigensystem[**A**] – calculeazŁ valorile proprii кi vectorii proprii ai matricei A кi îi afiкeazŁ în formŁ de listŁ primul element al cŁreia este lista valorilor proprii iar celelalte elemente sunt liste alcŁtuite din coordonatele vectorilor proprii;

é

Dacă vrem ca matricele sŁ fie afiкate în forma obiкnuitŁ, atunci în instrucŞuni* în afarŁ de funcŞa respectivŁ se introduce кi **MatrixForm**. ExemplificŁm acest caz.

MatrixForm[**A.B**] – afiкeazŁ produsul AB al matricelor A кi B în formŁ de matrice;

MatrixForm[**A+B**] – afiкeazŁ in formŁ de matrice suma A+B a matricelor A кi B;

MatrixForm[α***A**] – afiкeazŁ în formŁ de matrice produsul numŁrului α cu natricea A,

Transpoze[**A**]**//MatrixForm** – afiкeazŁ în formŁ de matrice transpusa matricei A,

Inverse[**A**]**//MatrixForm** – afiкeazŁ în formŁ de matrice inversa matricei A,

Exemplul 1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ кi numŁrul α, sŁ se determine: 1) A+B; 2) 3A; 3) AB; 4) detA; 5) A^{-1}; 6) A^{T}.

Rezolvare. Introducem matricele A кi B. Pentru aceasta scriem A:={{1,2 ,4 },{5,1 ,2 },{3,-1 ,1 }}, tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[1] :=A:={{1,2 ,4 },{5,1 ,2 },{3,-1 ,1 }}.

AsemŁnŁtor, scriem B:={{4,–1 ,2 },{2,5 ,–3 },{5,6 ,–2 }}, tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[2] :=B:={{4,–1 ,2 },{2,5 ,–3 },{5,6 ,–2 }}.

Astfel, matricele A кi B au fost introduce în document.

1) Pentru calculul sumei A+B scriem MatrixForm[A+B], tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[3] :=MatrixForm[A+B],

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 7 & 6 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

2) Pentru a calcula produsul 3A scriem MatrixForm[3*A], tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[4] :=MatrixForm[3*A],

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 15 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Pentru a calcula produsul AB scriem MatrixForm[A.B], tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[5] :=MatrixForm[A.B],

Out[**5**]**//MatrixForm=**

$$\begin{pmatrix} 28 & 31 & -12 \\ 32 & 2 & 3 \\ 15 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Pentru a calcula determinantul matricei A scriem Det[A], tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[**6**] **:=Det**[**A**]

Out[**6**]**=–27.**

5) Pentru a determina inversa matricei A scriem Inverse[A]//MatrixForm, tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[7] **:=Inverse**[**A**]**//MatrixForm**

Out[7]**=MatrixForm=**

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

6) Pentru a determina transpusa matricei A scriem Transpoze[A]//MatrixForm, tastŁm Shift+Enter кi se afiкeazŁ

In[**8**] **:=Transpoze**[**A**]**//MatrixForm**

Out[**8**]**=MatrixForm=**

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\Delta$$

Observaţie. Se кtie cŁ înmulŞrea numerelor se noteazŁ cu semnul *. DacŁ încercŁm sŁ notŁm inmulŞrea matricelor cu acelaкi semn, atunci nu obŞnem produsul matricelor dar obŞnem o matrice elementele cŁreia sunt produsele elementelor respective ale matricelor date. Deci sŁ fim atenŞ la notaŞi !

Într-adevŁr, dacŁ scriem MatrixForm[A*B] кi tastŁm Shift+Enter, atunci se afiкeazŁ

In[9] :=MatrixForm[A*B]

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 10 & 5 & -6 \\ 15 & -6 & -2 \end{pmatrix}.\Delta$$

Exemplul 2. Fiind datŁ matricea pŁtraticŁ de ordinul trei M= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, sŁ se determine: 1) valorile proprii, 2) vectorii proprii, 3) valorile proprii кi vectorii proprii.

Rezolvare. Introducem matricea M. Pentru aceasta scriem M**:**={{–1,3,–1},{–3,5,–1},{–3,3,1}} кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[10]:=M:={{-1,3,-1},{-3,5,-1},{-3,3,1}}.

Deci matricea M s-a introdus în document.

1) Pentru a determina valorile proprii scriem Eigenvalues[M] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[10]:=Eigenvalues[M]

Out[10]={2,2,1}.

2) Pentru a obŞne vectorii proprii scriem Eigenvectors[M] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[11]:=Eigenvectors[M]

Out[11]={{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.

3) Pentru a determina кi valorile proprii кi vectorii proprii scriem Eigensystem[M] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[12]:=Eigensystem[M]

Out[11]={{2,2,1},{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.Δ

Exemplul 3. SŁ se rezolve sistemul de ecuaŞi liniare

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7, \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = -1, \\ y_1 - y_2 \qquad\qquad = -1, \\ \qquad\qquad y_3 - y_4 = 2. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem Solve[{y_1+y_2+y_3+y_4==7, y_1+y_2–y_3–y_4==–1, y_1–y_2==–1, y_3–y_4==2}, {y_1,y_2,y_3,y_4}] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[13]:= Solve[**{y_1+y_2+y_3+y_4==7, y_1+y_2–y_3–y_4==–1, y_1–y_2==–1, y_3–y_4==2}, {y_1,y_2,y_3,y_4}**]

Out[13]={{y_1→1,y_2→2,y_3→3,y_4→1}}.∆

Exemplul 4. SŁ se rezolve sistemul de ecuaŞi liniare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem Solve[{2x_1+3x_2–x_3==8, 5x_1–2x_2+2x_3==6, x_1+4x_2–3x_3==9},{x_1,x_2,x_3}] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[13]:=Solve[**{2x_1+3x_2–x_3==8,5x_1–2x_2+2x_3==6,x_1+4x_2–3x_3==9},{x_1, x_2,x_3}**]

Out[13]={{x_1→2,x_2→1,x_3→–1}}.

S-a obŞnut soluŞa x_1=2, x_2=1,x_3=–1.∆

1.2.5. Calcul diferenţial si calcul integral al funcţiilor reale de o variabilă reală

În sistemul Mathematica funcŞile se noteazŁ asemŁnŁtor cu notaŞile obiкnuite, prima literŁ fiind majusculŁ. Argumentele funcŞilor sunt delimitate cu paranteze pŁtratice [кi]. Exemple:

Sin[**x**] este notaŞa expresiei sin$x$; **Cos**[**x**] – cos$x$; **Tan**[**x**] – tg$x$; **ArcSin**[**x**] – arcsin$x$; **Log**[**x**] – ln$x$; **Log**[**b,x**] – $\log_b x$; **Exp**[**x**] – e^x; **Sqrt**[**x**] – rŁdŁcina pŁtratŁ din x;

a) Calculul limitelor. Printre funcŞile care pot fi aplicate la rezolvarea exerciŞilor din acest punct sunt urmŁtoarele.

Limit[**f,x**–>**a**] **-** calculeazŁ limita funcŞei f(x) în punctul a;

Limit[**f,x**–>**Infinity**] **-** calculeazŁ limita funcŞei f(x) când x tinde la infinit;

Limit[**f,x**–>**a,Direction**→–**a**] **-** calculeazŁ limita la dreapta a funcŞei f(x) în punctul a;

Limit[**f,x**–>**a,Direction**→+**a**] **-** calculeazŁ limita la stânga a funcŞei f(x) în punctul a;

...

Exemplul 1. SŁ se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - e^{3x}}{\ln(1+4x)}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{(2x+1)/(x-1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$.

Rezolvare. a) Scriem Limit[$\dfrac{Cos[2*x]-E^{3*x}}{Log[1+4*x]}$,x→0] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[1]:=Limit[$\dfrac{Cos[2*x]-E^{3*x}}{Log[1+4*x]}$ **,x–>0]**

Out[1]= $-\dfrac{3}{4}$ **.**

b) Scriem Limit[$\left(\dfrac{x^2+2*x-1}{2*x^2-3*x-2}\right)^{(2*x+1)/(x-1)}$,x→Infinity] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[2]:=Limit[$\left(\dfrac{x^2+2*x-1}{2*x^2-3*x-2}\right)^{(2*x+1)/(x-1)}$ **,x→Infinity]**

Out[2]= $\dfrac{1}{4}$.

c) Scriem Limit[$\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→–1] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[3]:=Limit[$\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→–1]

Out[3]=0.

d) Scriem Limit[$\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→+1] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[4]:=Limit[$\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→+1,Direction→+1]

Out[4]=1.Δ

b) Construcţia liniilor şi a graficelor funcţiilor reale de o variabilă reală. Se aplicŁ funcŞile ce urmeazŁ.

Plot[**f,{x,a,b}**] – construieкte graficul funcŞei f(x), $a \le x \le b$;

Plot[**{f$_1$,f$_2$,...},{x,a,b}**] – construieкte pe acelaкi desen graficele funcŞilor $f_1(x)$, $f_1(x)$,... $a \le x \le b$;

ListPlot[{x$_1$,y$_1$},{x$_2$,y$_2$},…] ï construieкte punctele cu coordonatele carteziene $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,é ;

ParametricPlot[{f$_x$,f$_y$},{t,a,b}] ï conctruielte linia datŁ prin ecuaŞile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $a \le x \le b$;

ParametricPlot[{f$_x$,f$_y$},{g$_x$,g$_y$},{t,a,b}] ï conctruielte liniile date prin ecuaŞile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_z(t)$, $a \le x \le b$, кi $x=g_x(t)$, $y=g_y(t)$, $a \le x \le b$;

ParametricPlot3D[{f$_x$,f$_y$,f$_z$},{t,a,b}] ï conctruielte linia din spaŞul $\mathbf{R}^3$ datŁ prin ecuaŞile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $z=f_z(t)$, $a \le x \le b$;

...

Exemplul 2. SŁ se construiascŁ liniile date prin ecuaŞile:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x+3}$, $x\in[-1, 2]$; b) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$

$t\in[0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Scriem

Plot[$\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x + 3}$,

{x,–1, 2}]Plot[$\{2\,Cos^3 t, 2\,Sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}$]

кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[5]:=Plot[$\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x + 3}$**, {*x*,–1, 2}]**

Out[5]=desenul

b) Scriem Plot[$\{2\,Cos^3 t, 2\,Sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}$] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[6]:=Plot[$\{2\,Cos^3 t, 2\,Sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}$ **]**

Out[6]=desenulΔ

c) Calculul derivatei şi al diferenţialei. Se folosesc funcŞile:

D[**f,x**] – calculeazŁ derivata funcŞei f în raport cu variabila x ;

D[**f,{x,n}**] – calculeazŁ derivata de ordinul *n* a funcŞei f în raport cu variabila x ;

Dt[**f**] – calculeazŁ diferenŞala funcŞei f;

Exemplul 3. Se dŁ funcŞa $f(x) = arctg(\ln x) + \ln(arctgx)$. SŁ se calculeze: a) derivate *df* / *dx*; b) derivata de ordinul doi $d^2f/{}^{dx2}$; c) diferenŞala *df*.

Rezolvare. a) Scriem D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],x] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[7]:=D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],x]

Out[7]=$\dfrac{1}{(1 + x^2)\,ArcTan[x]} + \dfrac{1}{x(1 + Log[x]^2)}$.

În aceastŁ expresie $Log[x]^2$ înseamnŁ $Log^2 x$.

b) Scriem D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],{x,2}] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[8]:=D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],{x,2}]

Out[8]= $-\dfrac{1}{(1 + x^2)^2\,ArcTan[x]^2} - \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2\,ArcTan[x]} -$

$$\frac{2Log[x]}{x^2(1+Log[x]^2)^2}-\frac{1}{x^2(1+Log[x]^2)}.$$

c) Scriem Dt[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]]] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[9]:=Dt[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]]]

Out[9]= $\frac{Dt[x]}{(1+x^2)ArcTan[x]}+\frac{Dt[x]}{x(1+Log[x]^2)}$.

În expresia precedentŁ Dt[x] înseamnŁ dx.Δ

d) Calculul integralelor. Pot fi aplicate funcŞile ce urmeazŁ.

Integrate[**f,x**] – calculeazŁ primitiva (integrala nedefinitŁ) a fincŞei f(x) ;

Integrate[**f,{x,a,b}**] – calculeazŁ integrala definitŁ a fincŞei f(x) pe intervalul [a,b], a < b;

Integrate[**f,{x,a,Infinity}**] - calculeazŁ integrala definitŁ a fincŞei f(x) pe intervalul [a,∞);

NIntegrate[**f,{x,a,b}**] **-** calculeazŁ numeric integrala definitŁ a fincŞei f(x) pe intervalul [a,b];

é

Exemplul 4. SŁ se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1+x^2}}$, b) $\int\frac{x^5+4x^2+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1}dx$.

Rezolvare. a) Scriem Integrate[$\frac{1}{x^6\sqrt{1+x^2}},x$] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[10]:=Integrate[$\frac{1}{x^6\sqrt{1+x^2}},x$]

Out[10]= $\frac{\sqrt{1+x^2}(3-4x^2+6x^4)}{15x^5}$.

b) Scriem Integrate[$\frac{x^5+4x^4+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1},x$] кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

In[11]:=Integrate[$\dfrac{x^5+4x^4+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1}, x$]

Out[11]=

$$5x+4x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{5}{\sqrt{3}}ArcTan\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right]+3Log[-1+x]-\frac{3}{2}Log[1+x+x^2]$$

.

Exemplul 5. SŁ se calculeze valoarea exactŁ a integralei definite

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad .$$

Rezolvare. Scriem Integrate[$\sqrt{1-x^2}, \{x, 0, 1\}]$] ki tastŁm Shift+Enter. Se afikeazŁ

In[12]:=Integrate[$\sqrt{1-x^2}, \{x, 0, 1\}$]

Out[12]= $\dfrac{\pi}{4}$

Exemplul 6. SŁ se calculeze o valoare aproximativŁ a integralei definite $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$.

Rezolvare. Scriem NIntegrate[$\sqrt{1+x^3}, \{x, 0, 1\}]$] ki tastŁm Shift+Enter. Se afikeazŁ

In[13]:=NIntegrate[$\sqrt{1+x^3}, \{x, 0, 1\}$]

Out[13]=1.11145.Δ

Exemplul 7. SŁ se calculeze integralele improprii

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$; b) $\displaystyle\int_1^\infty \ln\frac{e^{1/x}+2}{3}dx$.

Rezolvare. a) Scriem Integrate[$\dfrac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, Infinity\}]$] ki tastŁm Shift+Enter. Se afikeazŁ

In[14]:=Integrate[$\dfrac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, Infinity\}]$]

Out[14]= $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

b) Scriem $\int_1^{\infty} \ln[\frac{e^{1/x} + 2}{3}]dx$ кi tastŁm Shift+Enter. Se afiкeazŁ

Integral of $Log[\frac{1}{3}(2 + e^{1/x})]$ does not converge on $\{1,\infty\}$.

Out[15]= $\int_1^{\infty} Log[\frac{1}{3}(2 + e^{1/x})]dx$.

Aceasta înseamnŁ cŁ integrala datŁ n-a fost calculatŁ.

1.3. Elemente de Analiza Combinatorie si Aplicatiile lor.

Analiza Combinatorie este o disciplina matematica care *studiaza metodele de numarare (sau de calcul) ale tuturor combinarilor ce pot pot fi alcatuite din elementele unei multimi finite în baza unor reguli prestabilite.* Or, aceasta disciplina are de a face numai cu ***multimi finite.***

Analiza combinatorie se bazeaza esential pe doua principii: ***Principiul adunarii si Principiul înmultirii***. Daca A si B sunt doua multimi finite atunci distingem doua situatii, dupa cum cele doua multimi pot fi disjuncte sau nu. Evident are loc :

Principiul adunarii (caz disjunct)

Daca A si B sunt multimi finite si disjuncte, adica $A \cap B = \emptyset$, card(A) = n si card(B) = m , atunci

$$card(A \cup B) = n + m \qquad (1)$$

Corolar. *Daca A_1, A_2, ... A_k sunt multimi finite disjuncte doua câte doua atunci*

[illegible]

Principiul adunarii (caz general)

Daca A si B sunt multimi finite A , B , card (A) = n, card (B) = m si card ($A \cap B$) = k, atunci

$$card\ (A \cup B) = n + m - k \quad (2)$$

Exercitiul 1. Folosind inductia matematica deduceti Principiul adunarii pentu un numar arbitrar *k* de multimi finite $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Exemplul 1. Consideram o grupa de studenti despre care stim c 20 de studenti cunosc limba engleza, 15 limba franceza, 10 limba germana, 5 limbile engleza ¸si franceza, 5 limbile franceza ¸si germana,4 limbile engleza si germana si 1 student limbile engleza, franceza si germana. Câ˜Hstuden˜Hsunt în grupa?

Solutie. Notând prin E, F ¸si G multimile de studenti care poseda, respectiv, limba engleza, franceza, germana si tinând cont de datele problemei, deducem:

$cardE = 20$, $cardF = 15$, $cardG = 10$, $card(E \cap F) = 5$,

$card(E \cap G) = 4$, $card(F \cap G) = 5$, $card(E \cap F \cap G) = 1$¸

si atunci

$card(E \cup F \cup G) = card(E) + card(F) + card(G)$ - $card(E \cap F)$ -

$card(E \cap G)$ - $card(F \cap G) + card(E \cap F \cap G) = 32$.

Principiul înmultirii în limbajul produsului cartezian

Daca A si B sunt doua multimi finite astfel încât card (A) = n si card (B) = m, atunci

$$card\ (A \times B) = n \cdot m\ . \quad (3)$$

Remarca. *Pentru orice numar k de multimi finite are loc formula:*

$$card(A_1 \times A_2 \times \ldots A_n) = \prod_{i=1}^{n} A_i. \quad (4)$$

Principiul înmultirii în limbajul produsului cartezian poate fi reformulat în limbajul actiunilor.

Principiul înmultirii în limbajul actiunilor

Daca o actiune poate fi realizata în k etape succesive astfel încât etapa i poate fi realizata în n_i modalitati, $i = \overline{1,k}$, atunci aceasta actiune poate fi realizata în $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ modalitati.

Exemplul 2. Presupunem ca un safeu poate fi deschis, cunoscând un cod de forma $i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6$, unde $i_k = 0,1,...,9,\ k = 1,2,...,6$. Cu ce este egal numarul total de coduri diferite ce pot fi alcatuite in acest mod?

Solutie. Multimea q a tuturor codurilor posibile coincide cu produsul cartezian a multimii {0, 1, 2,é , 9} de 6 ori cu ea însasi, adica q ={ $(i_1 ,i_2 ,i_3 ,i_4 ,i_5 ,i_6)$: $i_k=0,1,...,9,\ k=1,2,...,6$}. Aceasta are, conform Principiului înmultirii în limbajul produsului cartezian,10^6 elemente. Cu alte cuvinte numarul total de coduri diferite ce pot fi alcatuite in acest mod este egal cu 10^6.

Exemplul 3. Daca avem informatia suplimentara, ca acest cod din exemplul anterior este format din cifre diferite atunci numarul total al codurilor diferite descreste. Într-adevar, a forma un cod din 6 cifre diferite este echivalent cu a efectua o ac¸tiune în 6 etape succesive, astfel încât prima etapa poate fi realizata în 10 modalitati, cea de a doua în 9 modalitati,etc., ultima (a sasea) în 10 - (6- 1) = 5 modalitati. Conform Principiului înmultirii în limbajul actiunilor, numarul tuturor evenimentelor elementare este egal cu 10Ā9Ā8Ā7Ā6Ā5. Observam, ca, spre deosebire de exemplul anterior, aplicarea principiului inmul˝Hii in limbajul produsului cartezian devine defectuoasŁ.

Definitia 1. Fie *A* o multime formata din *n* elemente diferite, $A =\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci vom numi aranjament din *n* elemente luate câte *k* orice multime *ordonata* de forma

$$\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\right): i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Evident notiunea are sens pentru $k =1,2,...,n$. Multimea tuturor aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* se noteaza cu $\mathcal{A}_n^k$, adica

$$\mathcal{A}_n^k = \left\{(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}) \mid i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k,\ a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k}\right\}.$$

Cardinalul acestei multimi se noteaza cu □□ si este numarul tuturor aranjamentelor din *n* elemente luate cate *k*.

Conform principiului înmultirii în limbajul actiunilor, a construi *un aranjament din n elemente luate câte k* este echivalent cu a realiza o actiune în *k* etape succesive, astfel încât prima etapa poate fi realizata în *n* modalitati, cea de a doua în *n-1* modalitati, etc., ultima (etapa nr. k) în $n-(k-1) = n - k+1$ modalitati. Or, numarul tuturor aranjamentelor din n elemente luate câte k este egal cu

[illegible]$=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=n!/[(n-k)!k!]$ (5)

Prin definitie, atunci când $k=n$, aranjamentul se numeste *permutare de n elemente*. Deci multimea tutror permutarilor de n elemente notata prin P_n coincide cu [illegible], ceea ce înseamna ca numarul tutror permutarilor de elemente P_n este egal cu [illegible], adica

$$P_n = n!. \quad \mathbf{(6)}$$

Definitia 2. Orice submultime de forma

$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} : i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ se numeste *combinare din n elemente luate câte k*. Evident notiunea are sens pentru $k =$ [illegible]. Multimea tuturor combinarilor de n elemente luate câte k elemente este, asadar, multimea

$$\{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} : i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}.$$

Cardinalul acestei multimi îl vom nota cu [illegible].

Observam ca dintr-o combinare din n elemente luate câte k putem forma $k!$ aranjamente din n elemente luate câte k. Or, a forma un aranjament din n elemente luate câte k este echivalent cu a realiza o actiune în doua etape succesive:

1. alegem o combinare din n elemente luate câte k, etapa pentru care avem [illegible]modalitati de a o efectua;
2. din aceasta combinare, formam un aranjament din n elemente luate câte k, etapa care se poate realiza în [illegible] modalitati.

Rezulta ca [illegible] = k!Ā[illegible], adica

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\mathbf{(7)}$$

Exercitiul 2. Demonstrati ca daca A este o multime formata din n elemente diferite, atunci $card\{B : B \subseteq A\} = 2^n$.

Exemplul 4. Consideram ca avem o multime de n elemente astfel încât n_1 elemente sunt de tipul 1, n_2 elemente sunt de tipul 2, é , n_k elemente sunt de tipul k, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Alegem la întâmplare, unul câte unul, toate elementele multimii si le aranjam în ordinea extragerii lor. Sa se calculeze cardinalul numarului total de rezultate posibile in acest experiment.

Solutie. Notam prin q multimea tuturor rezultatelor posibile in acest experiment. Pentru a alcatui un rezultat posibil, corespunzator acestui experiment, este suficient sa realizam o actiune în k etape succesive.

Etapa 1: din n locuri disponibile pentru a aranja elementele extrase, alegem n_1 locuri pe care vom plasa elementele de tipul 1. Aceasta actiune o putem realiza în $C_n^{n_1}$ modalitati;

Etapa 2: din cele $n-n_1$ locuri, disponibile dupa etapa 1 , alegem n_2 locuri pe care vom plasa elementele de tipul 2. Aceasta actiune o putem realiza în $C_{n-n_1}^{n_2}$ modalitati, etc.,

Etapa k: din cele $n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1} = n_k$ locuri, disponibile dupa etapa k, alegem n_k locuri pe care vom plasa elementele de tipul k. Aceasta actiune o putem realiza în $C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k} = C_{n_k}^{n_k}$ modalitati.

Conform principiului înmultirii, avem :

$$card(\Omega) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot ... \cdot C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Formula obtinuta este, de fapt, formula de calcul pentru $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, numarul permutarilor a n elemente, din care n_1 elemente sunt de tipul *1*, n_2 elemente sunt de tipul *2*, é , n_k elemente sunt de tipul k, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \quad (7)$$

Ultima mai poarta denumirea de *formula permutarilor cu repetare*.

Exemplul 7. Presupunem ca avem la dispozitie 10 cartonase marcate cu litere astfel: *M, M, A, A, A, T, T, I, E, C*. Un copil se joaca, extragând la întâmplare câte un cartonas si aranjându-l în ordinea extragerii. Câte cuvinte diferite sunt posibile in acest caz?

Întrucât consideram cartonasele marcate la fel ca fiind de acelasi tip, rezulta ca avem *2* cartonase de tip *M*, *3* cartonase de tip *A*, 2 cartonase de tip *T*, *1* carton¸s de tip *I*, *1* cartonas de tip *E* ¸si *1* cartonas de tip *C*. Notam prin multimea tuturor rezultatelor posibile in acest experiment.

Atunci, folosind formula dedusa mai sus, tinand cont ca rezultatul aranjarii cartonaselor in ordinea extragerii lor defineste un cuvant, obtinem ca numarul cuvintelor diferite ce pot fi obtinute, astfel, se calculeaza dupa formula:

$$card(\Omega) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 302400.$$

Exemplul 8. Presupunem ca dispunem de n cutii si r bile identice. Plasam bilele, una câte una, la întâmplare, în una din cutii. Sa se calculeze cardinalul multimii tuturor rezultatelor posibile in acest experiment.

Solutie. În cele ce urmeaza vom reprezenta n cutii prin intermediul a $n+1$ bare verticale, iar r bile prin intermediul a r asteriscuri. De exemplu, situatia când *5* bile identice, fiind plasate in *3* cutii astfel încât in prima cutie nimeresc *0* bile, in cutia a doua *2* bile si în cutia a treia *3* bile poate fi reprezentata astfel: ||**|***|, iar situatia când toate bilele nimeresc in prima cutie poate fi reprezentata astfel: |*****|||. Or, pentru o astfel de reprezentare schematica avem nevoie de $n+1$ locuri pentru bare (peretii cutiilor) si r locuri pentru asteriscuri (bile). Din exemplele aduse vedem ca orice repartizare concreta a *r* bile identice în *n* cutii este univoc determinata de pozitia a *n - 1* bare (pereti) interioriare si a *r* asteriscuri (bile) pe cele *r + n - 1* locuri interioare, cele doua bare (pereti) exterioare ramânând de fiecare data fixe. Drept consecinta alegerea a *n – 1* locuri pentru bare (sau *r* locuri pentru asteriscuri) din totalul de *n + r – 1* locuri, poate . facuta în $C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$ modalitati, C_{n+r-1}^{n-1} fiind cunoscut ca *numarul combinarilor din n elemente luate câte r cu repetare.*

2. Calculul probabilităţilor

2.1. Observatii privind calculul probabilităţilor și definiția axiomatică a probabilității.

DacŁ rezolvarea unei probleme de calcul al probabilitŁŞi se reduce la aplicaŞa unei formule de calcul, atunci rŁmâne sŁ introducem în aceastŁ formulŁ datele numerice ale problemei кi parametrii necesari. Astfel se obŞne o expresie numericŁ a cŁrei valoare numericŁ trebuie calculatŁ. Din cele expuse anterior rezultŁ cŁ Sistemul de programe Mathematica permite: calculul valorii exacte, calculul unei valori aproximative cu кapte cifre semnificative кi calculul unei valori aproximative cu un numŁr dorit de cifre semnificative.

Observaţie. Cunoaкtem deja ca in Sistemul Mathematica , dupŁ scrierea instrucŞunii, se tasteaza Shift+Enter pentru ca instrucŞunea sa fie executatŁ. De aceea în textul rezolvŁrilor problemelor ce urmeazŁ se conŞne numai instrucŞunea respectivŁ кi rezultatul executŁrii ei: Input, Output precum кi unele comentarii (dacŁ ele sunt necesare).

Unele calcule din exerciŞile ce urmeazŁ pot fi efectuate cu ajutorul unui microcalculator, sau chiar Ăîn minteò. Prin intermediul unor atare exerciŞi se ilustreaz *nu atât necesitatea* utilizŁrii Sistemului Mathematica, cât *posibilitatea* utilizŁrii lui.

Variante de exerciŞi pentru lucru individual pot fi gŁsite în lista de exerciŞi propuse pentru rezolvare de la sfârкitul paragrafului.

La rezolvarea exerciŞilor ce urmeazŁ vor fi folosite unele funcŞi din cele enunŞate anterior, dar кi unele din funcŞile:

Collect[expr,x] ï reduce termenii asemenea din expresia expr κi îi arangeazŁ dupŁ puterile lui x;
Sum[f[i],{i,i_{min},i_{max}}] ï calculeazŁ suma valorilor funcŞei f pentru i de la i_{min} pânŁ la i_{max} cu pasul +1;
NSum[f[i],{i,i_{min},i_{max}}] ï calculeazŁ o valoare a sumei valorilor funcŞei f pentru i de la i_{min} pânŁ la i_{max} cu pasul +1;
Product[f[i],{i,i_{min},i_{mox}}] - calculeazŁ produsul valorilor funcŞei f pentru i de la i_{min} pânŁ la i_{max} cu pasul +1;
NProduct[f[i],{i,i_{min},i_{mox}}] ï calculeazŁ o valoare a produsului valorilor funcŞei f pentru i de la i_{min} pânŁ la i_{max} cu pasul +1.

Drept punct de plecare în calculul probabilitŁ"Ħlor serve'Ħte defini"Ħa axiomaticŁ a probabilitŁ"Ħi, care întrege'Ħte modelarea matematicŁ a experimentelor aleatoare ce poseda Proprietatea RegularitŁ"Ħi statistice. AceastŁ modelare presupune identificarea urmatoarelor elemente (obiecte) matematice cu ajutorul carora sŁ descriem:

a) multimea de rezultate posibile intr-un experiment aleator $\mathcal{E}$;

b) multimea (familia) $\mathcal{F}$ a tuturor evenimentelor aleatoare asociate experimentului $\mathcal{E}$;

c) probabilitatea (regula) ***P***, conform cŁreia fiecŁrui eveniment aleator *A*, asociat experimentului $\mathcal{E}$ i se pune în corespunden"Ħa probabilitatea acestuia ***P****(A)*.

RŁspuns la p. ***a)*** ni-l da

Definiția 1. Vom numi ***spatiu de evenimente elementare*** orice multime nevidŁ Ω, elementele careia corespund rezultatelor posibile într-un experiment aleator $\mathcal{E}$. Elementele ɣ din Ω se numesc ***evenimente elementare***.

DŁm câteva exemple de spatii de evenimente elementare.

1. ConsiderŁm, în calitate de experiment aleator $\mathcal{E}$, aruncarea unei monede o singurŁ datŁ. Atunci spatiul corespunzŁtor de evenimente elementare $\Omega=\{S, B\}=\{0, 1\}=\{\omega_1, \omega_2\}$, unde prin *S, 0* sau ω_1 am notat evenimentul elementar ce constŁ în apari"Ħa Stemei, iar prin *B, 1* sau ω_2 am notat aparitia Banului.

2. Considerăm aruncarea unei monede de două ori succesiv. Atunci $\Omega=\{SS,SB,BS, BB\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, pastrand acelaşi tip de notare.

3. Experimentului aleator $\mathscr{E}$, ce constă în aruncarea unui zar o singura data, îi corespunde spaţiul de evenimente elementare $\Omega=\{1, 2,\dots,6\}=\{\omega_1, \omega_2,\dots, \omega_6\}$, unde i sau ω_i reprezinta numarul de puncte apărute, $i= 1, 2,\dots,6$.

4. Iar acum considerăm, în calitate de experiment aleator $\mathscr{E}$, aruncarea unei monede pâna la prima aparitie a Stemei. Atunci $\Omega=\{S,BS, BBS,\dots\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,\dots, \omega_n, \dots\}$, unde ω_n, de exemplu, corespunde rezultatului posibil (elementar) ce semnifică faptul că experimentul s-a terminat la aruncarea numărul n cu aparitia Stemei precedată de aparitia Banului de $n-1$ ori.

5. Considerăm experimentul aleator ce constă in masurarea staturii unui student luat la întâmplare de la Universitatea Tehnică din Moldova. Notăm prin ω înălţimea acestuia. Atunci $\Omega=\{\omega: \omega>0\}$.

Observaţie. Vom spune că exemplele de tipul 1-5 se referă la ***cazul discret*** deoarece spaţiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezinta o *multime finita* (vezi exemplele 1-3) sau o *multime infinita, cel mult, numărabilă* (în exemplul 4), iar exemplele de tipul 5 se referă la *cazul continuu* deoarece spaţiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezinta o *multime infinită nenumărabilă*.

Răspunsul la p. *b)* îl aflăm din

Definiţia 2. Fie Ω un spaţiu de evenimente elementare, atunci vom numi ***eveniment aleator*** orice element A din familia $\mathscr{F}$ **=**$\{A$**:** A este submulţime a lui $\Omega\}$ ce verifică următoarele 2 axiome:

1^0. Daca A este eveniment aleator, *adica A este element a lui* $\mathscr{F}$ atunci si complementara acestuia, $\bar{A}=\{$ *ω din* Ω : *ω nu apartine lui* $A\}$ este eveniment aleator;

2^0. Daca $A_1, A_2, \dots, A_n,\dots$ sunt evenimente aleatoare, atunci si reuniunea (suma) acestor submulţimi este eveniment aleator.

Familia $\mathscr{F}$ sau perechea $(\Omega, \mathscr{F})$ se mai numeşte *câmp de evenimente aleatoare*.

Observaţie. *Dacă* Ω *este o multime de tip discret*, atunci axiomele

1^{0}- 2^{0} ale câmpului de evenimente aleatoare se verifica automat, cu alte cuvinte , *în acest caz,* din oficiu, *orice submultime A din spațiul de evenimente elementare Ω este eveniment aleator.* DacŁ evenimentul elementar *ω din* Ω apar˝Ħine si evenimentului A, atunci spunem ca *ω favorizează evenimentul* A.

Mai mult, deoarece evenimentele aleatoare reprezintŁ submul˝Ħimi ale lui Ω, rezulta ca asupra lor pot fi aplicate toate opera˝Ħiile asupra multimilor. Astfel, reuniunea a doua evenimente aleatoare se numeste ***sumă***, intersectia lor se numeste ***produs*** iar complementara $\bar{A}$={ *ω din* Ω : *ω nu apartine lui A*} a unui eveniment aleator *A* se nume’Ħte eveniment *non-A* sau *opusul* sau *negarea evenimentului A*. Evenimentul Ω se numeste eveniment ***sigur***, iar evenimentul ce corespunde multimii vide Ø se nume’Ħte *eveniment imposibil.* DacŁ produsul (intersec˝Ħia) a doua evenimente *A* ’Ħi *B* este un eveniment imposibil, atunci se spune cŁ *evenimentele A și B sunt incompatibile (disjuncte).* Daca evenimentul *A* se contine (ca mul˝Ħime) în *B,* atunci spunem ca *evenimentul A implica evenimentul B.* Daca, concomitent cu aceasta, are loc si rela˝Ħia inversa, atunci *A=B* ’Ħi spunem ca evenimentele *A și B* sunt echivalente.

Evident, operatiile asupra evenimentelor aleatoare posedŁ acelea’Ħi proprietŁti ca ’Ħi oper˝Ħiile asupra mul˝Ħimilor. In particular, sunt valabile

Formulele de dualitate ale lui de Morgan*:*

1) *Complementara* ***sumei*** *a doua evenimente A si B coincide cu* ***produsul*** *complementarelor acestor evenimente;*
2) *Complementara* ***produsului*** *a doua evenimente A si B coincide cu* ***suma*** *complementarelor acestor evenimente.*

Putem, însfâr’Ħit, rŁspunde la p. *c)* prin

Definitia 3 (*Definiția axiomatica a probabilitatii*). Vom numi *probabilitate definită pe campul de eveneminte aleatoare* (Ω, $\mathfrak{F}$) orice aplica˝Ħie ***P***: $\mathfrak{F}\rightarrow$**R** care verificŁ urmŁtoarele axiome

A1. $\boldsymbol{P}(A)\geq 0$ pentru orice eveniment *A* din $\mathfrak{F}$;

A2. $\boldsymbol{P}(\Omega)=1$;

A3. $\boldsymbol{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots)=\boldsymbol{P}(A_1)+\boldsymbol{P}(A_2)+\ldots+\boldsymbol{P}(A_n)+\ldots$ pentru orice ’Ħir de evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ din $\mathfrak{F}$, disjuncte douŁ cate douŁ, aici

„+” semnificand operatia de reuniune a multimilor, atunci cand acestea sunt disjuncte, doua cate doua.

Pentru orice eveniment aleator *A,* numărul ***P****(A)* se numește *probabilitatea evenimentului A* . Tripletul (Ω,ℱ, ***P***) se numește *câmp de probabilitate.*

Din aceasta definiție deducem următoarea

Teoremă *(Proprietățile probabilității)* . *Orice probabilitate* ***P*** *definită pe campul de eveneminte aleatoare* (Ω, ℱ) *posedă următoarele proprietăți:*

a) 0≤ ***P****(A)≤ 1 pentru orice eveniment A din* ℱ;

b) ***P****(Ā) =1-****P****(A) (* ***P****(A)=1-****P****(Ā))* *(1)*

pentru orice eveniment A din ℱ;

c) *Probabilitatea evenimentului imposibil este egala cu zero;*

d) ***(Formula adunării probabilităţilor).*** *Dacă* A_1 , A_2 ,..., A_n *sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp* ℱ, *atunci*

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \qquad (2)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

e) Dacă A și B sunt evenimentele din ℱ *și A implică B,* adică $A \subseteq B$ *, atunci* ***P****(A)≤* ***P****(B).*

2.2. Calculul probabilităţilor clasice

Pentru inceput vom formula definiția clasică a probabilității in varianta ei modernă.

Definiţia clasică a probabilităţii. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate clasica P*** dacă

a) Spațiul de evenimente elementare Ω conține un număr finit de evenimente elementare;

b) Familia de evenimente aleatoare ℱ este reprezentata de toate submultimile posibile ale lui Ω;

c) P este o aplicatie definita pe $\mathscr{F}$ cu valori in multimea numerelor reale calculate conform formulei

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}, \tag{3}$$

unde *card A* înseamnŁ numŁrul de elemente ale submulŞimii respective *A* din Ω. ***P(A)***, reprezentand un numar, se numeste ***probabilitatea evenimentului*** *A,* iar tripletul (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate clasica***.

Se observŁ ca probabilitatea clasica este un caz particular a probabilitŁ˝Ħ definite axiomatic. In plus, observam ca din aceasta definitie rezulta ca toate evenimentele elementare sunt echiprobabile si egale cu *1/card*Ω. Or, semnele dupa care aflŁm dacŁ putem aplica definitia clasicŁ sunt cele care atesta echiprobabilitatea evenimentelor elementare, cum ar fi sintagmele Ăextragere la intamplareò, Ămoneda perfectaò sau Ăsimetricaò, zar Ăperfectò sau Ăsimetricò, etc.

Exemplul 1. SŁ se calculeze probabilitatea cŁ la aruncarea unui zar *perfect*, de douŁ ori succesiv, suma numerelor de puncte apŁrute va fi egalŁ cu 5 (evenimentul aleator *A*).

Rezolvare. SpaŞul de evenimente elementare $\Omega = \{(i, j): 1 \le i, j \le 6\}$. Favorabile evenimentului *A* sunt evenimentele elementare $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$. Cum *card A* = 4 кi *card* Ω = 36, avem

In[1]:=N[4/36]

Out[1]=0,111111.

Exemplul 2. O urnŁ conŞine 60 de bile albe кi 40 de bile negre. 1) SŁ se calculeze probabilitatea cŁ o bilŁ extrasŁ la întâmplare va fi albŁ (evenimentul *A*). 2) SŁ se calculeze probabilitatea cŁ douŁsprezece bile extrase fŁrŁ întoarcere vor fi albe (evenimentul *B*).

Rezolvare. 1) Printre cele 100 de bile din urnŁ 60 sunt albe. Deci card Ω = 100 кi card *A* = 60. Prin urmare valoarea exactŁ ***P***(*A*) = 60/100 = 0,6.

2) Deoarece 12 bile din 100 pot fi extrase în C_{100}^{12} moduri, iar 12 bile din cele 60 existente pot fi extrase în C_{60}^{12} moduri, conform

definiŞei clasice a probabilitĽŞi ĸi formula de calcul al numĽrului de combinĽri din n elemente luate câte m:

$$C_n^m = \frac{n!}{(m!)((n-m)!)} \qquad (4)$$

avem:

In[**2**]**:=N**[$\frac{60\,!}{(12\,!)*(48\,!)} \,/\, \frac{100\,!}{(12\,!)*(88\,!)}$]

Out[**2**]**]=0.00133219**

Am obŞnut rezultatul ***P****(B)*=0,00133219

2.3. **Probabilitate discretă**

Aria de aplicabilitate a probabilitatii clasice este, cum o arata si urmatoarele exemple, limitata.

Exemplul 1. ConsiderĽm aruncarea o singura data a unui zar, a cĽrui centru de greutate este deplasat astfel incat probabilitatile apari˝Ħei fe˝Ħlor 1,2,3,4,5,6 se raporteaza ca 1:2:3:4:5:6. Sa se afle probabilitatea apariŞei unui numĽ par de puncte.

Din acest exemplu se vede ca formula probabilitĽŞi clasice este inaplicabilĽ deoarece **rezultatele posibile nu sunt echiprobabile**, chiar daca multimea lor (spatiul de evenimente elementare) este finita.

Un alt motiv pentru care formula probabilitĽŞi clasice poate fi imposibil de aplicat este faptul ca multimea de rezultate posibile intr-un experiment este infinita, fie si numerabilĽ (cazul discret).

Exemplul 2. ConsiderĽm experimentul aleator ce consta in aruncarea unei monede Ăperfecteò pana la inregistrarea prima data a ĂStemeiò. Ne intereseaza, de exemplu, probabilitatea ca experimentul se va termina in urma a cel mult zece aruncari. Exemplul 4 din p.2.1. aratĽ ca acestui experiment ii corespunde un spatiu de evenimente elementare infinita, numarabila ca multime, ceea ce face imposibila aplicatia formulei probabilitĽ˝Ħ clasice.

In scopul posibilitĿ˜Ħ abordĿrii cazurilor mentionate in exemplele 1-2, se folosekte no˜ħnea de probabilitate discretĿ sau de camp de probabilitate discretĿ.

Definiţia probabilităţii discrete. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate discretă P*** dacĿ

a) SpaŞul de evenimente elementare Ω reprezinta o multime finita sau infinita, cel mult, numerabila, adica $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n, ...\}$;

b) Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentata de toate submultimile posibile ale lui Ω;

c) P este o aplicatie definita pe $\mathscr{F}$ cu valori in multimea numerelor reale calculate conform formulei:

P*(A)=suma probabilitatilor pentru fiecare eveniment elementar ce favorizeaza evenimentul A=* $\sum_{\omega_i:\omega_i\in A} P\{\omega_i\}$, unde ***P*** verifica urmatoarele 2 axiome:

A1. ***P***{ɤ i }Ó0, pentru orice *i*Ó1;

A2. ***P****(*q*)=* $\sum_{\omega_i:\omega_i\in\Omega} P\{\omega_i\}$ =1,

P*(A)*, reprezent˜And un numar, se numeste ***probabilitatea evenimentului*** *A,* iar tripletul (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate discretă***.

Exemplul 1 *(continuare).* Observam ca in acest exemplu sunt intrunite toate conditiile aplicabilitatii definitiei probabilitatii discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_6\}$={1.2,é ,6}, adica *spatiul de evenimente elementare este o multime finita;*
2. Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentata de toate submultimile posibile ale lui Ω, iar in ea regĿsim ki evenimentul nostru *A*={*va apare un numar par de puncte}={2,4,6}*.
3. Tinand cont de cum se raporteaza probabilitatile ***P***{*i*}, deducem ca ***P***{*i*}=*i*/21. *i=1,2,...,6,* ceea ce insemna ca sunt verificate axiomele *A1* si *A2* de mai sus.

In concluzie ***P****(A)=2/21+4/21+6/21=12/21*. Or, spre deosebire de cazul clasic (zarul nefind Ăperfectò) ***P****(A)=12/21>1/2*.

Exemplul 2 *(continuare)*. Observam ca si in acest exemplu sunt intrunite toate conditiile aplicabilitatii definitiei probabilitatii discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots\}=\{S, BS, BBS, BBBS, \ldots\}$, adica spatial de *evenimente elementare este o multime infinita numarabila;*
2. Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentata de toate submultimile posibile ale lui Ω, iar in ea regasim si evenimentul nostru *A={experimentul se va termina in urma a cel mult 10 aruncari}*$=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{10}\}=$ $=\{S, BS, BBS, BBBS, \ldots, BBBBBBBBBS\}$.
3. Deoarece experimentul vizeaza aruncarea unei monede Ăperfecteò putem afirma ca $\boldsymbol{P}\{\omega_i\}=1/2^i$, pentru orice $i=1,2,\ldots,n,\ldots$. Intr-adevar evenimentul elementar ω_i reprezinta unul din cele 2^i evenimente elementare in experimentul cu aruncarea unei monede Ăperfecteò de *i* ori. Cum acestea sunt echiprobabile, rezultŁ cŁ кi ω_i are aceeasi probabilitate $1/2^i$. Or, axioma *A1* este valabilŁ. Este valabila si axioma *A2* , deoarece $1/2+1/2^2+1/2^3+\ldots=(1/2)/(1-1/2)=1.$

In concluzie,

$$\boldsymbol{P}(A)= 1/2+1/2^2+\ldots+1/2^{10}= (1/2)[1-(1/2)^{10}]/(1-1/2)=1-(1/2)^{10}.$$

2.4. Probabilitate geometrică.

În practica se întÂnesc situaŞi cÂnd modelul probabilist al experimentului aleator are de a face cu evenimente elementare echiprobabile, dar pentru care spatiul de evenimente elementare este o multime infinita nenumarabila (caz continuu). Drept exemplu putem lua urmatorul experimentul imaginar, care in orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) poate fi reprodus, folosind generatorul de numere (pseudo)aleatoare realizat de functia RANDOM .

Exemplu ***(aruncarea unui punct la intamplare pe segmentul [0,1]).***

Consideram experimentul aleatoriu ce consta in aruncarea la intamplare a unui punct pe segmentul [0,1]. Data fiind sintagma Ăla intamplare ò, rezultatele posibile ɤ in acest experiment, fiind numere reale din [0,1], sunt echiprobabile, dar definitia clasica este inaplicabila, deoarece spatiul de evenimente elementare ɋ =[0,1] este o multime infinita nenumarabila. Pentru astfel de cazuri putem apela la

Definiția probablitaţii geometrice. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate geometrică P*** dacŁ

a) SpaŞul de evenimente elementare Ω reprezintŁ o multime infinitŁ nenumŁrabilŁ din $\mathbf{R}^n$ pentru care $mes\Omega < +\infty$, unde *mes* reprezinta *lungimea* in $\mathbf{R}^1$, *aria* in $\mathbf{R}^2$ sa *volumul* in $\mathbf{R}^n$ pentru nÓ3;

b) Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentata de toate submultimile masurabile *A* ale lui Ω, adica pentru care *mesA* poate fi definitŁ;

c) P este o aplicatie definita pe $\mathscr{F}$ cu valori in multimea numerelor reale calculate conform formulei:

$$\boldsymbol{P}(A)=mesA \,/\, mes\Omega.$$

Astfel, in exemplul invocat, aplicÂnd definitia probabilitatii geometrice aflam ca probabilitatea ca un punct aruncat la intamplare pe [0,1] va nimeri in punctul *x* este egala cu $\boldsymbol{P}\{x\}=mes\{x\}/mes([0,1])=0/1=0$, pentru orice x din [0,1]. Daca ne intereseaza, de exemplu, probabilitatea ca un punct aruncat la intamplare pe [0,1] va nimeri in prima jumŁtate a acestui interval este egala cu $\boldsymbol{P}([0,0.5])= mes([0,0.5]) \,/\, mes([0,1])=0.5/1=0.5$. Dealtfel, observam ca $\boldsymbol{P}([0,0.5]= \boldsymbol{P}([0,0.5))= \boldsymbol{P}([0.5,1])$. In genere, probabilitatea ca un punct aruncat la intamplare pe [0,1] va nimeri intr-un interval (a,b) din [0,1] coincide cu lungimea acestui interval.

2.5. Probabilităţi condiţionate. Formula înmulţirii probabilităţilor. Independenţa evenimentelor aleatoare.

Fie *A* ĸi *B* doua evenimente aleatoare legate de acelaĸi câmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$, unde P(B)>0. Atunci putem da

Definiţia 1. Se numeкte ***probabilitate a evenimentului*** *A* ***condiţionată de evenimentul B*** mŁrimea notatŁ cu ***P****(A/B)* кi calculatŁ dupŁ formula

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{5}$$

Din (5) rezultŁ *formula înmulţirii probabilităţilor pentru două evenimente aleatoare:*

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A) . \tag{6}$$

Are loc urmatoarea

Teoremă (*Formula înmulţirii probabilităţilor în caz general*).

Dacă (Ω, F, P) *este un câmp de probabilitate si* $A_1, A_2, ..., A_n$ *sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp cu proprietatea*

$$P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1})>0,$$

atunci

$$P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)= \tag{7}$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)...P(A_n|A_1\cap ...\cap A_{n-1})$$

Definiţia 2.Vom spune cŁ *doua evenimente aleatoare A şi B,* legate de acelaкi câmp de probabilitate (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***), *sunt independente* dacŁ

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Definiţia 3.Vom spune ca *evenimentele aleatoare* $A_1, A_2, ..., A_n$, legate de acelaкi câmp de probabilitate (Ω, ***F***, ***P***), *sunt independente două câte două* daca $P(A_i\cap A_j)= P(A_i)P(A_j)$ pentru orice *i* diferit de *j, i,j=1,2,...,n.*

Definiţia 4. Vom spune ca *evenimentele aleatoare* $A_1, A_2, ..., A_n$, legate de acelaкi câmp de probabilitate (Ω, ***F***, ***P***), *sunt independente (in totalitate)* daca

$$P(Ai_1\cap Ai_2\cap ...\cap Ai_k)= P(Ai_1)P(Ai_2)...P(Ai_k)$$

pentru orice set de indici diferiţi $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ *din multimea de indici* $\{1,2,...,n\}$, $k=2,3,...,n$.

Observatia 1. ***Din definitiile respective, deducem ca, independenta (in totalitate) atrage după sine şi independența a două***

cate două evenimente. Afirmația inversă, insă, nu are loc. Drept (contra)exemplu putem lua experimentul aleator ce constŁ in aruncarea unui tetraedru Ăperfectò, cu cele 4 fete vopsite astfel: fata 1 vopsita in albastru, fata 2-in galben, fata 3-in rosu si fata 4-in albastru, galben si rosu. Se verifica cu usurinta ca evenimentele *A={va apare culoarea albastra}, G={va apare culoarea galbena}, R={va apare culoarea rosie}* sunt independente 2 cate 2, dar nu si in totalitate.

Observația 2. În cazul când evenimentele aleatoare A_1, A_2, ..., A_n sunt independente, atunci formula înmulŞrii probabilitŁŞlor are forma

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n)\,. \qquad (8)$$

Propoziţie (*Formula lui Poisson*). *Daca evenimentele A_k , sunt independente (in totalitate) si probabilitatile* $\mathbf{P}(A_k)= p_k$ *, k=1,2,...,n sunt cunoscute, atunci probabilitatea*

$\mathbf{P}\{$*se va produce cel puţin unul din evenimentele* A_k *, k=1,2,...,n*$\}=$
$=1-[(1-\mathbf{P}(A_1))(1-\mathbf{P}(A_2))...\ (1-\mathbf{P}(A_n)]=1-[(1-p_1)(1-p_2)_{...}(1-p_n)].$

Exemplul 3. Un aparat constŁ din trei elemente care în timpul funcŞonŁrii lui se pot deteriora, independent unul de altul. NotŁm prin A_i = {*elementul i se va deteriora*}, i = 1, 2, 3. SŁ se calculeze probabilitatea evenimentului A = *{se va deteriora un singur element}*, B = *{se va deteriora , cel puțin, un element}* dacŁ se кtiu probabilitŁŞle: $p_1 = P(A_1) = 0{,}13$, $p_2 = P(A_2) = 0{,}06$, $p_3 = P(A_3) = 0{,}12$.

Rezolvare. Vom exprima evenimentul aleator A prin intermediul evenimentelor A_1, A_2 кi A_3. Evenimentul A se va produce, atunci si numai atunci cand, se va deteriora primul element iar al doilea ï nu **şi** al treilea ï nu, **sau** se va deteriora al doilea element, iar primul - nu **şi** al treilea ï nu, **sau** se va deteriora al treilea element, iar primul ï nu **şi** al doilea ï nu. Prin urmare, conform definiŞilor operaŞior asupra evenimentelor aleatoare, avem:

$$A = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)\,.$$

CalculŁm probabilitatea evenimentului A folosind succesiv: formula de adunare a probabilitŁŞlor pentru evenimente incompatibile (disjuncte) doua câte douŁ, formula de înmulŞre a probabilitŁŞlor evenimentelor independente (in totalitate) кi formula de calcul al probabilitŁŞi evenimentului opus.

In[3]:=**N**[**0.13*(1–0.06)*(1–0.12)+(1–0.13)*0.06*(1–0.12)+(1–0.13)*(1–0.06)*0.12**]

Out[3]]=**0,251608**

Am obŞnut ***P****(A)*=0,251608.

Prin analogie, folosind Formula lui Poisson, calculŁm *P(B)*.

Exemplul 4. Presupunem cŁ, într-un lot de 100 de piese de acelaкi tip, 7 piese sunt defecte. Extragem la intâmplare fŁrŁ intoarcere 5 piese. DacŁ toate piesele sunt fŁrŁ defecte, atunci lotul este acceptat. În caz contrar este refuzat. SŁ se calculeze probabilitatea evenimentului *A = {lotul va fi acceptat}.*

Rezolvare. NotŁm: *A_i = {piesa cu numărul de ordine de extragere i va fi fara defecte}, i = 1, 2, 3, 4, 5*. Are loc egalitatea

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 .$$

Conform formulei (7) avem

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times$$
$$\times P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) .$$

AplicŁm Sistemul Mathematica.

In[4]:=**N**[$\frac{93}{100} * \frac{92}{99} * \frac{91}{98} * \frac{90}{97} * \frac{89}{96}$]

Out[4]=**0.690304**

ObŞnem *P(A)*=0,690304.

În cazul când produsul calculat anterior conŞne un numŁr mare de factori, atunci scrierea lui necesitŁ timp relativ îndelungat. DacŁ factorii pot fi scriкi în formŁ de o funcŞe de un parametru *i*, atunci poate fi utilizatŁ funcŞa **Product**[**f,**{**i,i$_{\min}$,i$_{\max}$**}]**.** Cum în acest exemplu avem

$$P(A) = \prod_{i=0}^{4} \frac{93 - i}{100 - i},$$

putem proceda dupŁ cum urmeazŁ.

In[5]:=**Product**[$\frac{93 - i}{100 - i}, \{i, 0, 4\}$]

Out[**5**]= $\frac{824941}{1195040}$

Am obŞnut valoarea exactŁ a probabilitŁŞi evenimentului *A*. Ne vom convinge cŁ o valoare aproximativŁ a expresiei obŞnute coincide cu cea obŞnutŁ în **Out**[**4**]

In[**6**]**:=N[%]**

Out[6]**=0.690304**

2.6. Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes.

Teoremă. *Dacă A şi H_1, H_2, ..., H_n,... sunt evenimente aleatoare legate de acelaşi câmp de probabilitate* (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***) *şi satisfac condiţiile :*

a) *evenimentul A implica producerea a cel putin unuia din evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... ;*

b) *evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... sunt incompatibile două câte două;*

c) $\boldsymbol{P}(H_i)>0$,

*atunci au loc **formula probabilităţii totale***

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+...+P(H_n)P(A\,|\,H_n)+... \qquad (9)$$

*şi **formula lui Bayes***

$$P(H_j\,|\,A)=\frac{P(H_j)P(A\,|\,H_j)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1)+...+P(H_n)P(A\,|\,H_n)+...}. \qquad (10)$$

Exemplul 5. La un depozit sunt 1000 de piese de acelaкi tip (identice), fabricate de uzinele nr.1, nr.2 кi nr.3, în proporŞe de 5:3:2. Se кtie cŁ n_i% din piesele fabricate de uzina *i* sunt cu defecte: n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 6.

1) SŁ se calculeze probabilitatea ca o piesŁ extrasŁ la întâmplare va fi calitativŁ. **2)** SŁ se calculeze probabilitatea cŁ o piesŁ extrasŁ la întâmplare va fi una fabricatŁ de uzina nr.1, dacŁ se кtie cŁ aceasta piesŁ este cu defecte.

Rezolvare. NotŁm: *A = {piesa luată la întâmplare va fi calitativă}.* În dependenŞŁ de uzinŁ la care a fost fabricatŁ piesa extrasŁ pot fi enunŞate ipotezele: H_i = *{piesa luată a fost fabricată de uzina nr.i}, i = 1, 2, 3.* Din condiŞile problemei rezultŁ cŁ uzina nr.1 a fabricat 500 de piese din cele existente la depozit, uzina nr.2 - 300 de piese şi uzina nr.3 - 200 de piese. Aplicând definiţia clasică a probabilităţii, avem: $P(H_1) = 500/1000 = 0{,}5$, $P(H_2) = 300/1000 = 0{,}3$, şi $P(H_3) = 200/1000 = 0{,}2$. Cum n_i% din piesele fabricate de uzina i sunt cu defecte, rezultă că $(1-n_i)$% din piese sunt calitative. Deci $P(A|H_1) = 0{,}96$, $P(A|H_2) = 0{,}95$ şi $P(A|H_3) = 0{,}94$. Aplicând formula probabilităţii totale (8.1.9).

In[7]:=**N[(0.5*0.96 + 0.3*0.95 + 0.2*0.94**]

Out[7]=**0.953**

Deci, $P(A) = 0{,}953$.

2) Conform notaţiei din punctul 1 avem $\overline{A}$ = {*piesa luată la întâmplare este cu defecte*}. Cum $P(\overline{A}\mid H_1) = 0{,}04$, $P(\overline{A}\mid H_2) = 0{,}05$, $P(\overline{A}\mid H_3) = 0{,}06$, din formula lui Bayes (8.1.10) avem

$$P(H_1\mid\overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A}\mid H_1)}{P(H_1)P(\overline{A}\mid H_1) + P(H_2)P(\overline{A}\mid H_2) + P(H_3)P(\overline{A}\mid H_3)}.$$

In[8]:=N[$\dfrac{0.5 * 0.04}{0.5 * 0.04 * 0.3 * 0.05 + 0.2 * 0.06}$]

Out[8]=0.425532

Am obţinut $P(H_1\mid\overline{A}) = 0{,}425532$

2.5. Probe Bernoulli (Experimente independente)

Definiţie. Experimentul aleator $\mathcal{E}$ se numeşte probă Bernoulli daca sunt intrunite urmatoarele condiţii:

a) Mulţimea de rezultate posibile constă numai din doua rezultate, numite conventional, „succes” şi „insucces”;

b) Probabilitatea *p*=***P***{„*succes*”} este o mărime ce nu variază de la o probă la alta;

c) Rezultatele unei probe nu influenţează rezultatele celorlalte probe, i.e., probele sunt independente.

Drept exemplu, putem lua aruncarea unei monede sau aruncarea unui zar, daca ne intereseaza apariţia sau nu, sa zicem, a unui numar par. Mai mult ca atât, **orice experiment aleator $\mathcal{E}$ poate fi privit ca o proba Bernoulli, deîndata ce ne intereseaza doar producerea sau nu a unui eveniment aleator A legat de acest experiment, cu conditia ca $\mathcal{E}$ să poată fi repetat independent unul de altul, practic, în aceleași condiții.** În acest caz, experimentele aleatoare $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2,\dots,$ $\mathcal{E}_n$ se numesc *independente* daca ele reprezinta repetarea uneia si aceleaʼĦ probe Bernoulli $\mathcal{E}$ de n ori. Experimentele independente por tratate ca o experienŞŁ care se repetŁ de n ori.

2.6. Schema binomială (sau schema bilei întoarse in cazul a doua culori posibile). Distributia (repartiția binomială.

Fie cŁ în fiecare din n experimente independente $\mathcal{E}_1,$ $\mathcal{E}_2,\dots,$ $\mathcal{E}_n$ evenimentul A poate sŁ se realizeze cu probabilitatea p: $p = \boldsymbol{P}(A)$. Atunci probabilitatea ca evenimentul A nu se produce este egalŁ cu $q = P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-p$. Atunci are loc urmŁtoarea

Teoremă. *Probabilitatea $P_n(k)$, ca evenimentul A se va realiza exact de k ori în n experimente independente (probe Bernoulli) cu probabiliatatea succesului p în fiecare probă, poate fi calculată dupa formula*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{11}$$

Formula (11) se numeʼĦe ***distribuție (repartitie) Binomiala***, iar in cazul $n=1$ se numeste ***distribuție Bernoulli.***

Exemplu (*Schema bilei întoarse in cazul a două culori*). Presupunem ca avem o urna cu M bile albe si N bile negre. Atunci , folosind definiʼĦ clasica a probabilitŁʼĦ, putem arŁta cŁ probabilitatea $\boldsymbol{P}_{M+N}(k)$ cŁ din $M+N$ bile, extrŁgând la întâmplare n bile cu intoarcere (repetare), vor fi extrase exact k bile albe, se calculeazŁ dupŁ formula

$$Pn(k) = C_n^k [M/(M+N)]^k [1 - M/(M+N)]^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Observam ca aceasta coincide cu distributia BinomialŁ (11). Dealtfel, schema bilei întoarse înseamnŁ cŁ bilele se extrag din urnnŁ una câte una кi fiecare bilŁ extrasŁ, este, dupŁ observarea culorii ei, întoarsŁ din nou în urnŁ.

Exemplul 6. ConsiderŁm aruncarea unei monede ñperfecteò de 100 de ori. SŁ se calculeze, cu aproxima˜Ħe, probabilitatea ca ñStemaò va apare exact de 47 ori.

Rezolvare. Fie evenimentul $A = \{va\ apare\ \text{“}Stema\text{”}\}$. Avem: $p = P(A) = 1/2$ кi $q = 1-p = 1/2$. Conform formulei Binomiale (11), pentru $n = 100$, $k = 47$, $p = 1/2$ кi $q = 1/2$, avem ca

$$P_{100}(47) = C_{100}^{47}\,(1/2)^{47}\,(1/2)^{100-47}\ .$$

Calculul acestei valori prin metode obiкnuite este posibil, dar prezintŁ dificultŁŞi. Apelând la Sistemul Mathematica avem :

In[9]:= $\dfrac{100\ !}{(47\,!)*(53\,!)}(0.5)^{47}\,(0.5)^{53}$

Out[9]=0.0665905

A’Ħ dar, $P_{100}(47)=0{,}0665905$.

2.7. Schema (repartiția) multinomială (polinomială) sau schema bilei întoarse în cazul bilelor de mai multe culori.

Fie cŁ în rezultatul fiecŁrui din n experimentele independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ pot sŁ se realizeze evenimentele aleatoare $A_1, A_2, \ldots, A_r$, care formeazŁ un sistem complet de evenimente, i.e., acestea sunt incompatibile doua câte doua ’Ħ suma (reuniunea) lor coincide cu evenimentul sigur. NotŁm: $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Evident, $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$. Atunci are loc urmŁtoarea

Teoremă ***(Distribuția Multinomială).*** *Probabilitatea $P_n(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ ca, în urma a n experimente independente, evenimentele A_i se vor realiza de k_i ori fiecare, unde $i = 1, 2, \ldots, r$, $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, poate fi calculată conform formulei*

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_r) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}\,p_1^{k_1}\,p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}\ . \qquad (12)$$

Observaţie. Formula (12) defineĦe, asa numita *Distribuţie Multinomială,* distribuĦe care coincide, evident, în cazul *r=2,* cu *Distribuţia Binomială* definitŁ de formula (11).

Exemplul 7. Presupunem cŁ într-o urnŁ avem urmŁtoarea componenĦ de bile de trei culori: 5 bile albe, 7 bile negre кi 8 bile albastre. Se extrag succesiv, cu repetare (revenire) 6 bile. Care este probabilitatea ca printre aceste 6 bile una va fi albŁ, douŁ vor fi negre кi trei vor fi albastre?

Rezolvare. Fie evenimentele: A_1 = {*bila extrasă va fi albă*}, A_2 = {*bila extrasă va fi neagră*} кi A_3 = {*bila extrasă va fi albastră*}. Atunci: $p_1 = P(A_1) = 5/(5+7+8) = 1/4$, $p_2 = P(A_2) = 7/20$, кi $p_3 = P(A_3) = 8/20 = 2/5$. Aplicând formula (8.1.12) cu $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, кi $k_3 = 3$, obŞnem

$$P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{7}{20}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

CalculŁm aceastŁ expresie cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[10]:= $\frac{6!}{(1!)*(2!)*(3!)}*(1/4)^1*(7/20)^2*(2/5)^2$

Out[10]= $\frac{147}{1250}$

Am obŞnut valoarea exactŁ $P_6(1,2,3)= \frac{147}{1250}$ **.**

DacŁ vrem sŁ obŞnem o valoare aproximativŁ sau o valoarea datŁ exprimatŁ prin fracŞi zecimale, atunci

In[11]:=N[%]

Out[11]=0.1176

Am obŞnut valoarea $P_6(1,2,3) = 0,1176$.

2.8. Schema Poisson. Funcţia generatoare de probabilităţi.

Fie cŁ în fiecare din experimentele independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ evenimentul A se poate ,produce, respectiv, cu probabilitŁŞle p_1, p_2, ..., p_n. Atunci are loc urmŁtoarea

Teoremă (*Schema Poisson*). *Probabilitatea $P_n(k)$ ca, în urma a n experienţe independente descrise mai sus, evenimentul A să se va produce de k ori, k = 1, 2, ..., n, coincide cu coeficientul lui x^k din expresia*

$$\varphi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i x), \tag{13}$$

unde $q_i = 1-p_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

FuncŞa $\varphi_n(x)$ din formula (13) se numeкte *funcţie generatoare de probabilităţi.*

Observație. Schema BinomialŁ devine un caz particular al schemei Poisson кi anume, atunci când $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. În acest caz funcŞa generatoare de probabilitŁŞ are forma

$$\varphi_n(x) = (q+px)^n. \tag{14}$$

Exemplul 8. Din trei loturi de piese de acelaкi tip se extrag la întâmplare câte o piesŁ. Se кtie cŁ din piesele primului lot 95% sunt calitative, din al doilea - 90% кi din al treilea - 85%. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor: B = {*toate trei piese vor fi calitative*}, C = {*două piese vor fi calitative şi una nu*}, D = {*o piesă va fi calitativă şi două nu*}, E = {*toate trei piese vor fi necalitative*}.

Rezolvare. Aplicând formula (13) cu $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}85$, $q_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}1$, $q_3 = 0{,}15$, $n = 3$, aflŁm funcŞa generatoare $\varphi_3(x)$ cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[12]:=Collect[(0.05+0.95x)*(0.1+0.9x)*(0.15+0.85x),x]

Out[12]=0.00075+0.02525x+0.24725x^2+0.72675x^3

De unde gŁsim cŁ: $P(B) = 0{,}72675$, $P(C) = 0{,}24725$, $P(D) = 0{,}02525$, $P(E) = 0{,}00075$.

2.9. Schema bilei neîntoarse în cazul a două culori (Repartiția Hipergeometrică)

Fie cŁ într-o urnŁ sunt n bile dintre care n_1 sunt albe кi n_2 sunt negre. Se extrag la întâmplare, fŁrŁ întoarcere, m bile, $m < n$. Atunci are loc urmŁtoarea

Teoremă (*Schema bilei neîntoarse în cazul a două culori*). *În schema descrisă mai sus, probabilitatea $P_n(m_1,m_2)$, ca printre m bile* *extrase m_1 vor fi albe şi m_2 negre, $m = m_1 + m_2$, se calculează conform formulei*

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}}{C_n^m}. \qquad (15)$$

aceasta probabilitate fiind nula daca exista cel putin o valoare i pentru care $m_i > n_i$, $i=1,2$.

Formula (15) defineşte, aşa numita, *repartiție Hipergeometrică.*

Exemplul 9. Presupunem că într-un lot de 100 de bilete de loterie 20 de bilete sunt câştigătoare. Să se calculeze probabilitatea ca din 7 bilete cumpărate 2 bilete vor fi cu câştig.

Rezolvare. Aplicăm formula (15) în care, conform datelor problemei, $n=100$, $n_1 = 20$, $n_2 = 80$, $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m = 7$. Avem:

$$P_7(2,5) = \frac{C_{20}^{2} C_{80}^{5}}{C_{100}^{7}}$$

Calculăm o valoare aproximativă a acestei expresii.

In[13]**:=N[**$\left(\frac{20!}{(2!)*(18!)} * \frac{80!}{(5!)*(75!)}\right) / \left(\frac{100!}{(7!)*(93!)}\right)$ **]**

Out[13]**=0.28534**

Am obţinut rezultatul $P_7(2,5) = 0{,}28534$.

2.10. Schema bilei neîntoarse în caz general

Fie că avem o urnă în care sunt n bile, din care n_i bile sunt de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$. Se extrag succesiv fără revenire m bile, $m < n$. Atunci are loc următoarea

Teoremă(*Schema bilei neîntoarse în caz general*) . *În schema descrisă mai sus, probabilitatea $P_n(m_1, m_2, ..., m_r)$ ca printre bilele extrase m_i vor fi de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $m = m_1 + m_2 + ... + m_r$, se* calculează conform formulei

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_r) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_r}^{m_r}}{C_n^m}, \qquad (16)$$

aceasta probabilitate fiind nula daca exista cel putin o valoare i pentru care $m_i > n_i$, $i=1,\ldots,r$.

Exemplul 10. Într-un depozit sunt 200 de piese de acelaкi tip, din care 100 sunt de calitatea întâi, 66 de calitatea a doua кi 34 de calitatea a treia. Se iau la întâmplare fŁrŁ întoarcere 30 piese. Care este probabilitatea ca printre ele 17 sŁ fie de calitatea întâi, 9 de calitatea a doua кi 4 de calitatea a treia?

Rezolvare. AplicŁm formula (8.1.16) cu $n = 200$, $m = 30$, $n_1 = 100$, $n_2 = 66$, $n_3 = 34$, $m_1 = 17$, $m_2 = 9$, $m_3 = 4$. Conform Schemei bilei neîntoarse în caz general, avem cŁ probabilitatea în cauzŁ,

$$P_{30}(17,9,4) = \frac{C_{100}^{17} C_{66}^{9} C_{34}^{4}}{C_{200}^{30}}$$

CalculŁm o valoare aproximativŁ a acestei expresii cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[14]:=N[(

$$\frac{100\,!}{(17\,!)(83\,!)} * \frac{66\,!}{(9!)(57\,!)} * \frac{34\,!}{(4!)(30\,!)}) /(\frac{200\,!}{(30\,!)(170\,!)}) \,]$$

Out[14]=0.0278641

Am obŞinut $P_{30}(17,9,4)$ =0,0278641

2.11. Schema (repartiția) geometrică

ConsiderŁm experimentul aleator, ce constŁ in repetarea unei probe Bernoulli, cu probabilitatea Ăsuccesuluiò p in fiecare proba, pâna la prima inregistrare a Ăsuccesuluiò. Atunci are loc urmŁtoarea

Teoremă. *În schema descrisă mai sus, probabilitatea* ***P(k)=P{****„succesul” se va realiza prima dată în proba cu numărul de ordine k* **}** *se calculează conform formulei*

$$\boldsymbol{P}(k) = pq^{k-1},\ k=1,2,\ldots \qquad (17)$$

*iar probabilitatea **P(k)=P{** pâna la producerea prima dată a „succe-sului” vor fi inregistrate exact k „insuccese”**}** se calculează conform formulei*

$$P(k) = pq^k,\ k=0,1,2,... \qquad (17')$$

unde q = 1–p.

Observație. Distribuţia definitŁ de formula *(17)* se numeşte ***geometrică, trunchiată în zero,*** iar cea definitŁ de formula *(17') se* numeşte, pur şi simplu, **geometrică**.

Exemplul 11. 1) SŁ se calculeze probabilitatea apariŞei feţei 4, pentru prima datŁ, la aruncarea a zecea a unui zar Ăperfectò. 2) Care este probabilitatea evenimentului aleator B = {*la aruncarea unui zar „perfect”, fața 3 nu va apărea mai devreme de primele 10 aruncări*}?

Rezolvare. 1) Cum p = 1/6 кi q = 1–1/6 = 5/6, din formula (8.1.17) obŞinem $P(10) = pq^9 = (1/6)(5/6)^9$.

In[15]:=N[(1/6)*(5/6)^9]

Out[15]=0.0323011

Am obŞinut $P(10)$ = 0,0323011

2) Evenimentul B poate fi definit кi astfel: B = {numŁrul 4 va apŁrea pentru prima datŁ la aruncarea a unsprezecea, sau a douŁsprezecea, sau a treisprezecea, ...}. Deci

$$P(B) = P(11) + P(12) + P(13) + ... = \sum_{k=11}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1}.$$

CalculŁm aceastŁ sumŁ cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[16]:=Sum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]

Out[16]= $\dfrac{9765625}{60466176}$

Am obŞinut valoarea exactŁ a probabilitŁŞii lui B. ObŞinem o valoare exprimatŁ prin fracŞii zecimale.

In[17]:=N[%]

Out[17]=0.161506

Aceeaкi valoare poate fi obŞinutŁ кi în modul ce urmeazŁ.

In[18]:=NSum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]

Out[18]=0.161506.

2.12. Teoreme Limită privind calculul valorilor aproximative ale probabilităţii din schema Binomială

Pentru n şi m relativ mari calculul probabilităţii conform distribuţiei Binomiale prezintă mari dificultăţi, dacă nu se aplică Sistemul Mathematica. În acest caz se folosesc formule de calcul ale unor valori aproximative ale acestei probabilităţi. Una din acestei formule rezultă din

Teorema Limită Locală Moivre-Laplace. *Pentru valori intregi ale lui n, suficient de mari, are loc următoarea formulă de aproximare*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \qquad (18)$$

unde $0 < p < 1$, *iar* $P_n(k)$ *este probabilitatea ca evenimentul aleator A cu P(A) = p, q = 1−p, să va realiza exact de k ori în urma a n probe Bernoulli cu probabilitatea „succesului” p in fiecare probă.*

În cazul când probabilitatea p este aproape de 0 sau q este aproape de 1, atunci o mai bună aproximaţie ne-o oferă

Teorema Limita Poisson. *Dacă np tinde la un număr a>0, când n tinde la +∞ iar p (0<p<1) tinde la 0, atunci*

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ *tinde la* $\frac{a^k}{k!} e^{-a}$, *adică pentru n suficient de mare*

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \qquad (19)$$

luând a = np.

Observație. Se recomandă ca această formula să fie aplicată atunci, când $npq < 9$, iar în celelelte cazuri – formula (18). Probabilităţile din partea dreapta a formulei (19) definesc, aşa numita, **distribuție Poisson.**

O valoare aproximativă a probabilităţii $P_n(k_1, k_2)$ ca în urma a n experimente independente numărul *total* de realizări ale evenimentului aleator A va fi cuprins între k_1 şi k_2 poate fi calculată, aplicând

Teorema Limită Centrală (forma Moivre-Laplace). *Daca n tinde la +∞, atunci $P_n(k_1, k_2)$ tinde la* $\Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, *adica pentru n suficient de mare*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (20)$$

unde $\Phi(x)$ este funcţia Laplace care se defineşte prin egalitatea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt . \qquad (21)$$

Formula (20) rezultŁ di teorema integralŁ Moivre-Laplace.

Având la dispoziŞe Sistemul Mathematica, in multe cazuri putem aplica formula exacta de calcul, dar si formulele (18) ï (21). Prin urmare, putem cerceta кi compara erorile care se obŞn la aplicarea lor.

Exemplul 12. Presupunem ca probabilitatea cŁ o piesŁ, fabricatŁ de o uzinŁ, va avea defecte este egalŁ cu p = 0,01. 1) SŁ se calculeze probabilitatea cŁ din 10000 de piese luate la întâmplare 90 vor fi cu defect, folosind: a) distribu"Ħa BinomialŁ (11); b) formula localŁ Moivre-Laplace (18); c) formula Poisson (19). 2) Care este probabilitatea ca numŁrul de piese cu defect sŁ fie cuprins între 95 кi 105?

Rezolvare. 1) a) Valoarea exactŁ a probabilitŁŞi cŁutate este datŁ de formula BinomialŁ:

$$P_{10000}(90) = C_{10000}^{90} (0,01)^{90} (0,99)^{9910} .$$

Folosim Sistemul Mathematica

In[19]**:=N[=** $\frac{10000\ !}{(90\,!)(10000\ -\ 90)!} (0.01)^{90} (0.99)^{10000\ -90}$ **]**

Out[19]**=0.0250257**

Am obŞnut rezultatul $P_{10000}(90) \approx$ 0,0250257.

b) Conform formulei (8.1.18) avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10000 \cdot 0.01 \cdot 0.99}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{90-10000\cdot 0.01}{\sqrt{10000\cdot 0.01 \cdot 0.99}}\right)^2}.$$

Pentru calculul valorii acestei expresii folosim Sistemul Matematica.

In[20]:=

N

$$[\frac{1}{\sqrt{2 * \pi * 10000 * 0.01 * 0.99}} Exp[-\left(\frac{90 - 10000 * 0.01}{\sqrt{10000 * 0.01 * 0.99}}\right)\hat{}2/2]]$$

Out[20]=0.0241965

Am obŞnut rezultatul $P_{10000}(90) \approx$ 0.0241965.

c) CalculŁm probabilitatea cerutŁ cu ajutorul formulei (19). Avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{(10000 \cdot 0{,}01)^{90}}{90!} e^{-10000 \cdot 0{,}01}.$$

Folosim Sistemul Mathematica.

In[21]:=N $\frac{(10000 * 0{,}01)^{90}}{90!} Exp[-10000 * 0.01]]$

Out[21]=0.0250389

Am obŞnut rezultatul $P_{10000}(90) \approx$ 0.0250389.

2) Conform formulelor (8.1.20) ki (8.1.21) avem

$$P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{95-10000*0.1}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}}^{\frac{105-10000*0.01*0,99}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}} e^{-t^2/2} dt.$$

Pentru calculul acestei integrale folosim Sistemul Mathematica.

In[22]:=NIntegrate[$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Exp[-t^2/2]$,{t, $\frac{95 - 10000 * 0.01}{\sqrt{10000 * 0.01 * 0.99}}$

, $\frac{105 - 10000 * 0.01}{\sqrt{10000 * 0.01 * 0.99}}$ }]

Out[22]=0.384697

Am obŞnut rezultatul $P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx$ 0,384697

2.13.Exerciţii pentru lucrul individual

1. Se aruncŁ un zar de douŁ ori. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor aleatoare: 1) A = {*suma numerelor apărute nu va întrece m*}, 2) B = {*suma numerelor apărute va fi egală cu r*}, 3) G = {*produsul numerelor apărute va fi mai mare ca n*}. Valorile parametrilor m, n кi r sunt date pe variante.

1) m=4, n=14 , r=5; 2) m=5, n=13 , r=4; 3) m=6, n=12 , r=3;
4) m=7, n=11 , r=6; 5) m=8, n=10 , r=4; 6) m=4, n=13 , r=5;
7) m=5, n=12 , r=6; 8) m=6, n=11 , r=3; 9) m=7, n=10 , r=5;
10) m=8, n=14 , r=6; 11) m=4, n=12 , r=4; 12) m=5, n=11 , r=3;
13) m=6, n=10 , r=6; 14) m=7, n=14 , r=4; 15) m=8, n=13 , r=3;
16) m=4, n=12 , r=5; 17) m=5, n=11 , r=4; 18) m=6, n=10 , r=3;
19) m=7, n=14 , r=5; 20) m=8, n=13 , r=6; 21) m=4, n=11 , r=3;
22) m=5, n=10 , r=5; 23) m=6, n=14 , r=6; 24) m=7, n=13 , r=4;
25) m=8, n=12 , r=5; 26) m=4, n=10 , r=6; 27) m=5, n=11 , r=4;
28) m=6, n=12 , r=3; 29) m=7, n=13 , r=6; 30) m=8, n=14 , r=4.

2. Într-un lot care conŞne n piese de acelaкi tip sunt 8 piese cu careva defect. Se extrag fŁrŁ revenire 6 piese. DacŁ toate piesele extrase sunt calitative, atunci lotul este acceptat, iar în caz contrar este refuzat. SŁ se calculeze probabilitatea evenimentului A = {*lotul va fi acceptat*}. Parametrul n este egal cu 100 plus numŁrul variantei.

3. Un aparat constŁ din trei elemente care în timpul funcŞonŁrii lui pot sŁ se deterioreze independent unul de altul. NotŁm: A_i = {*elementul i se va deteriora*}, i = 1, 2, 3. Se cunosc probabilitŁŞle acestor evenimente: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$, valorile cŁrora sunt date pe variante dupŁ enunŞul exerciŞului. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor: A = {*nu se va deteriora nici un element*}, B = {*se va deteriora un singur element*}, C = {*se vor deteriora exact două elemente*}, D = {*se vor deteriora toate elementele*}, E = {*primul element nu se va deteriora*}.

1) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,7;
2) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,7;
3) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,7;
4) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,7;
5) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,7;
6) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,6;
7) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6;
8) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,6;
9) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,6;
10) p_1=0,4, p_2=0,6, p_3=0,5;
11) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5;
12) p_1=0,8, p_2=0,6, p_3=0,5;
13) p_1=0,9, p_2=0,6, p_3=0,5;
14) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,4;
15) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4;
16) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4;
17) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,4;
18) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,5;
19) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,5;
20) p_1=0,8, p_2=0,7, p_3=0,5;
21) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,9;
22) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,3;
23) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6;
24) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5;
25) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4;
26) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,9;
27) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,8;
28) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,5;
29) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4;
30) p_1=0,5, p_2=0,6, p_3=0,4.

4. Un magazin primeкte pentru vânzare articole cu exterioare identice fabricate la trei uzine în proporŞe de: n_1% de la uzina nr.1, n_2% de la uzina nr.2 кi n_3% de la uzina nr.3. Procentele de articole defectate sunt: m_1 pentru uzina nr.1, m_2 pentru uzina nr.2 кi m_3 pentru uzina nr.3. Valorile parametrilor se conŞn, pe variante, dupŁ enunŞul exerciŞului. !) Care este probabilitatea ca un articol cumpŁrat sŁ fie calitativ? 2) Un articol luat la întâmplare este defectat. Care este probabilitatea cŁ acest articol a fost fabricat la uzina nr.k.

1) n_1=20, n_2=30, n_3=50, m_1=5, m_2=3, m_3=2, k=1;
2) n_1=10, n_2=40, n_3=50, m_1=3, m_2=2, m_3=5; k=2;
3) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=4, m_2=1, m_3=5; k=3;
4) n_1=40, n_2=10, n_3=50, m_1=1, m_2=5, m_3=4; k=1;
5) n_1=10, n_2=50, n_3=40, m_1=2, m_2=4, m_3=4; k=2;
6) n_1=20, n_2=40, n_3=40, m_1=3, m_2=3, m_3=4; k=3;
7) n_1=30, n_2=30, n_3=40, m_1=4, m_2=2, m_3=4; k=1;
8) n_1=40, n_2=20, n_3=40, m_1=5, m_2=1, m_3=4; k=2;
9) n_1=50, n_2=10, n_3=40, m_1=1, m_2=6, m_3=3; k=3;
10) n_1=10, n_2=60, n_3=30, m_1=2, m_2=5, m_3=3; k=1;
11) n_1=20, n_2=50, n_3=30, m_1=3, m_2=4, m_3=3; k=2;
12) n_1=30, n_2=40, n_3=30, m_1=4, m_2=3, m_3=3; k=3;

13) $n_1=40$, $n_2=30$, $n_3=30$, $m_1=5$, $m_2=2$, $m_3=3$; $k=1$;
14) $n_1=50$, $n_2=20$, $n_3=30$, $m_1=6$, $m_2=1$, $m_3=3$; $k=2$;
15) $n_1=60$, $n_2=10$, $n_3=30$, $m_1=1$, $m_2=7$, $m_3=2$; $k=3$;
16) $n_1=10$, $n_2=70$, $n_3=20$, $m_1=2$, $m_2=6$, $m_3=2$; $k=1$;
17) $n_1=20$, $n_2=60$, $n_3=20$, $m_1=3$, $m_2=5$, $m_3=2$; $k=2$;
18) $n_1=30$, $n_2=50$, $n_3=20$, $m_1=4$, $m_2=4$, $m_3=2$; $k=3$;
19) $n_1=40$, $n_2=40$, $n_3=20$, $m_1=5$, $m_2=3$, $m_3=2$; $k=1$;
20) $n_1=50$, $n_2=30$, $n_3=20$, $m_1=6$, $m_2=2$, $m_3=2$; $k=2$;
21) $n_1=10$, $n_2=40$, $n_3=50$, $m_1=7$, $m_2=5$, $m_3=4$; $k=3$;
22) $n_1=20$, $n_2=60$, $n_3=20$, $m_1=6$, $m_2=3$, $m_3=7$; $k=1$;
23) $n_1=30$, $n_2=20$, $n_3=50$, $m_1=4$, $m_2=5$, $m_3=6$; $k=2$;
24) $n_1=40$, $n_2=20$, $n_3=40$, $m_1=5$, $m_2=7$, $m_3=6$; $k=3$;
25) $n_1=40$, $n_2=30$, $n_3=30$, $m_1=5$, $m_2=4$, $m_3=6$; $k=1$;
26) $n_1=40$, $n_2=10$, $n_3=50$, $m_1=3$, $m_2=8$, $m_3=4$; $k=2$;
27) $n_1=50$, $n_2=30$, $n_3=20$, $m_1=3$, $m_2=4$, $m_3=5$; $k=3$;
28) $n_1=20$, $n_2=50$, $n_3=30$, $m_1=5$, $m_2=6$, $m_3=4$; $k=1$;
29) $n_1=30$, $n_2=20$, $n_3=50$, $m_1=7$, $m_2=5$, $m_3=6$; $k=2$;
30) $n_1=40$, $n_2=50$, $n_3=10$, $m_1=5$, $m_2=6$, $m_3=8$, $k=3$.

5. O monedŁ se aruncŁ de n ori. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor: A = {*stema va apare de k ori*}, B = {*stema va apare nu mai mult de 2 ori*}, C = {*stema nu va apare niciodată*}. NumŁrul n este egal cu 25 plus numŁrul variantei, iar k este egal cu 10 plus numŁrul variantei.

6. Probabilitatea ca un aparat electric sŁ se defecteze în perioada de garanŞe este $p=0,12$. SŁ se calculeze probabilitatea ca din 1000 aparate cumpŁrate, în perioada de garanŞe, *se vor defecta exact m aparate*. NumŁrul m coincide cu numŁrul variantei adunat cu 100.

7. Într-o urnŁ sunt n bile de trei culori: n_1 bile albe, n_2 bile negre кi n_3 bile albastre. Se extrag succesiv cu revenire m bile. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor: A = {*toate bilele extrase vor fi albe*}, B = {m_1 *bile vor fi albe,* m_2 *vor fi negre şi* m_3 *vor fi albastre*}, C = {m_1 *bile vor fi albe iar restul vor fi de alte culori*}.
1) $n=15$, $n_1=4$ $n_2=5$, $n_3=6$, $m=10$, $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=5$;
2) $n=15$, $n_1=3$, $n_2=6$, $n_3=6$, $m=10$, $m_1= 2$, $m_2=4$, $m_3=4$;
3) $n=15$, $n_1=5$, $n_2=4$, $n_3=6$, $m=10$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=5$

4) $n=15$, $n_1=6$, $n_2=5$, $n_3=4$, $m=10$, $m_1=5$, $m_2=3$, $m_3=2$;
5) $n=15$, $n_1=4$, $n_2=6$, $n_3=5$, $m=10$, $m_1=2$, $m_2=4$, $m_3=4$;
6) $n=15$, $n_1=3$, $n_2=5$, $n_3=7$, $m=9$, $m_1=1$, $m_2=3$, $m_3=5$;
7) $n=15$, $n_1=5$, $n_2=6$, $n_3=4$, $m=9$, $m_1=2$, $m_2=5$, $m_3=2$;
8) $n=15$, $n_1=6$, $n_2=4$, $n_3=5$, $m=9$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=4$;
9) $n=15$, $n_1=7$, $n_2=4$, $n_3=4$, $m=9$, $m_1=5$, $m_2=3$, $m_3=1$;
10) $n=15$, $n_1=7$, $n_2=3$, $n_3=5$, $m=9$, $m_1=4$, $m_2=2$, $m_3=3$;
11) $n=18$, $n_1=4$, $n_2=6$, $n_3=8$, $m=10$, $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=5$;
12) $n=18$, $n_1=5$, $n_2=5$, $n_3=8$, $m=10$, $m_1=4$, $m_2=1$, $m_3=5$;
13) $n=18$, $n_1=4$, $n_2=8$, $n_3=6$, $m=10$, $m_1=2$, $m_2=4$, $m_3=4$;
14) $n=18$, $n_1=5$, $n_2=8$, $n_3=5$, $m=10$, $m_1=3$, $m_2=5$, $m_3=2$;
15) $n=18$, $n_1=5$, $n_2=6$, $n_3=7$, $m=10$, $m_1=3$, $m_2=4$, $m_3=3$;
16) $n=16$, $n_1=5$, $n_2=7$, $n_3=6$, $m=9$, $m_1=3$, $m_2=3$, $m_3=3$;
17) $n=18$, $n_1=6$, $n_2=5$, $n_3=7$, $m=9$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=4$;
18) $n=18$, $n_1=6$, $n_2=7$, $n_3=5$, $m=9$, $m_1=4$, $m_2=4$, $m_3=1$;
19) $n=18$, $n_1=6$, $n_2=8$, $n_3=4$, $m=9$, $m_1=4$, $m_2=3$, $m_3=2$;
20) $n=18$, $n_1=6$, $n_2=4$, $n_3=8$, $m=9$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=5$;
21) $n=16$, $n_1=5$, $n_2=5$, $n_3=6$, $m=8$, $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=3$;
22) $n=16$, $n_1=5$, $n_2=6$, $n_3=5$, $m=8$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=3$;
23) $n=16$, $n_1=5$, $n_2=7$, $n_3=4$, $m=8$, $m_1=3$, $m_2=4$, $m_3=1$;
24) $n=16$, $n_1=5$, $n_2=4$, $n_3=7$, $m=8$, $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=3$;
25) $n=16$, $n_1=6$, $n_2=5$, $n_3=5$, $m=8$, $m_1=4$, $m_2=3$, $m_3=1$;
26) $n=16$, $n_1=6$, $n_2=4$, $n_3=6$, $m=9$, $m_1=3$, $m_2=3$, $m_3=3$;
27) $n=16$, $n_1=6$, $n_2=6$, $n_3=4$, $m=9$, $m_1=2$, $m_2=4$, $m_3=2$;
28) $n=16$, $n_1=7$, $n_2=4$, $n_3=5$, $m=9$, $m_1=4$, $m_2=2$, $m_3=3$;
29) $n=16$, $n_1=7$, $n_2=5$, $n_3=4$, $m=9$, $m_1=5$, $m_2=2$, $m_3=2$;
30) $n=16$, $n_1=4$, $n_2=5$, $n_3=7$, $m=9$, $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=4$.

8. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor A, B кi C din exerciŞul 7 cu condiŞa cŁ bilele extrasŁ nu revine în urnŁ.

9. 1) Care este probabilitatea cŁ numŁrul *3* va apŁrea pentru prima datŁ la a m-a aruncare a zarului? 2) Care este probabilitatea cŁ la primele m aruncŁri ale zarului numŁrul *3* nu va apŁrea? NumŁrul m este numŁrul variantei adunat cu *4*.

10. Probabilitatea unui eveniment A într-o experienŞŁ aleatoare este p: $p = P(A)$. 1) SŁ se calculeze probabilitatea ca în decursul a 1000 repetŁri a acestei experienŞe evenimentul A se va realiza de k ori (sŁ se foloseascŁ formula care rezultŁ din teorema localŁ Moivre-Laplace кi formula care rezultŁ din teorema Poisson). 2) SŁ se calculeze probabilitatea ca numŁrul de realizŁri ale evenimentului A sŁ fie cuprins între k_1 кi k_2.

1) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=13,	2) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=14,
3) p=0,011, k=11, k_1=7, k_2=15,	4) p=0,011 k=9, k_1=7, k_2=15,
5) p=0,012, k=10, k_1=8, k_2=16,	6) p=0,008, k=10, k_1=7, k_2=13,
7) p=0,009, k=11, k_1=8, k_2=14,	8) p=0,01, k=12, k_1=9, k_2=15,
9) p=0,011, k=10, k_1=9, k_2=14,	10) p=0,012, k=11, k_1=10, k_2=15,
11) p=0,008, k=11, k_1=6, k_2=13,	12) p=0,009, k=12, k_1=7, k_2=13,
13) p=0,01, k=13, k_1=8, k_2=15,	14) p=0,011, k=11, k_1=9, k_2=14,
15) p=0,012, k=13, k_1=10, k_2=15,	16) p=0,008, k=7, k_1=5, k_2=10,
17) p=0,009, k=8, k_1=6, k_2=16,	18) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
19) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17,	20) p=0,012, k=11, k_1=8, k_2=18,
21) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15,	22) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=15,
23) p=0,01, k=9, k_1=4, k_2=14,	24) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17,
25) p=0,012, k=11, k_1=5, k_2=14,	26) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15,
27) p=0,009, k=8, k_1=4, k_2=14,	28) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
29) p=0,011, k=12, k_1=8, k_2=18,	30) p=0,012, k=11, k_1=6, k_2=17.

3. Variabile aleatoare

3.1. Introducere

In acest capitol se conŞne o expunere succintŁ a rezultatelor din Teoria probabilitŁ˝Ħor ce se referŁ la **variabile aleatoare,** exemple de probleme rezolvate la aceastŁ temŁ, dar si o listŁ de probleme propuse spre rezolvare.

Vizavi de Sistemul Mathematica, vom aplica, în afarŁ de funcŞile definite anterior, кi funcŞile **Condition** (notatŁ кi cu /;), **Clear.**

F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:=1/;x≥0; înseamnŁ cŁ funcŞei $F(x)$ i se atrubuie valoarea 0 cu condiŞa cŁ $x<0$ кi valoarea 1 cu condiŞa cŁ $x\geq 0$;

Clear[F,f,m,…] înseamnŁ cŁ funcŞile sau parametrii *F*, *f*, *m*,... se elibereazŁ (se curŁ˝Ħ) de valorile atribuite lor anterior.

In Sistemul Mathematica sunt încorporate pachete de programe specializate în rezolvarea problemelor din diferite domenii ale Matematicii. În acest Capitol se va folosi pachetul **Statistics`NormalDistribution`**. Când lucrŁm cu un document în Sistemul Mathematica, acest pachet poate fi instalat cu ajutorul instrucŞunii

<<Statistics`NormalDistribution`.

DacŁ se dore’Ħe trasarea graficului funcŞei *f*(*x*) definite pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de grosime standardŁ, atunci se poate folosi funcŞa

Plot[f,{x,a,b}]

Atunci, când se dore’Ħe trasarea graficului funcŞei *f*(*x*) definite pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de o anumitŁ grosime, se poate folosi funcŞa

Plot[f,{x,a,b},PlotStyle→Hue[k]], unde *k* este raportul dintre grosimea doritŁ a graficului ki srosimea standardŁ.

Când dorim sŁ construim, pe un singur desen, graficele mai multor fincŞi f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], atunci putem folosi funcŞa

Plot[{f_1,f_2,…,},{x,a,b}].

DacŁ vrem sŁ construim pe un singur desen graficele fincŞilor f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], folosind linii de diferite grosimi ki culori, atunci putem utiliza funcŞa

Plot[{f_1,f_2,…},{x,a,b},PlotStyle→{Hue[k_1],Hue[k_2],…}].

3.2. Noţiune de variabilă aleatoare. Funcţia de repartiţie

3.2.1. Definiţia variabilei aleatoare (v.a)

În majoritatea cazurilor rezultatele înregistrate într-un experiment aleator reprezintŁ nikte valori numerice ale unei marimi care depind de evenimentele elementare în acest experiment. Aceasta marime se va numi variabilŁ aleatoare. Aceasta este, ca atare, o variabilŁ (o func˝Ħe) care depinde de rezultatul posibil într-un experiment aleator (ce poseda Proprietatea RegularitŁ"Hi Statistice), ceea ce inseamna ca valoarea ei nu poate fi anticipata cu certitudine înainte de efectuarea experimentului. Vom da definiŞa matematicŁ a variabilei aleatoare.

Definiţie. Fie (Ω, $\mathscr{F}$, $\boldsymbol{P}$) un câmp de probabilitate, atunci vom numi *variabilă aleatoare (v.a.)* definitŁ pe acest câmp orice funcŞe $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ care verificŁ condiŞa

$$\{\, \omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F} \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R} . \qquad (1)$$

Observatie. DacŁ suntem in cazul discret, i.e., in cazul când spatiul de evenimente elementare Ω este o multime finitŁ sau, cel mult, numŁrabilŁ, atunci câmpul (familia) de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ coincide cu familia tuturor submul"Hmilor din Ω. Prin urmare, in acest caz, putem numi variabila aleatoare orice functie $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$, deoarece in caz discret condi"Ha ca $\{\, \omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc automat**.**

Evenimentul care figureazŁ în condiŞa (1) se noteazŁ, pe scurt, astfel: $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, sau $\{\xi < x\}$, sau $(\xi < x)$. MŁrimea $\xi(\omega)$ se numeкte valoare a variabilei aleatoare ξ. Din condiŞa (1) rezultŁ cŁ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ putem gŁsi probabilitatea evenimentului aleator $(\xi < x)$.

În calitate de exemple de v.a. întâlnite in practicŁ putem lua: suma de puncte apŁrute la aruncarea unui zar de douŁ ori, durata funcŞonŁrii unui dispozitiv electronic, numŁrul de particule alfa emise de o substanŞŁ radioactivŁ într-o unitate de timp, cantitatea anualŁ de precipitaŞi atmosferice într-o anumitŁ regiune, numŁrul de apeluri telefonice înregistrate pe parcursul a 24 de ore la o statie de ajutor medical, numŁrul de accidente auto înregistrate pe parcursul unui anumit interval de timp, etc., etc.

3.2.2. Proprietăţi ale variabilei aleatoare

a) DacŁ ξ este o variabilŁ aleatoare, atunci pentru orice $a \in \mathbf{R}$ кi $b \in \mathbf{R}$ sunt sunt evenimente aleatoare si prin urmare sunt definite probabilitŁŞle lor pentru $\{\xi > a\}$, $\{\xi \geq a\}$, $\{\xi = a\}$, $\{a \leq \xi < b\}$, $\{b < \xi \leq a\}$, etc.

b) Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate, $a\in\mathbf{R}$, $\xi\mathbf{:}\Omega\to\mathbf{R}$ кi $\eta\mathbf{:}\Omega\to\mathbf{R}$ sunt variabile aleatoare. Atunci sunt variabile aleatoare кi funcŞile: 1) $a\xi$; 2) ξ^k, $k = 1, 2,...$; 3) $\xi-\eta$; 4) $\xi+\eta$; 5) $\xi\cdot\eta$; 6) $1/\eta$ dacŁ $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall\omega\in\Omega$; 7) ξ/η dacŁ $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall\omega\in\Omega$; 8) $\xi\pm a$.

În genere, daca avem un sir finit de v.a. definite pe unul si acelasi câmp de probabilitate, atunci v.a. va fi si orice functie de aceste variabile, in caz cŁ aceasta este functie continua. De exemplu, suma de v.a., diferenta lor, produsul lor, minimumul sau maximumul de aceste variabile, etc., vor fi v.a.

3.2.3. Funcţia de repartiţie (distribuție) a v.a

Definiţie. Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate кi $\xi : \Omega\to\mathbf{R}$ o variabilŁ aleatoare. FuncŞa $F : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definitŁ prin relaŞa

$$F(x) = P(\xi < x), \text{ pentru orice } x\in\mathbf{R}, \tag{2}$$

se numeкte *funcţie de repartiţie* (f.r.) a v.a. ξ.

Teoremă (*Proprietăţile caracteristice ale f.r.*)

Dacă $F(x)$ este o f.r. a unei v.a., atunci au loc următoarele proprietăţi:

1) $F(x)$ este monoton nedescrescătoare), i.e., $F(x_1) \leq F(x_2)$ deîndată ce $x_1 \leq x_2$;

2) $F(x)$ este continuă la stânga pentru orice $x\in\mathbf{R}$, i.e., pentru orice șir monoton crescator de valori x_n care tinde la x, atunci când n tinde la $+\infty$, sirul corespunzător de valori $F(x_n)$ are drept limită valoarea $F(x)$, fapt ce se noteaza, pe scurt, $F(x-0)=F(x)$;

3) $F(+\infty) = 1$ și $F(-\infty)=0$.

Observație. ProprietŁ˝Ħe 1)-3) sunt caracteristice numai si numai func˝Ħlor de reparti˝Ħe in sensul ca, are loc ’Ħ reciproca acestei teoreme, conform cŁreia: ***pentru orice funcție $F : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ce posedă proprietățile 1)-3) putem construi (neunivoc) un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ și o v.a. ξ definită pe el, astfel încât funcțtia ei de repartițtie coincide cu F.***

Propoziție (*Formule de calcul ale probabilităților pe baza f.r.*) *Fie ξ o v.a. cu f.r. $F(x)$. Atunci pentru orice $a\leq b$, $a,b\in\mathbf{R}$, au loc urmatoarele formule:*

a) $\boldsymbol{P}(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$;

b) $\boldsymbol{P}(\xi \ge a) = 1 - F(a)$;

c) $\boldsymbol{P}(\xi = a) = F(a+0) - F(a)$, *prin* $F(a+0)$ *fiind notată* ***limita la dreap-ta*** *a funcției F în punctul a;*

d) $\boldsymbol{P}(a \le \xi \le b) = F(b+a) - F(a)$;

e) $\boldsymbol{P}(a < \xi < b) = F(b) - F(a+0)$;

f) $\boldsymbol{P}(a < \xi \le b) = F(b+0) - F(a+0)$.

Observație. Din formula *c)* rezultŁ cŁ pentru acele v.a. a caror f.r. este continuŁ, $\boldsymbol{P}(\xi = a) = 0$ pentru orice numar real *a,* deorece in acest caz $F(a+0) = F(a)$.

3.2.4. Exemple

Exemplul 1. ConsiderŁm v.a. ξ cu f.r. datŁ de formula:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

1) SŁ se defineascŁ aceastŁ funcŞe de repartiŞe în Sistemul Mathematica. 2) SŁ se construiascŁ graficul funcŞei $F(x)$.

3) SŁ se calculeze probabilitatea evenimentului $(0 \le \xi < 1)$.

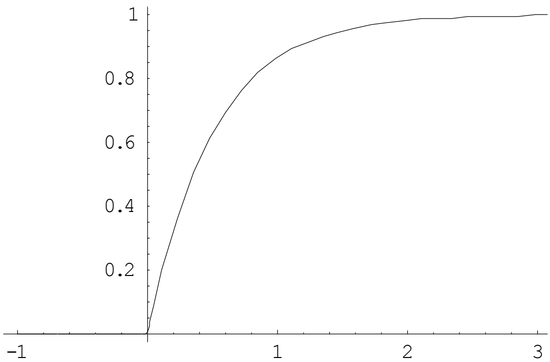
4) SŁ se calculeze probabilitatea evenimentului $(\xi \ge 2)$.

Rezolvare. 1) Definim funcŞa $F(x)$ în Sistemul Mathematica cu ajutorul operatorului **Condition**, notat кi cu **/;**.

In[1]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=1–Exp[–2*x]/;x>0;

2) Pentru construcŞa graficului funcŞei F(x) folosim fincŞa **Plot**.

In[2]:=Plot[F[x],{x,–1,5}]



Out[2]=Graphics

3) AplicŁm formula *a)* din Propozi˜Ie.

In[3]:=N[F[1]−F[0]]

Out[3]=0.86465

Am obŞinut $P(0\leq\xi<1)=0{,}86465$.

4) Pentru calculul probabilitŁŞi folosim formula *b)* din Propozi˜Ie.

In[4]:=N[1−F[2]]

Out[4]=0.0183156

Am obŞinut $P(\xi\geq 2) = 0{,}0183156$.

Rezolvarea problemei s-a terminat, dar , deoarece la rezolvarea pro-blemei urmŁtoare se va folosi, din nou, notaŞia *F(x)*, curŁ˜Im conŞinutul ei, ce corespunde problemei rezolvate mai sus, apelând la operatorul **Clear**.

In[5]:=Clear[F].

3.3. V.a. de tip discret si Caracteristicile lor numerice

În Teoria ProbabilitŁ˜Ilor sunt studiate 3 tipuri de v.a.: discrete, (absolut) continue si singulare, interesante din punct de vedere ale aplicaŞiilor fiind doar primele douŁ.

3.3.1. Definiţia v.a. de tip discret

Fie (Ω, $\mathscr{F}$, $\boldsymbol{P}$) un câmp de probabilitate ¸i $\xi : \Omega\to\mathbf{R}$ o v.a.

Definiție. Variabila ξ se numește *variabilă aleatoare de tip discret* dacă mulțimea valorilor posibile ale acesteia este finită sau infinită, cel mult numerabilă.

Drept exemple de v.a. de tip discret putem lua numarul de steme apărute la aruncarea unei monede de *n* ori, numărul de puncte apărute la aruncarea unui zar o singură data, numărul de apeluri telefonice inregistrate la Urgența Medicală pe parcursul a 24 de ore, numărul de erori descoperite în urma compilării unui soft, etc.,etc.

3.3.2. Repartiţia (distribuția) probabilistă a v.a. de tip discret

Fie ξ o v.a. de tip discret definită pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$, adică aceasta ia, in calitate de valori posibile, valori din mulimea $\mathscr{X}=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$, unde $x_1<x_2<...<x_n<...$. După cum am văzut, indiferent de tipul v.a., aceasta poate fi definită și prin intermediul funcției ei de repartiție $F(x)$, dar în caz discret mai exista o modalitate echivalentă de a defini v.a. și anume, cu ajutorul noțiunii de repartiție a v.a.

Definiție. Vom numi ***repartiție probabilistă*** *(simplu, repartiție)* a v.a. ξ setul de perechi ordonate $\{(x_i,p_i)\}_{i\geq 1}$ sau tabloul de forma

$$\xi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix},$$

unde $p_i = P(\xi = x_i) \geq 0$, $i \geq 1$, $\Sigma_{i\geq 1}\, p_i = 1$. (3)

Următoarea afirmație arată că, în caz discret, ***f.r. și repartiția v.a. ξ sunt două forme echivalente de modelare matematica (probabilistă) a ei***.

Propoziție. *F.r. și repartiția unei v.a. ξ de tip discret sunt legate între ele conform urmatoarelor formule:*

a) $F(x) = \sum_{x_j<x} p_j$; (4)

b) mulțimea de valor posibile a v.a. ξ este dată de $\mathscr{X}=\{x_1,x_2,...,x_n,...\} = \{x \in \boldsymbol{R} : F(x+0)-F(x)>0\}$ *iar probabiltățile* $p_i = P(\xi = x_i) = F(x+0)-F(x),\ i \geq 1.$ (5)

Concluzie. Din aceastŁ propozi˜Ħ rezultŁ cŁ f.r. кi repartiŞa unei v.a. de tip discret sunt *două forme echivalente de modelare probabilistă ce descriu legea care guvernează comportamentul probabilist al v.a.*. Mai mult, o v.a. de tip discret este definitŁ, dacŁ se cunoaкte legea ei de repartiŞe: sau sub formŁ de funcŞe de repartiŞe, sau sub formŁ de repartiŞe.

3.3.3. Caracteristice numerice ale v. a. de tip discret

Cunoa'Ħerea legitŁ˜Ħ de repartiŞe (f.r. sau reparti˜Ħ) a unei v. a. o putem considera o cunoastere exaustivŁ (completŁ) a acesteia din punct de vedere al comportamentului ei probabilist. Însa, uneori, în dependen˜Ħde scopul urmŁrit, este de ajuns sŁ cunoaкtem doar careva valori numerice ce caracterizeazŁ sumar v.a. datŁ. Astfel de valori se numesc *caracteristici numerice*.

Printre caracteristicile numerice care joacŁ rolul de *parametri de poziție sau parametri ai tendinței centrale se enumără valoarea medie si modul(moda).*

1) Valoarea medie.

Definiție. Vom numi ***valoare medie*** a unei v.a. discrete ξ date de reparti˜Ħ (3) numŁrul

$$M\xi = \Sigma_{i\geq 1} x_i p_i \,. \qquad (6)$$

Observație. În cazul când multimea de valori posibile a v.a. este finitŁ suma din partea dreapta a formulei (6) este o sumŁ finitŁ. Dar dacŁ multimea de valori posibile a v.a. este infinitŁ numŁrabilŁ, atunci vom spune ca ***valoarea medie $M\xi$ există dacă seria numerică*** $\Sigma_{i\geq 1} x_i p_i$ ***converge absolut***, *adica* $\Sigma_{i\geq 1} |x_i| p_i < +\infty$.

Valoarea medie a v.a. $M\xi$ a variabilei aleatoare ξ se mai noteazŁ m_ξ sau $E\xi$.

DacŁ numŁrul de experimente repetate în care sunt vizate valorile v.a. ξ este destul de mare, atunci media aritmeticŁ a valorilor observate este aproximativ egalŁ cu valoarea ei medie. În aceasta constŁ sensul valorii medii.

Propozitia 1 (***Proprietatile valorii medii***). *Valoarea medie poseda urmatoarele proprietati:*

1. *Daca v.a.* ξ *ia valori nenegative cu probabilitatea* 1, *atunci* $\boldsymbol{M}\xi\geq 0$ *şi* $\boldsymbol{M}\xi=0$ *daca si numai daca v.a.* ξ *ia vloarea 0 cu probabilitatea* 1;
2. *Daca exista valorile medii ale v.a.* ξ, η, *atunci exista si valoarea medie a v.a.* $a\xi+\beta\eta$ *si* $\boldsymbol{M}(a\xi+\beta\eta)= a\boldsymbol{M}\xi+ b\boldsymbol{M}\eta$ *pentru orice numere reale a si b;*
3. *Daca există valoarea medie a v.a.* ξ, *atuni* $/\boldsymbol{M}\xi/\leq \boldsymbol{M}/\xi/$;
4. *Daca există valorile medii ale v.a.* ξ, η *şi aceste v.a. sunt independente in sensul ca* $\boldsymbol{P}(\xi =x,\ \eta=y)$, *pentru orice x si y din multimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci exista si valoarea medie a produsului* $\xi\cdot\eta$ *si* $\boldsymbol{M}\xi\cdot\eta=M\xi\cdot M\eta$.

Urmatoarea propozitie ne arata cum poate fi calculata valoarea medie a unei functii de v.a.d. ξ atunci cand se cunoaste doar repartiatia lui ξ.

Propozitie (*Formula de transport*). *Daca v.a.d.* ξ *este data de repartitia* (3) *si f(x) este o functie continua definita pe multimea numerelor reale, astfel incat v.a.* $\eta=f(\xi)$ *poseda valoare medie, atunci* $\boldsymbol{M}\eta=\boldsymbol{M}f(\xi) =\Sigma_{\iota\geq 1} f(x_i)p_i$.

2) Modul Se numeкte *mod* (modŁ) a unei v.a.de tip discret acea valoare posibilŁ a ei, careia 'Е corespunde probabilitatea maximŁ.

Modul variabilei aleatoare ξ se noteazŁ cu $Mo[\xi]$. Din definiŞa modului rezultŁ cŁ

$$Mo[\xi]=x_{j_0}\text{, unde } p_{j_0}=\max_{1\leq j\leq n}\{p_j\}. \qquad (7)$$

3) Variabile aleatoare centrate. Dispersia (varianța). Abaterea medie pătratică. Fie ξ o variabilŁ aleatoare cu valoarea medie m_ξ. Expresia

$$\xi^o=\xi-m_\xi \qquad (8)$$

se numeкte *variabilă aleatoare centrată.* Valoarea medie a variabilei aleatoare centrate este nulŁ.

Definiţia 1. Se numeкte *dispersie (varianță)* a variabilei aleatoare ξ valoarea medie a a pŁtratului variabilei aleatoare centrate ξ^o. Dispersia variabilei aleatoare ξ se noteazŁ cu $D\xi$, sau D_ξ, sau Varξ. Din definiŞa dispersiei rezultŁ cŁ

$$D\xi = M(\xi^o)^2 = M(\xi - m_\xi)^2. \qquad (9)$$

Formula de calcul a dispersiei variabilei aleatoare de tip discret este:

$$D\xi = \sum_{j=1}^{n} (x_j - m_\xi)^2 p_j \ . \qquad (10)$$

In caz general,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \qquad (11)$$

Ra”Hunea întroducerii no”Hunii de dispersie rezidŁ în faptul ca aceasta caracterizeazŁ *gradul de dispersare (împrăştiere)* a valorilor posibile ale unei v. a. în raport cu valoarea ei medie. Mai exact, cu cat dispersia este mai mica cu atat aceasta imprastiere este mai mica si invers.

Definiţia 2. Se numeкte *abatere medie pătratică sau abatere standart* a unei v.a. rŁdŁcina pŁtratŁ din dispersia ei. Abaterea medie pŁtraticŁ a variabilei aleatoare ξ se noteazŁ cu σ[ξ] sau σ_ξ. Din definiŞe rezultŁ cŁ

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi} \ . \qquad (12)$$

Observatie. In aplicatii, pentru a caracteriza gradul de imprastiere a valorilor v.a. cercetate in raport cu valoarea ei medie, este mai usor sa operam cu abaterea medie pŁtraticŁ, deoarece aceasta se exprima in aceleasi unitati de masura ca si v.a. si valoarea ei medie.

Propozitia 2 (***Proprietatile dispersiei***). *Dispersia poseda urmatoarele proprietati:*

1. *Daca dispersia v.a. ξ exista, , atunci* $\boldsymbol{D}\xi \geq 0$ *şi* $\boldsymbol{D}\xi = 0$ *daca si numai daca v.a. ξ ia valoarea* $\boldsymbol{M}\xi$ *cu probabilitatea* 1;
2. *Daca exista dispersia v.a. ξ, atunci exista si dispersia v.a.* $a\xi + b$ *si* $\boldsymbol{D}(a\xi+b) = a^2\, \boldsymbol{D}\xi$ *pentru orice numere reale a si b;*
3. *Daca exista dispersiile v.a. ξ , η, atunci exista si dispersia v.a.* $\xi+\eta$ *si* $\boldsymbol{D}(\xi\pm\eta) = \boldsymbol{M}\xi + \boldsymbol{M}\eta \pm 2\boldsymbol{M}(\xi - \boldsymbol{M}\xi)(\eta - \boldsymbol{M}\eta)$*;*
4. *Daca există dispersiile v.a. ξ , η şi aceste v.a. sunt independente in sensul ca* $\boldsymbol{P}(\xi = a,\ \eta = b)$*, pentru orice a si b din*

multimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci exista si dispersia v.a. $\xi+\eta$ si $\boldsymbol{D}(\xi+\eta)=\boldsymbol{D}\xi+\boldsymbol{D}\eta$.

Definitie. Se numeste *covarianță* a v.a. ξ,η numarul $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\boldsymbol{M}(\xi-\boldsymbol{M}\xi)(\eta-\boldsymbol{M}\eta)$

Observatie. Proprietatile 3 si 4 ale dispersiei arata ca $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$, atunci cand v.a. ξ,η sunt independente.

3) **Momente iniţiale.**

Definiţie. Se numeкte *moment iniţial de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a acestei v.a. luate la puterea *s*. Momentul iniŞal de ordinul *s* al v.a. ξ se noteazŁ cu $\alpha_s[\xi]$. Din definiŞa momentelor iniŞale rezultŁ cŁ:

$$\alpha_s[\xi] = M\xi^s,\ s = 1, 2,... \qquad (13)$$

iar *formula de calcul al momentului iniţial de ordinul s al unei v.a.de tip discret* este

$$\alpha_s[\xi]=\sum_{j\geq 1} x_j^s p_j,\ \mathrm{s}=1,2,... \qquad (14)$$

ObservŁm cŁ valoarea medie coincide cu momentul iniŞal de ordinul întâi.

4) **Momente centrate.**

Definiție. Se numeкte *moment centrat* (sau *central*) *de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a puterii *s* a variabilei centrate respective. Momentul centrat de ordinul *s* al v.a. ξ se noteazŁ cu $\mu_s[\xi]$. Din definiŞe rezultŁ cŁ

$$\mu_s[\xi] = M(\xi^o)^s,\ \mathrm{s} = 1, 2,... \qquad (15)$$

Formula de calcul al momentului centrat de ordinul s al unei v.a.de tip discret are forma

$$\mu_s[\xi]=\sum_{j\geq 1}(x_j-m_\xi)^s p_j\ ,\ s = 1, 2,... \qquad (16)$$

Au loc egalitŁŞle $\mu_1[\xi] = 0$, $\mu_2[\xi] = D\xi$.

RelaŞile duntre momentele centrate кi cele iniŞale sunt:

1) $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$;

2) $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$;

3) $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$.

5) Asimetria.

Definiție. Se numeкte *asimetrie* (*coeficient de asimetrie*) al v.a. ξ numŁrul notat cu S_k кi dat de egalitatea

$$S_k[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{17}$$

6) Excesul.

Definiție. Se numeкte *exces* al v.a. ξ numŁrul notat cu ε sau $Ex[\xi]$ кi definit prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{18}$$

3.3.5. Exemple de determinare a funcţiei de repartiţie şi de calcul al valorilor caracteristice ale unei v.a.de tip discret.

Exemplul 2. Se dŁ v.a.de tip discret cu repartiŞa

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Se cere: 1) sŁ se defineascŁ (sŁ se introducŁ) în Sistemul Mathematica v.a. ξ; 2) sŁ se determine funcŞa ei de repartiŞe $F(x)$; 3) sŁ se introducŁ funcŞa de repartiŞe în Sistemul Mathematica; 4) sŁ se construeascŁ graficul funcŞei $F(x)$; 5) sŁ se calculeze probabilitatea ca v.a. ξ va lua valori din intervalul [3, 8).

Rezolvare. 1) Introducem reparti˜Ł v.a. ξ sub formŁ de listŁ cu douŁ linii, elementele cŁrora sunt elementele liniilor matricei (19).

In[6]:=p={{0,2,5,7},{0.3,0.4,0.1,0.2}}

Scriem **p** în forma matricealŁ cu ajutorul funcŞei **MatrixForm**.

In[7]:=MatrixForm[p]

Out[7]= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

2)Aplicând formula (4), gŁsim funcŞa de repartiŞe

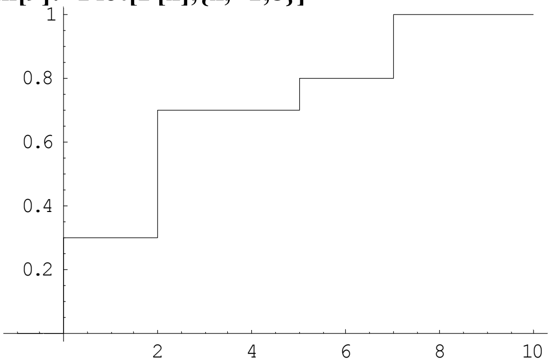
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 0{,}3, & 0<x\le 2,\\ 0{,}7, & 2<x\le 5,\\ 0{,}8, & 5<x\le 7,\\ 1, & x>7. \end{cases}$$

3) Introducem funcŞa F(x) în Sistemul Mathematica cu ajutorul funcŞei **Condition**, notatŁ кi cu **/;**.

In[8]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=0.3/;0<x≤2;F[x_]:=0.7/;2<x≤5;F[x_]:=0.8/;5<x≤7;F[x_]:=1/;7<x;

4) Construim graficul funcŞei de repartiŞe cu ajutorul funcŞei **Plot**.

In[9]:=Plot[F[x],{x,–1,8}]



Out[9]=Graphics

5) Folosim formula *a)* din Propozitie, vezi punctul 3.2.3 al acestui capitol:

In[10]:=P(3≤ξ<8)=F[8]–F[3]

Out[10]=0.3

Rezolvarea exerciŞului s-a terminat. Cum funcŞa de repartiŞe $F(x)$ din acest exerciŞu nu se foloseкte în exerciŞile ce urmeazŁ, dar notaŞa se foloseкte, trebuie sŁ scoatem definiŞa ei din Sistem. Matricea **p** mai rŁmâne în Sistem deoarece ea se va folosi la rezolvarea exerciŞului urmŁtor.

In[10]:=Clear[F].∆

Exerciţiul 3. Fiind datŁ aceeasi v.a. ξ cu repartiŞa (19), sŁ se calculeze: 1) valoarea medie; 2) dispersia; 3) abaterea medie pŁtraticŁ; 4) momentele iniŞale de ordine pânŁ la 4 inclusiv; 5) momemtele centrate de ordine pânŁ la 4 inclusiv; 6) asimetria; 7) excesul.

Rezolvare. 1) CalculŁm valoarea medie cu ajutorul formulei (6).

In[11]:= $m_\xi = \sum_{j=1}^{4} p[[1, j]]p[[2, j]]$

Out[11]=2.7

Am obŞnut m_ξ=2,7. Aici **p[i,j]** este notaŞa elementului p_{ij} al matricei **p**.

2) DeterminŁm dispersia conform formulei (12).

In[12]:= $D\xi = \sum_{j=1}^{4} ((p[[1, j]] - m_\xi)\text{^}2)\, p[[2, j]]$

Out[12]=6.61

Am obŞnut $D\xi$=6,61.

3) AplicŁm formula (13).

In[13]:= $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Out[13]=2.57099

Am obŞnut σ_ξ=2,57099.

4) Pentru calculul momentelor iniŞale folosim formulele (14).

In[14]:= $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{4} ((p[[1, j]])\text{^}1)\, p[[2, j]]$

Out[14]=2.7

In[15]:= $\alpha_2 = \sum_{j=1}^{4} ((p[[1, j]])\text{^}2)\, p[[2, j]]$

Out[15]=13.9

In[16]:= $\alpha_3 = \sum_{j=1}^{4} ((p[[1, j]])\text{^}3)\, p[[2, j]]$

Out[16]=84.3

In[17]:= $\alpha_4 = \sum_{j=1}^{4} ((p[[1, j]])\text{^}4)\, p[[2, j]]$

Out[17]=549.1

Am obŞnut α_1=2,7; α_2=13,9; α_3=84,3; α_4=549,1.

5) Calculăm momentele centrate conform formulelor (16).

In[18]:= $\mu_1 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\wedge 1)p[[2,j]]$

Out[18]=-1.11022×10^{-16}

Se ştie că $\mu_1 = 0$. Aici am obţinut un număr foarte aproape, dar totuşi diferit de zero. Aceasta se întâmplă uneori când se operează cu numere aproximative. După rotundire se obţine aceeaşi valoare 0.

In[19]:= $\mu_2 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\wedge 2)p[[2,j]]$

Out[19]=6.61

In[20]:= $\mu_3 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\wedge 3)p[[2,j]]$

Out[20]=11.076

In[21]:= $\mu_4 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\wedge 4)p[[2,j]]$

Out[21]=87.2137

Am obţinut μ_1=0; μ_2=6,61; μ_3=11;076, μ_4=87,2137.

6) Calculăm asimetria conform formulei (17).

In[22]:=Sk[ξ]=μ_3/σ^3

Out[22]=0.65175

7) Calculăm excesul conform formulei (18).

In[22]:=Ex[ξ]=$\mu_4/\sigma^4 - 3$

Out[22]=–1.0039

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Eliberăm parametrii de valorile atribuite în acest exerciţiu.

In[23]:=Clear[p,m_ξ,D_ξ,σ_ξ,α_1,α_2,α_4, μ_1,μ_2,μ_3,μ_4,Sk[ξ],Ex[ξ]].Δ

3.4. Repartiţii (modele probabiliste) uzuale (clasice) in caz discret.

3.4.1. Funcţia generatoare a variabilei aleatoare

În caz discret este comod uneori ca probabilităţile sau caracteristicele numerice ale unei v.a. ce poate lua valori din multimea numerelor naturale, inclusiv 0, să fie calculate cu ajutorul unei funcţii numite *funcţie generatoare* .

Fie cŁ variabila aleatoare ξ are repartiŞa

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Definiţie.Se numeкte *funcţie generatoare* a v.a. (20) funcŞa $\varphi(z)$ definitŁ prin egalitatea

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad , \qquad (21)$$

unde z este un parametru, care ia valori din intervalul (0;1].

În cazul când v.a. ξ ia valori dintr-o mulŞme finitŁ de valori, atunci în expresia (21) coeficienŞi p_k, începând cu un anume indice, sunt egali cu zero. Se demonstreazŁ cŁ

$$\alpha_1[\xi] = M\xi = \varphi'(1). \qquad (22)$$

$$\alpha_2[\xi] = \varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (23)$$

$$\alpha_3[\xi] = \varphi'''(1) + 3\varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (24)$$

$$D\xi = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2. \qquad (25)$$

3.4.2. Repartiţiile uniformă, Bernoulli şi binomială

Definiţie. Vom spune cŁ v.a. ξ este *repartizată uniform (de tip discret)* dacŁ valorile posibile ale ei sunt *0, 1, 2, ..., n*, iar probabilitŁŞle acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = 1/(n+1),, k = 0,1,2,\dots,n., \qquad (26).$$

Mai exista si varianta de repartitie uniforma trunchiata in zer, adica valorile posibile ale v.a. sunt 1,2,é ,n, iar

$$p_k = P(\xi = k) = 1/n, k = 0,1,2,\dots,n., \qquad (26').$$

Observaţie. RepartiŞa uniformŁ data de formulele (26) sau (26') modeleazŁ din punct de vedere matematic alegerea la intÂmplare a unui element dintr-o multime de elemente numerotate *0,1,2,…,n* sau *1,2,…,n*, respectiv.

Definiţie. Vom spune cŁ v.a. ξ este *repartizată binomial* cu parametri n кi p dacŁ valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2, ..., n, iar probabilitŁŞle acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0,1,2,\ldots,n., \qquad (26).$$

In particular, *atunci când n=1, repartiția Binomială se numeşte repartiție Bernoulli.*

O repartiŞe binomialŁ de parametri n ki p se noteazŁ cu $Bi(n, p)$. Din definiŞe rezultŁ cŁ o v.a. repartizata binomial sau Bernoulli pot fi date, respectiv, sub forma:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ C_n^0 p^0 q^{n-0} & C_n^1 p^1 q^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & C_n^n p^n q^0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Observaţie. RepartiŞa binomialŁ modeleazŁ, din punct de vedere matematic, numŁrul total ξ de Ăsuccese òîn n probe Bernoulli cu una si aceeasi probabilitate p a Ăsuccesului òîn fiecare probŁ.

Folosind funcŞa generatoare se deduc urmŁtoarele formule:

$$M\xi = \alpha_1[\xi] = np, \qquad (29)$$

$$D\xi = npq, \qquad (30)$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{npq}\,. \qquad (31)$$

DacŁ $np-q$ este numŁr întreg, atunci valoarea maximŁ a probabilitŁŞi $P_n(k)$ se atinge pentru douŁ valori ale lui k: $k_0 = np-q$ ki $k_0' = np-q+1 = np+p$. DacŁ $np-q$ este un numŁr fracŞonar, atunci valoarea maximŁ a probabilitŁŞi $P_n(k)$ se atinge în punctul $k_0 = [np-q]+1$, unde $[np-q]$ este partea întreagŁ a numŁrului $np-q$.

Exemplul 4. Un eveniment aleator A, conven˝Hional numit Ăsuccesò poate apŁrea într-un experiment aleatoar cu probabilitatea $p = 0{,}3$. Se efectueazŁ 1000 de repetŁri independente ale acestui experiment. Se cere: 1) sŁ se scrie repartiŞa variabilei aleatoare ξ care reprezintŁ numŁrul total de apariŞi ale evenimentului A; 2) sa se calculeze $Mo[\xi]$, 3) $M\xi$, 4) $D\xi$, 5) $\sigma[\xi]$, 6) $P(250 \le \xi \le 350)$.

Rezolvare. 1) V.a. ξ poate lua una din valorile: 0, 1, 2,é , 1000. ProbabilitŁŞle acestor valori se calculeazŁ conform formulei Bernoulli. Deci v.a. ξ are repartiŞa

$$p_k = P(\xi = k) = P_{1000}(k) = C_{1000}^{k}(0{,}3)^k(0{,}7)^{1000-k}$$, k = 0, 1, 2,é , 1000.

2) Cum $np-q$ = 1000·0,3–0,7 = 299,3 este un numŁr fracŞonar, rezultŁ cŁ modul, adicŁ valoarea posibilŁ care corespunde celei mai mari probabilitŁŞ este: $Mo[\xi]$ = [299,3]+1 = 299+1 = 300.

3) $M\xi = np$ = 1000·0,3 = 300.

4) $D\xi = npq$ = 1000·0,3·0,7 = 210.

5) $\sigma[\xi] = \sqrt{npq} = \sqrt{210}.$

6) CalculŁm probabilitatea cerutŁ

$$P(250 \le \xi \le 350) = \sum_{k=250}^{350} C_{1000}^{k}(0{,}3)^k(0{,}7)^{1000-k}$$

cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[24]:=N[$\displaystyle\sum_{k=250}^{350} \frac{(1000!)*((0.3)\wedge k)*((0.7)\wedge(1000-k))}{(k!)*((1000-k))!}$]

Out[24]=0.999509

Am obŞnut $P(250 \le \xi \le 350)$=0,999509.

3.4.3. Repartiţia Poisson

Definiţia 1. Vom spune cŁ v.a. ξ are *repartiţia Poisson cu parametrul a*, $a > 0$, dacŁ ea poate lua in calitate de valori posibile una din valorile 0, 1, ..., k,..., probabilitŁŞle cŁrora sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

unde a este un parametru real pozitiv.

RepartiŞa Poisson de parametru a se noteazŁ cu *Poisson*(a). Din definiŞe rezultŁ cŁ o v.a. ξ cu repartiŞa Poisson de parametru a poate fi scrisŁ in forma

$$\xi:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{a^0}{0!}e^{-a} & \frac{a^1}{1!}e^{-a} & \ldots & \frac{a^k}{k!}e^{-a} & \ldots \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

DacŁ numerele n кi k sunt relativ mari кi $npq < 9$, atunci repartiŞa binomialŁ de parametri n кi p poate fi aproximatŁ cu ajutorul repartiŞei Poisson de parametru $a = np$.

Folosind funcŞa generatoare, obŞnem cŁ:

$$M\xi = D\xi = a;\ \sigma[\xi] = \sqrt{a}\ . \qquad (34)$$

DacŁ a este numŁr întreg, atunci p_k îкi atinge valoarea maximŁ pentru $k_0 = a$ кi $k_0 = a-1$. DacŁ a este fracŞonar, atunci $Mo[\xi]=[a]+1$.

Definiţia 2. Se numeкte *flux de evenimente* un кir de evenimente aleatoare, care se produc în momente aleatoare de timp. Un flux de evenimente se numeкte *flux Poisson* dacŁ el are proprietŁŞle:

a) este staŞonar, adicŁ probabilitatea ca într-un anume interval de timp se vor realiza exact k evenimente depinde numai de numŁrul k кi de lungimea (durata) intervalului de timp кi nu depinde de începutul lui;

b) probabilitatea realizŁrii a k evenimente într-un anume interval de timp nu depinde de numŁrul de evenimente care s-au realizat înainte de începerea acestui interval;

c) realizarea a douŁ sau mai multe evenimente într-un interval mic de timp are, practic, probabilitate nulŁ.

NumŁrul mediu de evenimente dintr-un flux Poisson care se realizeazŁ într-o unitate de timp se numeкte *intensitate a fluxului*. Vom nota intensitatea fluxului cu *a*. Atunci are loc urmŁtoarea

Propoziție. *Numărul de realizări ale evenimentelor din fluxul Poisson în t unităţi de timp este o v.a. cu repartiţia*

$$P_t(k) = \frac{(at)^k}{k!}e^{-at},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Pentru $t = 1$ din formula precedentŁ se obŞne repartiŞa Poisson.

Observaţie. RepartiŞa Poisson modeleazŁ, din punct de vedere matematic comportamentul probabilistic al:

1) numŁrului de particule α (alfa) emise de o substanŞŁ radioactivŁ intr-un anumit interval de timp;

2) numŁrului de automobile care vin la o staŞe de alimentare cu benzinŁ într-o unitate de timp;

3) numŁrului de clienŞ care se adreseazŁ la un oficiu poкtal într-o zi;

4) numŁrului de apeluri la un post telefonic într-o unitate de timp;

5) numŁrului de erori de programare comise de un programator intr-un soft de o anumitŁ lungime;

6) numŁrului de bacterii descoperite intr-o picŁturŁ de apŁ;

7) numŁrului de erori de tipar care se conŞn pe o paginŁ (sau un grup de pagini) dintr-o carte;

8) numŁrului de 3 gemeni noi nŁscuŞ în decurs de un an în careva ŞarŁ;

9) numŁrului de oameni dintr-o anumitŁ ŞarŁ care au depŁкit vârsta de 100 de ani;

10) numŁrului de cutremure de pŁmânt care au loc într-o regiune seismicŁ într-o unitate de timp;

11) numŁrului de accidente rutiere produse într-un oraк, într-o unitate de timp;

12) numŁrului de decese printre asiguraŞi unei companii de asigurare într-o unitate de timp, etc., etc.

Exemplul 5. NumŁrul mediu de solicitŁri de taxi recepŞonate la un dispecerat într-un minut este egal cu 2. SŁ se calculeze probabilitŁŞle evenimentelor: A = {*în decursul a unui minut va fi recepţionată o singură solicitare*}, B = {*în decursul unui minut vor fi recepţionate nu mai mult de 2 solicitări*}, C = {*în decurs de 1 minut vor fi recepţionate mai mult de 2 solicitări*}.

Rezolvare. Variabila aleatoare ξ care reprezintŁ numŁrul de solicitŁri de taxi într-un minut are repartiŞa Poisson de parametru a = 2. AceastŁ variabilŁ aleatoare are repartiŞa

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}, \; k = 0,\ 1,\ 2,\text{é} \qquad (35)$$

1) Cum $P(A) = P(\xi = 1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2}$ avem:

In[25]:=N[$\frac{2^1}{1!} e^{-2}$]

Out[25]=0.270671

2) Cum $P(B) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)$ din (8.2.35) avem:

In[26]:=N[$\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}$]

Out[26]=0.676676

3) Cum $P(C) = 1 - P(B)$, avem :

In[27]:=N[1–0.676676]

Out[27]=0.323224

Am obţinut $P(A)$=0,270671, $P(B)$=0,676676, $P(C)$=0,323224.Δ

3.4.4. Repartiţia geometrică

Definiţie. Vom spune că o variabilă aleatoare ξ are *repartiţia geometrică* de parametru p, dacă valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2,… , k,.. şi probabilităţile lor sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^k p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 0, 1, 2,\ldots \qquad (36)$$

In caz ca repartiţia este dată de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^{k-1} p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 1, 2,\ldots \qquad (37)$$

v.a. ξ se numeşte geometric repartizată trunchiată în zero.

De exemplu, repartiţia (36) poate fi scrisă în următoarea formă matriceală:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Repartiţia geometrică (36) modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ ***de „insuccese ”*** înregistrate în experimentul ce constă în repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli (cu probabilitatea p a „succesului” în fiecare probă) până la prima aparitie a Ăsuccesuluiò . Prin analogie, repartiŞa geometricŁ trunchiatŁ ’în zero (37) modeleaza, din punct de vedere matematic, numŁrul total ξ ***de probe*** (’încercŁri) efectuate ’în experimentul ce constŁ ’în repetarea uneia ºi aceleiaºi probe Bernoulli (cu probabilitatea p a Ăsuccesului òîn fiecare probŁ) pÂnŁ la prima aparitie a Ăsuccesuluiò

Cu ajutorul funcŞiei generatoare obŞinem, de exemplu, *pentru repartiţia geometrică* cŁ:

$$M\xi = 1\ \big/ p \quad D\xi = q\big/ p^2, \quad \sigma[\xi] = \sqrt{q}\big/ p. \qquad (38)$$

Analogic, pentru repartiŞa geometricŁ trunchiatŁ ’în zero

$$M[\xi] = q/p, \ \ D[\xi] = q/p^2. \qquad (39)$$

Exemplul 6. Într-o urnŁ se conŞin 2 bile albe ºi 8 bile negre. Se extrage succesiv cÂte o bilŁ, cu ’întoarcere, pânŁ la prima apariŞe a unei bile albe. SŁ se determine: 1) repartiŞa v.a. ξ care reprezintŁ numŁrul de extrageri pânŁ la prima apariŞe a unei bile albe; 2) $M\xi$; 3) $D\xi$; 4) numŁrul minim m de extrageri , suficient pentru a afirma, cu probabilitatea 0.7, cŁ pentru extragerea unei bile albe vor fi necesare, mai putin de m extrageri.

Rezolvare. 1) NotŁm cu A evenimentul care constŁ în apariŞa unei bile albe la o extragere ºi cu N evenimentul care constŁ în extragerea unei bile negre. Evident cŁ $N = \overline{A}$. Cum în urnŁ sunt 2 bile albe ºi 8 bile negre, rezultŁ cŁ $P(A) = 0{,}2$ ºi $P(N) = P(\overline{A}) = 1–0{,}2 = 0{,}8$.

Pentru ca bila albŁ sŁ aparŁ prima datŁ la prima extragere este echivalent cu faptul ca v.a ξ sŁ ia valoarea 1.Probabilitatea acestui eveniment este egalŁ cu $p_1 = P(A) = 0{,}2$. Pentru ca bila albŁ sŁ aparŁ prima datŁ la prima extragerea a doua este echivalent cu faptul ca v.a ξ sŁ ia valoarea 2. Probabilitatea acestui eveniment este egalŁ cu $p_2 = P(\xi=2) = P(\overline{A}\cap A) = P(\overline{A})P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}16$. În general, pentru ca bila albŁ sŁ aparŁ prima datŁ la prima extragerea cu numarul k este echivalent cu faptul ca v.a ξ sŁ ia valoarea k. Probabilitatea acestui eveniment este egalŁ cu

$$p_k = P(\xi=k) = P(\underbrace{\overline{A}\cap\ldots\cap\overline{A}}_{k-1\quad ori}\cap A) = 0{,}2\cdot(0{,}8)^{k-1},\ k = 1, 2,é$$

Deci variabila aleatoare ξ are o repartiŞe geometricŁ trunchiata in zero cu parametrul $p = 0{,}2$.

2) Conform formulei (39) avem: $M[\xi] = 1/0{,}2 = 5$.

3) Dintr-a doua formulŁ (39) obŞnem:

$$D[\xi] = (1-0{,}2)/(0{,}2)^2 = 20.$$

4) DeterminŁm numŁrul m din condiŞa

$$0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}8 + é \quad + 0{,}2\cdot(0{,}8)^{m-1} > 0{,}7.$$

AceastŁ inecuaŞe se reduce la inecuaŞa $m > \log_{0,8}0{,}3$.

Aici aplicŁm Sistemul Mathematica.

In[28]:=N[Log[0.8,0.3]]

Out[28]=5.3955

ObŞnem $m = 6$.

3.4.5. Repartiţia hipergeometrică

Definiţie. Vom spune cŁ o variabilŁ aleatoare ξ are o repartiŞa hipergeometricŁ de parametri a, b, n dacŁ aceasta poate lua una din valorile 0, 1, 2, é , min$\{a, n\}$ cu probabilitŁŞle

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \quad k = 0, 1, 2, é\ , \min\{a,n\}. \qquad (40)$$

Se demonstreazŁ cŁ

$$M[\xi] = na/(a+b). \qquad (41)$$

RepartiŞa hipergeometricŁ apare, de exemplu, în experimentul care constŁ în extragerea fŁrŁ intoarcere a bilelor dintr-o urnŁ care conŞne bile de douŁ culori.

3.5. V.a. de tip (absolut) continue si caracteristicele lor numerice

3.5.1. Noţiune de variabilă aleatoare de tip (absulut) continuă

Se numeкte *v.a.de tip (absolut) continuă* (v.a.c.) o variabilŁ aleatoare, a carei mulŞme de valori posibile reprezintŁ un interval de numere reale кi funcŞa de repartiŞe este continuŁ în intervalul

$(-\infty; \infty)$, dar кi derivabilŁ, cu exceptia poate cŁ, de o multime finita sau infinita cel mult numarabila de puncte de pe acest interval.

3.5.2. Exemple de variabile aleatoare continue

1) Durata funcŞonŁrii unui aparat electric este o variabilŁ aleatoare continuŁ care poate lua valori din intervalul $[0; \infty)$.

2) Fie cŁ se mŁsoarŁ lungimea unui obiect sau rezistenŞa unei linii electrice cu un aparat de mŁsurare astfel incat rezultatul mŁsurŁrii se rotunjeкte pânŁ la un numŁr întreg. Atunci eroarea de rotunjire este o v.a.c. care ia valori din intervalul $(-1; 1)$.

3) Cantitatea anualŁ de precipitaŞi atmosferice în careva regiune este o variabilŁ aleatoare continuŁ care ea valori din intervalul $[0; \infty)$.

3.5.3. Funcţia de repartiţie

FuncŞa de repartiŞe pentru orice variabilŁ aleatoare a fost definitŁ în unul din paragrafele precedente. Pentru comoditate amintim aici definiŞa кi proprietŁŞle acestei funcŞi.

Se numeкte *funcţie de repartiţie* a variabilei aleatoare ξ funcŞa $F:\mathbf{R}\to[0,1]$ definitŁ prin egalitatea

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{42}$$

*Funcţia de repartiţie are urmatoarele **proprietăţi caracteristice***:

1) $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$;

2) $F(x)$ *este o funcţie nedescrescătoare*;

3) $F(x)$ *este continuă la stânga în orice punct* $x\in\mathbf{R}$.

Din formulele de calcul ale probabilitatilor in baza f.r. deducem ca:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{43}$$

$$P(\xi = a) = 0. \tag{44}$$

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b). \tag{45}$$

3.5.4. Densitatea de repartiţie şi proprietăţile ei

Definiţie. Vom numi *densitate de repartiţie (d.r.) a v.a.c.* ξ cu f.r. $F(x)$ funcŞa $f(x)$ definitŁ prin egalitatea

$$f(x) = F'(x). \tag{46}$$

Din definiŞe rezultŁ cŁ f.r. *F(x)* a unei v.a.c. poate fi exprimata prin d.r. *f(x)* a acestei v.a ca fiind

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

În concluzie, $P(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Densitatea de repartiŞe este o formŁ alternativa a *legii de repartiţie* a unei variabile aleatoare continue, echivalenta f.r., in sensul ca daca cunoastem una din aceste forme putem restabili cealalata forma. Prima formŁ a acestei legi este funcŞa de repartiŞe. Asadar, v.a.c. este determinatŁ dacŁ este datŁ f.r. sau densitatea de repartiŞe ale ei.

Graficul d.r. a unei v.a.c. se numeкte *curbă* sau *linia ei de repartiţie* .

D. r. a v.a.c. are proprietŁŞle mentionate in urmatoarea

Propozitie. *Dacă f(x) este d.r. a v.a.c. ξ, atunci*:

1) $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}$; (47)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; (48)

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. (49)

3.5.5. Caracteristici numerice ale v.a.c

Definitie. Vom numi *valoare a v.a.c.* ξ cu d.r. $f(x)$ numŁrul $M[\xi]$ (care se noteazŁ кi cu m_ξ) definit prin egalitatea

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \,, \tag{50}$$

cu conditia ca integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$, in caz contrar vom spune ca *v.a.c.* ξ nu poseda valoare medie.

Remarcă. Toate proprietatile valorii medii enuntate in cazul v.a. de tip discret sunt valabile кi pentru v.a.c.

Se numeкte *moda* a v.a.c. numŁrul, notat cu $x_0 = Mo[\xi]$, pentru care densitatea de repartiŞe $f(x)$ ia valoarea maximala. Daca numarul acesta este unic, atunci repartitia se numeste unimodala, in caz contrar se numeste multimodala.

Se numeкte *mediană* a variabilei aleatoare ξ numŁrul, notat cu x_m (sau $Me[\xi]$), care verificŁ condiŞa

$$P(\xi < x_m) = P(\xi > x_m) = 1/2. \qquad (51)$$

CondiŞa (51) este echivalentŁ cu condiŞa

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx = 1/2. \qquad (52)$$

EcuaŞa (52), în raport cu variabila x_m, poate fi aplicatŁ la determinarea medianei.

Folosind noŞunea de valoare medie, ca кi în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, se introduc noŞunile de dispersie, abatere medie pŁtraticŁ, momente iniŞale кi momente centrate. Conditia lor de existenta este similara cu conditia de existenta a valorii medii. Scriem aici numai formulele de calcul ale lor.

Formula de calcul al dispersiei

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f(x)dx. \qquad (53)$$

Formula de calcul al abaterii medii pătratice

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi}. \qquad (54)$$

Formula de calcul al momentelor iniţiale

$$\alpha_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx, \quad s = 1, 2,... \qquad (55)$$

Formula de calcul al momentelor centrate

$$\mu_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^s f(x)dx, \quad s = 1, 2,... \qquad (56)$$

Remarcă. ProprietŁ˝Ħe dispersiei v.a.c sunt aceleasi ca si in cazul v.a. de tip discret. RelaŞile dintre momentele iniŞale кi cele centrate pentri v.a.de tip discret sunt la fel ca кi în cazul v.a. de tip discret.

Fie ξ o v.a., care poate lua numai valori nenegative, dar cu valoare medie nenula. Se numeкte *coeficient de variaţie* a acestei variabile aleatoare numŁrul v definit prin egalitatea

$$v = \sigma_\xi / m_\xi. \qquad (57)$$

Se numeкte *coeficient de asimetrie* (sau *asimetrie*) a variabilei aleatoare ξ mŁrimea, notatŁ cu *Sk*, definitŁ prin egalitatea

$$Sk[\xi] = \mu_3/\sigma^3. \qquad (58)$$

Se numeкte *exces* al variabilei aleatoare ξ mŁrimea, notatŁ cu ε sau *Ex*, definitŁ prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \mu_4/\sigma^4 - 3. \qquad (59)$$

3.5.6. Exemple

Exemplul 7. Variabila aleatoare ξ este definitŁ prin d.r.

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)/18, & x \in [2;8], \\ 0, & x \notin [2;8] \end{cases}$$

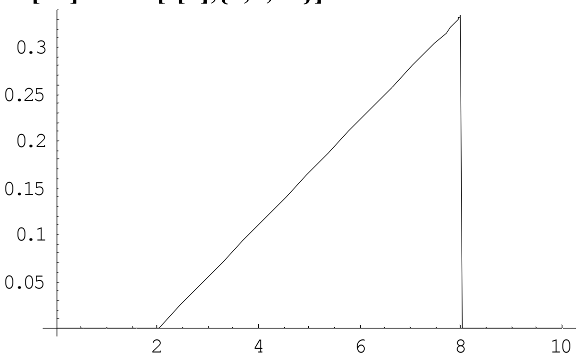
SŁ se gŁseascŁ: 1) linia de repartiŞe; 2) probabilitatea ca ξ sŁ ia valori din intervalul inchis [5; 10]; 3) f.r. кi graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pŁtraticŁ; 7) momentele iniŞale de ordinele *1,2,3 si 4*; 8) momentele centrate de ordinele *1,2,3 si 4*; 9) coeficientul de asimetrie; 10) excesul; 11) coeficientul de variaŞe.

Rezolvare. 1) Introducem densitstea de repartiŞe în Sistemul Mathematica.

In[30]:=f[x_]:=0/;x<2;f[x_]:=(x–2)/18/;2≤x≤8;f[x_]=0/;x>8;

Construim linia de repartiŞe, adicŁ graficul funcŞei f(x).

In[31]:=Plot[f[x],{x,0,10}]



Out[31] Graphics

2) CalculŁm probabilitatea cerutŁ conform formulei (47).

In[32]:=NIntegrate[f[x],{x,5,8}]

Out[32]=0.75

3) DeterminŁm f.r. Cum toate valorile posibile ale v.a.c. ξ aparŞn segmentului [2,8], rezultŁ cŁ $F(x)=0$, $x<2$, кi $F(x)=1$, $x>8$. DeterminŁm aceastŁ funcŞe pe segmentului [2,x] folosind formula (8.2.47).

In[33]:=F1[x]=$\int_2^x \frac{t-2}{18}dt$

Out[33]=$\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$

Deci funcŞa de repartiŞe este

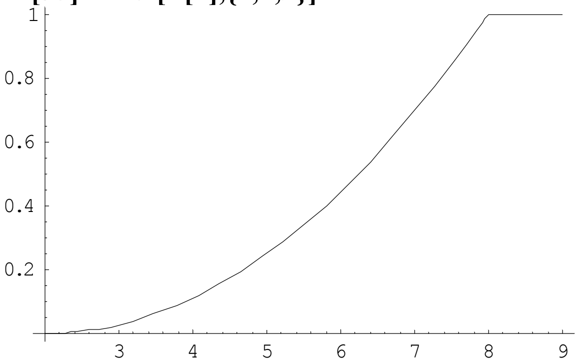
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}, & 2\le x\le 8, \\ 1, & x>8. \end{cases}$$

Introducem aceastŁ funcŞe în Sistemul Mathematica.

In[34]:=F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:=$\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$ **/;2≤x≤8/;F[x_]:=1/;x>8;**

Construim graficul funcŞei $F(x)$ cu ajutorul funcŞei **Plot**.

In[35]:=Plot[F[x],{x,2,9}]



Out[35]=Graphics

4) CalculŁm valoarea medie folosind formula (50). Avem

In[36]:=m$_\xi$**=NIntegrate[x*f[x],{x,2,8}]**

Out[36]=6.

Am obŞnut m_ξ=6.

5) CalculŁm dispersia conform formulei (53).

In[37]:=N[$\int_2^8 (x - m_\xi)^2 f(x)dx$ **]**

Out[37]=2.

6) CalculŁm abaterea medie pŁtraticŁ σ_ξ conform formulei (54).

In[38]:=σ_ξ**=**$\sqrt{2}$

Out[38]=1.41421

7) Momentul iniŞal α_1 coincide cu speranŞa matematicŁ кi deci $\alpha_1[\xi] = m_\xi = 6$. GŁsim celelalte momente iniŞale conform formulei (55).

In[39]:=N[$\int_2^8 x^2 f(x)dx$ **]**

Out[39]=38

In[40]:=N[$\int_2^8 x^3 f(x)dx$ **]**

Out[40]=250.4

In[41]:=N[$\int_2^8 x^4 f(x)dx$ **]**

Out[41]=1699.2

Am obŞnut α_1=6, α_2=38, α_3=250,4, α_4=1699,2.

7) Momentul centrat de ordinul 1 este egal cu zero pentru orice v.a.:

$\mu_1 = 0$. Momentul centrat de ordinul doi coincide cu dispersia кi deci $\mu_2 = D_\xi = 2$. CalculŁm momentele μ_3 кi μ_4 folosind formulele (55).

In[42]:=μ_3**=N[** $\int_2^8 (x - m_\xi)^3 f(x)dx$ **]**

Out[42]=–1.6

In[43]:=μ_4**=N[** $\int_2^8 (x - m_\xi)^4 f(x)dx$ **]**

Out[43]=9.6

Am obŞnut $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = -1{,}6$, $\mu_4 = 9{,}6$.

9) CalculŁm coeficientul de asimetrie conform formulei (58):

In[44]:=Sk[ξ]=$\mu_3/(\sigma_\xi)^3$
Out[44]=–0.565685

10) Folosim formula de calcul al excesului (59).

In[45]:=Ex[ξ]=$\mu_4/(\sigma_\xi)^4-3$
Out[45]=–0.6

11)CalculŁm coeficientul de variaŞe conform formulei (57).

In[46]:=$v_\xi=\sigma_\xi/m_\xi$
Out[46]=0.235702

Rezolvarea exerciŞului s-a terminat. Scoatem valorile parametrilor din acest exerciŞu.

In[47]} :=Clear[f,F,$m_\xi,\sigma_\xi,\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$,Sk[ξ],Ex[ξ],$v_\xi$].Δ

3.6. Modele probabiliste (repartiţii) te tip (absolut) continue (uzuale) clasice

3.6.1. Repartiţia uniformă

Vom spune cŁ v.a.c. ξ are *repartiţie uniformă* pe segmentul [*a*, *b*], dacŁ densitatea ei de repartiŞe are forma

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases} \tag{60}$$

În calitate de *exemplu de variabilă aleatoare cu repartiţia uniformă* poate servi durata aкteptŁrii autobusului care vine la staŞe peste fiecare 5 minute, în cazul când pasagerul vine la staŞe într-un moment aleator de timp (independent de orarul circulaŞei autobusului).

Folosind formula (49), determinŁm funcŞa de repartiŞe $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{61}$$

Valoarea medie este m_ξ = $(b+a)/2$, iar *dispersia* este D_ξ = $(b-a)^2/12$. RepartiŞa uniformŁ nu are *mod*. *Mediana* este egalŁ cu $(b+a)/2$.

In particular, atunci cand *a=0, b=1,* avem *repartitia uniforma* pe segmentul *[0,1]*. Orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) contine functia *random* cu ajutorul careia putem simula valori a unei v.a. uniform repartizate pe *[0,1]*.

Remarca. Asa cum repartitia uniforma pe *[0,1]* modeleaza, din punct de vedere matematic, experimentul imaginar, ce consta in aruncarea la intamplare a unui punct pe segmentul *[0,1]*, tot asa repartitia uniforma pe *[a,b]* modeleaza matematic experimentul imaginar cu aruncarea la intamplare a unui punct pe segmentu *[a,b]*. Are loc urmatoarea

Propozitie. *Dacă v.a. ξ este uniform repartizata pe segmentul [a,b] , atunci v.a. $\eta= (\xi-a) / (b-a)$ este uniform repartizata pe [0,1]. Dimpotriva, daca v.a. η este uniform repartizata pe [0,1], atunci v.a. $\xi =(b-a)\eta+a$ este uniform repartizata pe [a,b].*

Exemplul 8. Un troleibuz soseкte in staŞe peste fiecare 5 minute. Care este probabilitatea ca un pasager, care vine in staŞe într-un moment aleator de timp, va aкtepta troleibuzul cel mult 2 minute (evenimentul *A*)?

Rezolvare. D.r. a v.a. ξ, care reprezintŁ durata aкteptŁrii troleibuzului, este

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & x\in[0;5],\\ 0, & x\notin[0;5].\end{cases}$$

In[48]:= $P(0\le\xi\le 2)=\int_0^2 (1/5)dx$

Out[48[=2/5

Am obŞnut $P(A)$=2/5.

3.6.2. Repartiţia exponenţială

Vom spune cŁ o v.a.c. ξ are *repartiţie exponenţială* de parametru λ, $\lambda>0$, dacŁ densitatea ei de repartiŞe are forma

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad (62)$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \tag{63}$$

Folosind f.r., obŞnem probabilitatea ca o v.a. cu repartiŞe exponenŞalŁ sŁ ia valori din intervalul inchis $[a; b]$, $0 < a < b$ coincide cu:

$$P(a < \xi < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Au loc egalitŁŞle:

$$M[\xi] = 1/\lambda.\ D[\xi] = 1/\lambda^2;\ \sigma[\xi] = 1/\lambda. \tag{64}$$

Un exemplu de v.a. care are repartiŞe exponenŞalŁ de parametru λ este durata vietii unui calculator. FuncŞa

$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x},\ x \ge 0. \tag{65}$$

se numeкte *funcţie de fiabilitate* a aparatului кi valoarea ei în punctul x reprezintŁ probabilitatea ca aparatul sŁ funcŞoneze fŁrŁ refuz x unitŁŞ de timp. Or, funcŞa de fiabilitate este, prin definitie, functia

$$R(x) = 1 - F(x),\ x \ge 0.$$

Aceasta repartitie poseda o propretate remarcabila redata in urmatoarea

Propozitie *(Proprietatea lipsei „memoriei”).* *Dacă v.a. ξ este exponential repartizata cu parametrul λ, $\lambda>0$, atunci are loc proprietatea „lipsei memoriei” in sensul ca probabilitatea conditionata*

$$\boldsymbol{P}(\xi<t+h/\xi\ge t) = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda h}, & h > 0, \\ 0, & h \le 0. \end{cases}$$

Exemplul 9. Fie cŁ durata funcŞonŁrii fŁrŁ a iesi din functiune a unui PC este o variabilŁ aleatoare ξ care are repartiŞe exponenŞalŁ de paramertu $\lambda = 0{,}001$. SŁ se determine: 1) d.r.; 2) f.r.; 3) fiabilitatea; 4) valoarea medie кi dispersia; 5) probabilitatea ca PC-ul sŁ funcŞoneze fŁrŁ refuz cel puŞn 2000 de ore (evenimentul A).

Rezolvare. 1) Cum $\lambda = 0{,}001$, din (62) rezultŁ cŁ densitatea de repartiŞe a variabilei aleatoare ξ este

$$f(x)=\begin{cases}0{,}001e^{-0{,}001x},\ x\geq 0,\\ 0,\quad x<0.\end{cases}$$

2) Conform formulei (63), funcŞa de repartiŞe este

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}001x},\ x\geq 0,\\ 0,\quad x<0.\end{cases}$$

3) Din (65) rezultŁ cŁ funcŞa de fiabilitate este

$$R(x)=e^{-0{,}001x},\ x\geq 0.$$

4) Din (64) rezultŁ cŁ valoarea medie este $M[\xi]$ = 1/0,001 = 1000, iar dispersia este $D[\xi] = 1/(0{,}001)^2 = 1000000$.

5) Folosim formula (65).

In[49]:=P(ξ>2000)=N[e$^{-0.001*2000}$]

Out[49]=0.135335

Am obŞnut $P(A)$=0,135335.

3.6.3. Repartiţia normală

Vom spune cŁ v.a.c. ξ are *repartiţie normală*, dacŁ d.r. este de forma

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{66}$$

unde m ĸi $\sigma>0$ sunt valori constante reale, numite *parametri* ai repartiŞei normale.

Atunci cÂnd $m=0$ ĸi σ=1 repartiŢia se mai numeste normala standard cu parametrii 0 si 1. In acest caz functia de repartitie coincide cu

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\,.$$

Exemple de v.a.c. de repartiŞe normalŁ sunt: cantitatea anualŁ de precipitaŞi atmosferice dintr-o anumita regiune, eroarea care se obŞne la mŁsurarea unei mŁrimi cu un aparat cu gradaŞi, înŁlŞmea unui bŁrbat luat la intamplare.

Linia repartiŞei normale poartŁ denumirea de *linia lui Causs*.

Propozitie. *F.r. a v.a ξ normal repartizate cu parametrii m şi σ coincide cu*

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \tag{67}$$

unde Φ(x) este funcţia Laplace care se defineşte prin egalitatea

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt, \tag{68}$$

si reprezinta f.r. a unei v.a. repartizata normal standard cu parametrii 0,1.

Cu alte cuvinte *Φ(x),* fiind f.r. a unei v.a. normal standard repartizate cu parametrii 0 si 1, au loc egalitŁŞile:

$$m_\xi = m,\ D_\xi=\sigma^2,\ \sigma_\xi=\sigma, \tag{69}$$

$$P(\alpha\le\xi\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \tag{70}$$

Exemplul 10. Presupunem cŁ anual, cantitatea de precipitaŞi atmosferice dintr-o anumita regiune este o v.a.c. cu repartiŞe normalŁ de parametri *m* = 400 mm кi σ = 100 mm. SŁ se calculeze probabilitatea ca la anul viitor cantitatea de precipitaŞi atmosferice va intrece 500 mm (evenimentul *A*).

Rezolvare. Densitatea de repartiŞe este

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-400)^2}{2(100)^2}}.$$

Folosim formula (8.2.46).

In[50]:=N[$\int_{500}^{\infty}\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-(x-400)^2/(2*100^2)}dx$ **]**

Out[50]=0.158655

Am obŞnut *P*(*A*)=0,158655.

Sistemul Mathematica contine un pachet de programe dedicat repartiŞei normale. Acest pachet poate fi înstalat cu agutorul funcŞei **<<Statistics`NormalDistribution`.** DŁm un exemplu de utilizare a acestui pachet.

Exemplul 11. Fie ξ o v.a.c. cu repartiŞe normalŁ de parametri m=3 кi σ=2. Se cere: 1) sŁ se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) sŁ se defineascŁ (introducŁ) v.a.c. datŁ ; 3) sŁ determine d.r. ; 4) sŁ se construiascŁ linia de repartiŞe ; 5) sŁ se determine f.r.; 6) sŁ se construiascŁ graficul f.r.; 7) sŁ se construiascŁ, pe acelaкi desen, graficele d.r. кi a f.r.; 8) sŁ se construiascŁ pe acelaкi desen graficele d.r. a f.r. astfel, ca grosimea graficului densitŁŞi de repartiŞe sŁ fie egalŁ cu 0,5 din grosimea standardŁ, iar grosimea graficului funcŞei de repartiŞe sŁ fie egalŁ cu 0,9 din grosimea standardŁ.

Rezolvare. 1) Ne aflŁm (lucrŁm cu un document) în Sistemul Mathematica. InstalŁm pachetul cerut de programe.
Statistics`NormalDistribution`

2) Definim v.a.c. datŁ ξ de repartiŞe normalŁ кi îi dŁm numele **rn**.

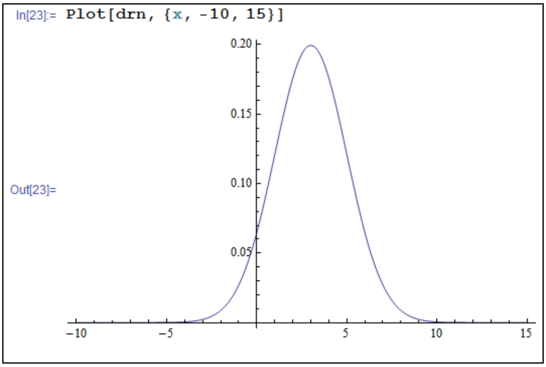
```
In[21]:= rn = NormalDistribution[3, 2]

Out[21]= NormalDistribution[3, 2]
```

3) Definim densitatea de repartiŞe кi îi nŁm numele **drn**.

```
In[22]:= drn = PDF[rn, x]
```

Out[22]= $\dfrac{e^{-\frac{1}{8}(-3+x)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$

4) Construim graficul densitŁŞi de repartiŞe drn folosind funcŞa Plot.

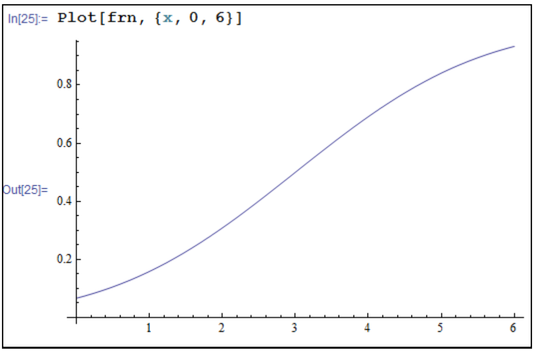


5) Definim funcŞa de repartiŞe кi îi dŁm numele **frn**.

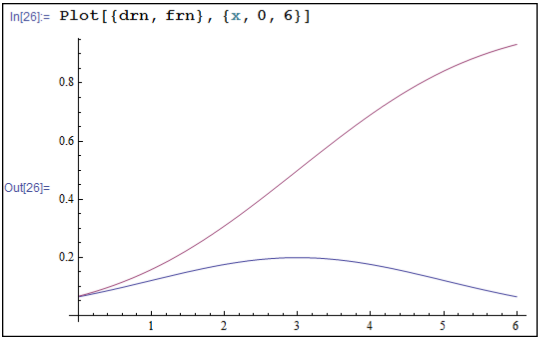
```
In[24]:= frn = CDF[rn, x]
```

Out[24]= $\frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[\frac{3-x}{2\sqrt{2}}\right]$

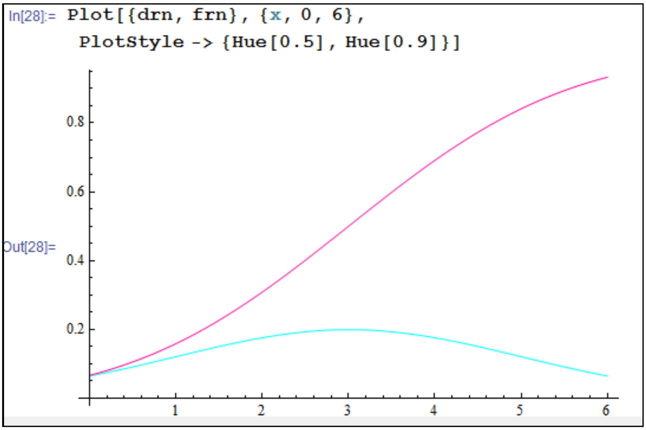
Aici funcŞa Erf este urmŁtoarea**



6)Construim graficul funcŞei de repartiŞe.



7) Construim pe acelaкi desen graficul densitŁŞi de repartiŞe cu grosimea egalŁ cu 0,5 din grosimea standardŁ кi graficul funcŞei de repartiŞe cu grosimea egalŁ cu 0,9 din grosimea standardŁ



Pe ecran apare graficul densitŁŞi de repartiŞe de culoare albastrŁ кi graficul funcŞei de repartiŞe de culoate roкie.

Rezolvarea exerciŞului s-a terminat. RŁmune sŁ scoatem valorile parametrilor.

```
In[29]:= Clear[rn, drn, frn]
```

3.6.4. Repartiţia gamma

Se spune cŁ v.a.c. continuŁ ξ are *repartiţia gamma* de parametri a ĸi b, dacŁ densitatea de repartiŞe a ei este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^{a}\Gamma(a)}, & a>0,\ b>0,\quad x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{71}$$

unde Γ este funcŞa gamma, care se defineĸte prin egalitatea

$$\Gamma(a)=\int_{0}^{\infty}t^{a-1}e^{-t}\,dt.$$

Au loc egalitŁŞle $M\xi = ba$, $D\xi = b^2 a$, $\sigma[\xi]=b\sqrt{a}$.

3.6.5. Repartiţia chi-pătrat (χ^2)

Se spune cŁ variabila aleatoare continuŁ ξ are repartiŞe chi-pŁtrat (χ^2) de parametri r ĸi σ dacŁ ea are densitatea de repartiŞe

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{r/2-1}e^{-x/(2\sigma^2)}}{2^{r/2}\sigma^{r}\Gamma(r/2)}, & \sigma>0, r\in N,\quad x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{72}$$

RepartiŞa chi-pŁtrat este un caz particular al repartiŞei gamma: funcŞa (72) se obŞne din (71) pentru $a = r/2$ ĸi $b = 2\sigma^2$. Folosind rezultatele punctului precedent, deducem cŁ pentru o variabilŁ aleatoare ξ cu repartiŞa hi-pŁtrat (71) avem:

$$M\xi = r\sigma^2,\ \ D\xi = 2r\sigma^4,\ \ \sigma[\xi] = \sigma\sqrt{2r}\,.$$

Se demonstreazŁ cŁ dacŁ ξ_1, ξ_2, ..., ξ_r sunt variabile aleatoare cu repartiŞa normalŁ de parametri $m = 0$ ĸi $\sigma = 1$, atunci variabila aleatoare

$$\xi=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_r^2$$

are repartiŞe chi-pŁtrat de parametri $\sigma = 1$ кi r.

3.7. Exerciţii pentru lucrul individual

1. Este datŁ repartiŞa v.a. de tip discret ξ:

$$\xi: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

(datele numerice se conŞn pe variante dupŁ enunŞul exerciŞului). Se cere: 1) sŁ se introducŁ în Sistemul Mathematica repartiŞa v.a.d. ξ; 2) funcŞa de repartiŞe кi graficul ei; 3) probabilitatea ca ξ va lua valori din intervalul [1; 4); 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pŁtraticŁ; 7) momentele iniŞale de ordine pânŁ la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine pânŁ la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

1) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
2) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=7$, $x_4=3$, $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
3) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
4) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
5) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$;
6) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
7) $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}1$;
8) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
9) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}6$;
10) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
11) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}1$, $p_2=06$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
12) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
13) $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
14) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
15) $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
16) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$, $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
17) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
18) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
19) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
20) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}2$;

21) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
22) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
23) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
24) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$;
25) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}3$;
26) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
27) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}1$;
28) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}2$;
29) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}3$;
30) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$.

2. Presupunem cŁ probabilitatea statisticŁ ca un copil nou nŁscut sŁ fie bŁiat este egala cu 0.51. Se cere: 1) sŁ se determine repartiŞa v.a. ξ care reprezintŁ numŁrul de bŁieŞi printre 1000 de copii noi nŁscuŞi; 2) sŁ se calculeze probabilitatea ca printre 1000 de copii noi nŁscuŞi numŁrul bŁieŞilor va fi cuprims între 300+k кi 500+k, unde k este numŁrul variantei.

3. NumŁrul ξ de particule alfa emise de un gram de substanŞŁ radioactivŁ într-o secundŁ este o v.a.d. cu repartiŞa Poisson cu parametrul a, unde a este numŁrul mediu de particule alfa emise într-o secundŁ. 1) SŁ se determine seria de repartiŞe a v.a.d. ξ. 2) SŁ se calculeze probabilitŁŞile evenimentelor: A = {*într-o secundă vor fi emise nu mai mult de două particule alfa*} кi B = {*într-o secundă vor fi emise cinci particule alfa*}, C = {*într-o secundă vor fi emise mai mult de zece particule alfa*}. Care este numŁrul de particule alfa care corespunde celei mai mari probabilitŁŞi? SŁ se considere cŁ $a=1+0{,}25n$, unde n este numŁrul variantei.

4. SŁ se scrie legea de repartiŞe a variabilei aleatoare ξ care reprezintŁ numŁrul de aruncŁri nereuкite ale unui zar pânŁ la prima apariŞe a numŁrului 4. SŁ se calculeze probabilitatea ca numarul aruncŁrilor nereusite va varia intre 5+k si 15+k , unde k este numŁrul variantei..

5. V.a.c. ξ este definitŁ de densitatea sa de repartiŞe $f(x)$. SŁ se determine: 1) reprezentarea v.a.c. ξ în Sistemul Mathematica; 2) linia de repartiŞe; 3) funcŞa de repartiŞe $F(x)$ кi graficul ei, 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pŁtraticŁ; 7) coeficientul de variaŞe; 8) momentele iniŞale de ordinele pânŁ la 4 inclusiv, 9) momentele centrale de ordinele pânŁ la 4 inclusiv; 10) asimetria; 11) excesul; 12) probabilitatea ca ξ va lua valori din prima jumŁtate a intervalului de valori posibile. FuncŞa $f(x)$ este datŁ pe variante.

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in[1,2],\\ 0, & x\notin[1,2];\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/8, & x\in[1,5],\\ 0, & x\notin[1,5];\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/25, & x\in[1,6],\\ 0, & x\notin[1,6];\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/18, & x\in[1,7],\\ 0, & x\notin[1,7];\end{cases}$ 7) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/49, & x\in[1,8],\\ 0, & x\notin[1,8];\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}2(x-2), & x\in[2,3],\\ 0, & x\notin[2,3];\end{cases}$ 9) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4],\\ 0, & x\notin[2,4];\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/9, & x\in[2,5],\\ 0, & x\notin[2,5];\end{cases}$ 11) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/8, & x\in[2,6],\\ 0, & x\notin[2,6];\end{cases}$ 12) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/25, & x\in[2,7],\\ 0, & x\notin[2,7];\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/18, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8];\end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/49, & x\in[2,9],\\ 0, & x\notin[2,9];\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & x\in[3,4],\\ 0, & x\notin[3,4];\end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/2, & x\in[3,5],\\ 0, & x\notin[3,5];\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/9, & x\in[3,6],\\ 0, & x\notin[3,6];\end{cases}$ 18) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/8, x\in[3,7],\\ 0, \quad x\notin[3,7];\end{cases}$ 19) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/25, x\in[3,8],\\ 0, \quad x\notin[3,8];\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/18, x\in[3,9],\\ 0, \quad x\notin[3,9];\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}(2-x)/2, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2];\end{cases}$ 22) $f(x)=\begin{cases}(4-x)/8, & x\in[0,4],\\ 0, & x\notin[0,4];\end{cases}$ 23) $f(x)=\begin{cases}(6-x)/18, & x\in[0,6],\\ 0, & x\notin[0,6];\end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases}(8-x)/32, & x\in[0,8],\\ 0, & x\notin[0,8];\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}(10-x)/50, & x\in[0,10],\\ 0, & x\notin[0,10];\end{cases}$ 26)

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1];\end{cases}$$

27) $f(x)=\begin{cases}2(3-x)/9, & x\in[0,3],\\ 0, & x\notin[0,3];\end{cases}$ 28)

$$f(x)=\begin{cases}2(5-x)/25, & x\in[0,5],\\ 0, & x\notin[0,5];\end{cases}$$

29) $f(x)=\begin{cases}2(7-x)/49, & x\in[0,7],\\ 0, & x\notin[0,7];\end{cases}$ 30)

$$f(x)=\begin{cases}2(9-x)/81, & x\in[0,9],\\ 0, & x\notin[0,9].\end{cases}$$

6.V.a. ξ are repartiŞa normalŁ cu valoarea medie *m* кi cu abaterea medie pŁtraticŁ σ. 1) sŁ se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) sŁ se defineascŁ (introducŁ) v.a.c. datŁ ; 3) sŁ se defineascŁ (determine) densitatea de repartiŞe ; 4) sŁ se construiascŁ linia de repartiŞe ; 5) sŁ se defineascŁ (determine) funcŞa de repartiŞe ; 6) sŁ se construiascŁ graficul funcŞei de repartiŞe ; 7) sŁ se construiascŁ pe acelaкi desen graficele densitŁŞi de repartiŞe кi al funcŞei de repartiŞe ; 8) sŁ se construiascŁ pe acelaкi desen gfaficele densitŁŞi de repartiŞe кi al funcŞei de repartiŞe astfel, ca grosimea graficului densitŁŞi de repartiŞe sŁ fie egalŁ cu 0,5 din grosimea standardŁ, iar grosimea graficului funcŞei de repartiŞe sŁ fie egalŁ cu 0,9 din grosimea standardŁ; 9) SŁ se calculeze probabilitatea ca ξ sŁ ia valori din intervalul [α, β]. Valorile lui *m*, σ, α кi β sunt date pe variante.

1)*m*=3, σ=2, α=2, β=8; 2)*m*=4, σ=2, α=2, β=7; 3)*m*=5, σ=2, α=2, β=6; 4)*m*=6, σ=2, α=4, β=9; 5)*m*=7, σ=2, α=4, β=8; 6)*m*=9, σ=2, α=6, β=9; 7)*m*=9, σ=2, α=7, β=12; 8)*m*=3, σ=3, α=2, β=5; 9)*m*=4, σ=3, α=2, β=7; 10)*m*=5, σ=3, α=4, β=7; 11)*m*=6, σ=3, α=4, β=9;

12)$m=7$, $\sigma=3$, $\alpha=6$, $\beta=9$; 13)$m=8$, $\sigma=3$, $\alpha=5$, $\beta=9$; 14)$m=9$, $\sigma=3$, $\alpha=7$, $\beta=10$; 15)$m=5$, $\sigma=4$, $\alpha=4$, $\beta=8$; 16)$m=6$, $\sigma=4$, $\alpha=4$, $\beta=9$; 17)$m=7$, $\sigma=4$, $\alpha=5$, $\beta=8$; 18)$m=8$, $\sigma=4$, $\alpha=5$, $\beta=9$; 19)$m=9$, $\sigma=4$, $\alpha=7$, $\beta=10$; 20)$m=6$, $\sigma=5$, $\alpha=4$, $\beta=7$; 21)$m=7$, $\sigma=5$, $\alpha=4$, $\beta=9$; 22)$m=8$, $\sigma=5$, $\alpha=5$, $\beta=9$; 23)$m=8$, $\sigma=5$, $\alpha=6$, $\beta=9$; 24)$m=8$, $\sigma=5$, $\alpha=7$, $\beta=9$; 25)$m=2$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=3$; 26)$m=3$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=4$; 27)$m=4$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=5$; 28)$m=4$, $\sigma=3$, $\alpha=2$, $\beta=5$; 29)$m=5$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=6$; 30)$m=6$, $\sigma=3$, $\alpha=2$, $\beta=8$.

7. ÎnŁlŞmea unui bŁrbat este o v.a. cu repartiŞa normalŁ. Presupunem cŁ aceastŁ repartiŞe are parametrii $m=175+(-1)^n/n$ cm кi $\sigma=6-(-1)^n/n$ cm. SŁ se formeze programul de conficŞonate a costumelor bŁrbŁteкti pentru o fabricŁ de confecŞi care se referŁ la asigurarea cu costume a bŁrbaŞlor, înŁlŞmile cŁrora aparŞn intervalelor: [150, 155), [155, 160), [160, 165), [165, 170), [170, 175), [175, 180), [180, 185), [185, 190), [190, 195), [195, 200], n fiind numarul variantei, $n=1,2,\ldots 30$.

8. Presupunem cŁ o convorbire telefonicŁ dureazŁ în medie 5 minute кi este o v.a. ξ de repartiŞe exponenŞalŁ. 1) SŁ se introducŁ în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ. 2) SŁ se determine funcŞa de repartiŞe кi sŁ se construiascŁ graficul ei. 3) DacŁ vŁ apropriaŞ de o cabinŁ telefonicŁ imediat dupŁ ce o persoanŁ a întrat în ea atunci care este probabilitatea cŁ o sŁ aкteptaŞ nu mai mult de $2+n/3$ minute, unde n este numŁrul variantei, $n=1,2,\ldots,30$?

9. Un autobus circulŁ regulat cu intervalul 30 minute. 1) SŁ se scrie în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ care reprezintŁ durata aкteptŁrii autobusului de cŁtre un pasager care soseste in staŞe într-un moment aleator de timp. 2) SŁ se construiascŁ linia de repartiŞe. 3) SŁ se determine f.r.e кi sŁ se construiascŁ graficul ei. 4) Care este probabilitatea cŁ, sosind in staŞe, pasagerul va aкtepta autobusul nu mai mult de $10+n/2$ minute, unde numŁrul n coincide cu numŁrul variantei.

10. Cantitatea anualŁ de precipitaŞi atmosferice are repartiŞe normalŁ. Presupunem cŁ anual, cantitatea de precipitaŞi într-o anumita regiune este o v.a. aleatoare de repartiŞe normalŁ de parametrii m = 500 (mm) кi σ = 150. Care este probabilitatea cŁ in anul viitor cantitatea de precipitaŞi va fi cuprinsŁ între 400+5*n* кi 500+5*n*, unde *n* este numŁrul variantei. DacŁ considerŁm cŁ un an este secetos când cantitatea de precipitaŞi nu depŁкeкte 300 mm, atunci care este probabilitatea cŁ doi din viitorii zece ani vor fi secetoкi?

4. Sisteme de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale sau vectori aleatori)

4.1. Introducere

In acest paragraf se conŞine o trecere in revista a teoriei referitoare la sisteme de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale sau vectori aleatori) кi se propun exemple de rezolvare a problemelor respective cu ajutorul Sistemului de programe Mathematica. În afarŁ de funcŞile definite anterior, în acest paragraf se aplicŁ кi alte funcŞi кi opŞuni ne folosite anterior:

Plot3D care construieкte grafice ale funcŞilor reale de douŁ variabile reale;

PlotRange care impune valori dorite pe axa *Oy* în cazul funcŞei Plot кi ï pe axa *Oz* în cazul funcŞei Plot3D;

PlotStyle care impune un anumit stil, anumite dimensiuni ale elementelor graficului;

PointSize care impune dimensiuni dorite ale punctelor graficelor;

ListPoint care construieкte punctele cu coordonatele date într-o listŁ

Apply[Plus,p,1] care calculeazŁ suma elementelor liniilor matricei **p** кi scrie aceste sume în formŁ de o linie.

4.2. Sisteme de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale). Funcţia de repartiţie

4.2.1. Noţiune de v.a. multidimensionale

Rezultatul unor experienţe aleatoare sunt descrise nu cu o singură variabilă aleatoare dar cu ajutorul a două, trei sau mai multe variabile aleatoare. În acest caz spunem că avem de a face cu un ***sistem de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale sau vectori aleatori), prescurtat, s.v.a.***

De exemplu, coordonatele punctului de aterizare a unui aparat cosmic reprezintă un sistem de două variabile aleatoare.

Definiţie. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $\xi:\Omega \to \mathbf{R}$, $\eta:\Omega \to \mathbf{R}$ sunt două variabile aleatoare. Se numeşte *sistem de două variabile aleatoare (v.a. 2-dimensionala sau vector aleator 2-dimensional)* o funcţie $\zeta:\Omega \to \mathbf{R}^2$, unde $\zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

Sistemul de variabile aleatoare definit de variabile aleatoare ξ şi η se notează cu (ξ, η).

Asemănător se defineşte şi un sistem de *n* variabile aleatoare. Un sistem de *n* variabile aleatoare se numeşte şi *v.a. n- dimensională* sau *vector aleator n-dimensional*.

V.a. ξ şi η, care definesc sistemul de variabile aleatoare (ξ, η) se numesc *variabile aleatoare marginale*, iar legile lor de repartiţie se numesc *legi de repartiţie marginale.*

4.2.2. Funcţia de repartiţie

Pentru a simplifica scrierile, în cele ce urmează vom considera un sistem de două variabile aleatoare.

Definiţie. Fie (ξ, η) un sistem de două variabile aleatoare. Se numeşte *funcţie de repartiţie* a acestui sistem funcţia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea

$$F(x, y) = P(\xi < x; \eta < y). \tag{1}$$

Ca şi în cazul unei variabile aleatoare partea dreaptă a egalităţii (8.3.2.1) reprezintă probabilitatea evenimentului

$$\{\omega \in \Omega\text{:}\ \xi(\omega) < x \text{ şi } \eta(\omega) < y\} = \{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}.$$

4.2.3. Proprietăţi ale funcţiei de repartiţie

Funcţia de repartiţie $F(x, y)$ a unui s.v.a. (ξ, η) are proprietăţile:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$;

2) $F(x, y)$ este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabila x sau y in parte;

3) $F(x, y)$ este continuă la stânga în raport fiecare variabila x sau y in parte;

4) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$;

5) $F(\infty, \infty) = 1$;

6) Au loc egalităţile

$$F(\infty, y) = F_\eta(y), \quad F(x, \infty) = F_\xi(x), \tag{2}$$

unde $F_\xi(x)$ şi $F_\eta(y)$ sunt funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi, respectiv, η, adică sunt *funcţiile de repartiţie marginale.*

4.2.4. Probabilitatea ca un s.v.a. să ia valori dintr-un dreptunghi. Independenta v.a

Fie R un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate şi cu vârfurile (α, γ), (β, γ), (β, δ) şi (α, δ):

$$R = \{(x, y) : \alpha \le x < \beta, \gamma \le y < \delta\}$$

Atunci probabilitatea $P[(\xi, \eta) \in R]$ ca punctul aleator (ξ, η) să aparţină dreptunghiului R se calculează conform formulei

$$P[(\xi, \eta) \in R] = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \tag{3}$$

Definitie. Vom spune ca v.a. ξ, η sunt independente daca

$$P[(\xi, \eta) \in R] =$$

$$P\{\alpha \le \xi < \beta, \gamma \le \eta < \delta\} = P\{\alpha \le \xi < \beta\} P\{\gamma \le \eta < \delta) .$$

4.2.5. Funcţia de repartiţie condiţionată

Definiţie. Se numeкte *funcţie de repartiţie condiţionată* a unei variabile aleatoare dintr-un sistem (ξ, η) funcŞa ei de repartiŞe calculatŁ cu condiŞa cŁ cealaltŁ variabilŁ aleatoare ia o valoare dintr-un anumit interval.

Fie cŁ $F(x, y)$ este funcŞa de repartiŞe a sistemului de variabile aleatoare (ξ, η). Din definiŞa funcŞei de repartiŞe кi formula de înmulŞre a probabilitŁŞlor obŞnem:

$$F(x, y) = P(\xi < x; \eta < y) = P(\xi < x)\cdot P[(\eta < y) \mid (\xi < x)] =$$
$$F_\xi(x)P[(\eta < y) \mid (\xi < x)].$$

Notând

$$F_\eta(y \mid \xi < x) = P[(\eta < y) \mid (\xi < x)],$$

din egalitatea precedentŁ obŞnem

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y \mid \xi < x). \qquad (4)$$

AsemŁnŁtor se obŞne egalitatea

$$F(x, y) = F_\eta(y)F_\xi(x \mid \eta < y), \qquad (5)$$

unde

$$F_\xi(x \mid \eta < y) = P[(\xi < x) \mid (\eta < y)].$$

FuncŞa $F_\xi(x \mid \eta < y)$ este *funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare* ξ *condiţionată de evenimentul* $(\eta < y)$, iar $F_\eta(y \mid \xi < x)$ este *funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare* η *condiţionată de evenimentul* $(\xi < x)$.

DacŁ ξ кi η sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$F_\xi(x \mid \eta < y) = F_\xi(x) \text{ кi } F_\eta(y \mid \xi < x) = F_\eta(y)$$

si din (8.3.2.4) si (8.3.2.5) rezultŁ:

$$F(x, y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y). \qquad (6)$$

Egalitatea (8.3.2.6) este o condiŞe necesarŁ кi suficientŁ ca variabilele aleatoare ξ кi η din sistemul (ξ, η) sŁ fie variabile aleatoare independente

4.2.6. Exemple

Exemplul 1. S.v.a. (ξ, η) are funcŞa de repartiŞe

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & (x,y)\in D,\\ 0, \quad (x,y)\notin D;\end{cases}$$

unde

$$D=\{(x,y):\ 0\le x<\infty,\ 0\le y<\infty\}.$$

1) SŁ se introducŁ în Sistemul Mathematica funcŞa $F(x,y)$.
2) SŁ se construiascŁ graficul funcŞei $F(x,y)$ pe domeniul

$$D_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3\}.$$

3) SŁ se calculeze probabilitatea ca punctul aleator (ξ, η) sŁ aparŞnŁ pŁtratului

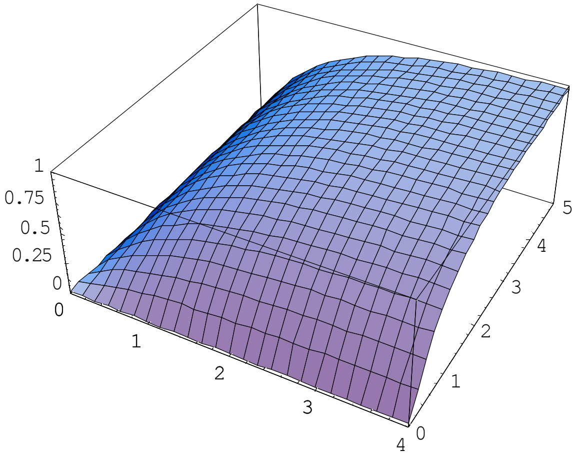
$$D_2=\{(x,y):\ 0\le x<1/2,\ 0\le y<1/3\}.$$

Rezolvare. 1) Introducem funcŞa de repartiŞe $F(x,y)$ in Sistemul Mathematica.

In = F[x_,y_]:=1–3^{-x}–3^{-y}+3^{x+y};

Observaţie. În cele trei linii imediat precedente este scris acelaкi text în trei moduri diferite. În prima din aceste linii a fost introdusŁ instrucŞunea respectivŁ din Mathematica în Word aplicând algoritmul : Edit, PasteSpecial, Picture(EnhancedMetafile), OK ; în a doua ï algoritmul : Edit, PasteSpecial, Picture, OK. În linia a treia acelaкi text este scris în Word. Care mod de scriere este mai « potrivit »?...

2) Construim graficul funcŞei $F(x,y)$ cu ajutorul funcŞei **Plot3D** care construieкte graficul funcŞei de douŁ variabile.



3) CalculŁm probabilitatea cerutŁ conform formulei (3).
Am obŞnut $P((\xi,\eta)\in D_2) \approx 0{,}129601$.

Rezolvarea exerciŞului s-a terminat. Scoatem expresia atribuitŁ funcŞei $F(x,y)$ în acest exemplu.

In[k1+4]:=Clear[F]

4.3. V.a. multidimensionale de tip discret si caracteristicele lor numerice

4.3.1. Definiţia s.v.a. de tip discret (s.v.a.d.)

DacŁ în s.v.a. (з, ɖ) v.a. з кi ɖ sunt de tip discret, atunci acesta se numeкte *sistem de v.a. de tip discret (s.v.a.d.).*

Din definiŞe rezultŁ cŁ mulŞmea de valori ale unui sistem de variabile aleatoare discrete este o mulŞme finitŁ sau infinita, cel mult, numerabilŁ.

4.3.2. Matricea de repartiţie

Fie (ξ, η) o v.a.d., iar $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, sunt valorile posibile ale v.a. ξ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, sunt valorile posibile ale variabilei aleatoare η şi

$$p_{ij} = P(\xi = x_i;\ \eta = y_j) \qquad (7)$$

sunt probabilităţile ca v.a. (ξ, η) să primească valoarea (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Cum evenimentele $(\xi, \eta) = (x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, formează un sistem complet de evenimente, are loc egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\ . \qquad (8)$$

Este comod să scriem repartiţia v.a. (ξ, η) în formă de tabel (tabelul (9)), care se numeşte *matrice de repartiţie* . Această repartiţie se mai numeşte si *repartiţie in ansamblu* a v.a.

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{in}
…	…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mj}	…	p_{mn}

(9)

Având matricea de repartiţie (9), se poate calcula funcţia de repartiţie a sistemului (ξ, η) conform formulei

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}\ . \qquad (10)$$

4.3.3. Determinarea repartiţiilor marginale

Fie (ξ, η) un sistem de variabile aleatoare discrete cu matricea de repartiţie (9). Valorile posibile ale variabilei aleatoare ξ sunt x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Probabilităţile p_{x_1}, p_{x_2}, …, p_{x_m} ale acestor valori se calculează conform formulelor

$$p_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (11)$$

Repartiţia marginală a variabilei aleatoare ξ este:

$$\xi: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_{x_1} & p_{x_2} & \dots & p_{x_m} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

iar r*epartiţia marginală a variabilei aleatoare* η din sistemul (ξ, η) cu repartiŞa in ansamblu (9) este:

$$\eta: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ p_{y_1} & p_{y_2} & \dots & p_{y_n} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

unde

$$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\ , j = 1, 2,\text{é}\ \ , n \tag{14}$$

Evident, cŁ dacŁ variabilele aleatoare sunt independente, atunci

$$p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}, \forall\ \ i = 1, 2,\text{é}\ \ , m; j = 1, 2,\text{é}\ \ , n. \tag{15}$$

Este valabila si reciproca.

4.3.4. Caracteristici numerice ale unui s.v.a.d

Definiţie. Se numeкte *moment iniţial de ordinul* k+s al s.v.a.d. (ξ, η) mŁrimea, notatŁ cu $\alpha_{k,s}$ кi egalŁ cu speranŞa matematicŁ a produsului $\xi^k\eta^s$:

$$\alpha_{k,s} = M\,[\xi^k\eta^s], \quad k, s = 0, 1, 2,\text{é} \tag{16}$$

Din (16) кi formula de calcul al valorii medii a v.a.d., rezultŁ *formula de calcul al momentelor iniţiale* :

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^k y_j^s p_{ij}\ , \quad k, s = 0, 1, 2,\text{é} \tag{17}$$

Momentele iniŞale de ordine 1+0 кi 0+1 coincid cu valorile medii ale variabilelor ξ кi, respectiv, η. F*ormulele de calcul ale valorilor medii* sunt:

$$M\xi = \sum\sum x_i p_{ij}\ ,\ M\eta = \sum\sum y_j p_{ij}\ . \tag{18}$$

Aceste valori medii se noteazŁ кi cu m_ξ кi m_η. Valorile medii pot fi calculate кi pe baza repartiŞilor marginale:

$$M\xi = \sum x_i p_{x_i}\ ,\ M\eta = \sum y_j p_{y_j}\ . \qquad (19)$$

Definiţie. Se numeкte *moment centrat de ordinul k+s* al sistemului de variabile aleatoare (ξ, η), mŁrimea notatŁ cu $\mu_{k,s}$, egalŁ cu speranŞa matematicŁ a produsului variabilelor centrate $\overset{o}{\xi}{}^{k}\overset{o}{\eta}{}^{s}$:

$$\mu_{k,s} = M[\overset{o}{\xi}{}^{k}\overset{o}{\eta}{}^{s}],\ k, s = 0, 1, 2,... \qquad (20)$$

Formula de calcul al momentelor centrate este:

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_\xi)^k (y_j - m_\eta)^s p_{ij}\ ,\ k, s = 0, 1, 2 ,é \qquad (21)$$

Momentul centrat $\mu_{2,0}$ este dispersia variabilei aleatoare ξ; iar momentul centrat $\mu_{0,2}$ este dispersia variabilei aleatoare η. *Formulele de calcul al dispersiilor* sunt:

$$D\xi = \sum\sum(x_i - m_\xi)^2 p_{ij}\ ,\ D\eta = \sum\sum(y_j - m_\eta)^2 p_{ij}\ . \qquad (22)$$

Dispersiile pot fi calculate кi pe baza repartiŞilor marginale:

$$D\xi = \sum(x_i - m_\xi)^2 p_{x_i}\ ,\ D\eta = \sum(y_j - m_\eta)^2 p_{y_j}\ . \qquad (23)$$

Abaterile medii pŁtratice ale variabilelor ξ кi η se definesc prin egalitŁŞle

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}\ ,\ \sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}\ . \qquad (24)$$

Definiţie. Momentul centrat de ordinul 1+1 se numeкte *covarianţa* sau *moment de corelaţie* a sistemului de variabile aleatoare.

CovarianŞa unui sistem de variabile aleatoare (ξ, η) se noteazŁ cu $C_{\xi\eta}$, sau cu cov(ξ, η). *Formula de calcul al covarianţiei* este

$$C_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_\xi)(y_j - m_\eta) p_{ij}\ . \qquad (25)$$

DacŁ $C_{\xi\eta} = 0$, atunci se spune cŁ variabilele aleatoare ξ кi η sunt *necorelate*. DacŁ însŁ $C_{\xi\eta}$ Í 0, atunci se spune cŁ ξ кi η sunt *corelate*. Au loc egalitŁŞle

$$C_{\xi\eta} = C_{\eta\xi}\ ,\ C_{\xi\xi} = D_\xi,\ C_{\eta\eta} = D_\eta. \qquad (26)$$

Matricea

$$Cov(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} C_{\xi\xi} & C_{\xi\eta} \\ C_{\eta\xi} & C_{\eta\eta} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

se numeкte *matrice a covarianţelor*.

Definiţie. Se numeкte *coeficient de corelaţie* a unui sistem de variabile aleatoare (з, ԁ) mЉrimea, notatЉ cu $r_{\text{з}\eta}$ (sau $k_{\text{з}\eta}$) кi definitЉ prin egalitatea

$$r_{\xi\eta} = \frac{C_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}}. \qquad (28)$$

Matricea

$$K = \begin{pmatrix} r_{\xi\xi} & r_{\xi\eta} \\ r_{\eta\xi} & r_{\eta\eta} \end{pmatrix} \qquad (29)$$

se numeкte *matrice a corelaţiilor*.

Propozitie (*Proprietăţile coeficientului de corelaţie)*. *Coeficientul de corelatie* $r_{\xi\eta}$ *poseda următoarele proprietati:*

1) Dacă variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente, atunci $r_{\xi\eta} = 0$.

2) Are loc relaţia $-1 \le r_{\xi\eta} \le 1$.

3) Dacă $r_{\xi\eta} = 1$, atunci între ξ şi η există, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de formă $\eta = a\xi + b$, unde $a > 0$.

4) Dacă $r_{\xi\eta} = -1$, atunci între η şi ξ există, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de forma $\eta = a\xi + b$, unde $a < 0$.

5) Dacă între η şi ξ exista, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de forma $\eta = a\xi + b$,atunci $|r_{\xi\eta}| =1$.

6) Dacă $r_{\xi\eta} = 0$, atunci de aici nu rezultă că variabilele η şi ξ sunt independente. Rezultă doar faptul că ξ şi η sunt necorelate, adică între ξ şi η nu există o dependenţă funcţionalăar. O altă dependenţă este posibilă.

7) Au loc egalităţile $r_{\xi\xi} = r_{\eta\eta} =1$.

Remarca. Reciproca proprietatii 1) nu are loc deoarece poate fi adus un Contraexemplu de 2 v.a. dependente, dar pentru coeficientul lor de corelatie sa fie diferit de zero.

4.3.5. Exemplu de determinare a caracteristicelor numerice

Exemplul 2. Se dŁ un sistem de variabile aleatoare (ξ, η) prin matricea sa de repartiŞe:

$\xi \backslash \eta$	10	15	20	25
5	a	0,10	0	0
10	0	0,2	0,10	0,05
15	0	0,05	0,15	0,20

(30)

Se cere : 1) sŁ se defineascŁ (introducŁ) în Sistemul Mathematica sistemul de v.a. dat; 2) sŁ se determine constanta a; 3) sŁ se introducŁ în Sistemul Mathematica sistemul de v.a. dat cu precizarea valorii parametrului a; 4) sŁ se calculeze valorile medii m_ξ кi m_η; 5) sŁ se calculeze dispersiile D_ξ кi D_η; 6) sŁ se calculeze abaterile medii pŁtratice σ_ξ кi σ_η; 7) sŁ se calculeze covariaŞa $C_{\xi\eta}$; 8) sŁ se calculeze coeficientul de corelaŞe $r_{\xi\eta}$; 9) sŁ se scrie matricea covariaŞilor; 10) sŁ se scrie matricea corelaŞilor.

Rezolvare. 1) Introducem sistemul de v.a. (ξ, η) in Sistemul Mathematica în formŁ de o listŁ elementele cŁreia sunt liste ale elementelor din liniile tabelului (30), pe care o notŁm cu **p**$\xi\eta$**.**

Scriem lista **p**$\xi\eta$ în formŁ de matrice

Am obŞnut matricea **p**$\xi\eta$. Trebuie sŁ avem în vedere care elemente din aceastŁ matrice sunt valorile posibile ale variabilelor aleatoare кi care sunt probabilitŁŞ.

2) DeterminŁm constanta a din condiŞa (8).

Am obŞnut a = 0,15.

3) Scriem matricea (31) cu valoarea determinatŁ a parametrului a кi notŁm matricea obŞnutŁ cu **p.**

Scriem lista **p** în formŁ de matrice

Am obŞnut matricea **p**.

4) CalculŁm valorile medii m_ξ кi m_η conform formulelor (18).

Am obtinut valorile medii $m_\xi = 10{,}75$ кi $m_\eta = 18$.

5) CalculŁm dispersiile conform formulelor (22).

Am obŞnut dispersiile $D_\xi = 15{,}6875$ кi $D_\eta = 26$.

6) CalculŁm abaterile medii pŁtratice conform formulelor (24).

Am obŞnut $\sigma_\xi = 3{,}96074$ кi $\sigma_\eta = 5{,}09902$;

7) CalculŁm covarianŞa conform formulei (25)

8) CalculŁm coeficientul de corelaŞe. AplicŁm formula (28)

9) Scriem matricea covarianŞelor (27), Şnând cont de (26) кi rezultatele punctului 5.

10) Scriem matricea corelaŞilor conform (29) кi Şnând cont de proprietatea 8 a corelaŞei.

Rezolvarea exerciŞului 2 s-a terminat.

Exemplul 3. Fiind dat sistemul de variabile aleatoare (ξ,η) definit în exemplul 2 prin matricea (30), se cere : 1) sŁ se determine repartiŞile marginale ale v.a.d. ξ кi η; 2) sŁ se determine dacŁ v.a.d. ξ кi η din sistemul (ξ, η) sunt independente sau nu.

Rezolvare. 1) RepartiŞile marginale pot fi determinate conform formulelor (11) ï (14). Definim doi vectori **x** кi **y**, coordonatele cŁrora sunt valorile posibile ale v.a. ξ кi, respectiv η.

Definim matricea **pxy** elementele cŁreia sunt probabilitŁŞle din matricea **p**.

Scriem matricea **pxy** în formŁ matricealŁ.

DeterminŁm probabilitŁŞle coordonatelor vectorilor **x** кi **y**.

Scriem repartiŞile marginale în formŁ matricealŁ.

Am obŞnut repartiŞile marginale ale variabilelor ξ кi ηŞ

2) Conform teoriei trebuie verificate egalitŁŞle (15). Construim matricea **pxipyj** elementele cŁreia sunt $p_{x_i} p_{y_j}$, înmulŞnd în prealabil, separat, fiecare probabilitate p_{x_i} din repartiŞa marginalŁ a lui ξ cu probabilitŁŞle din repartiŞa marginalŁ a lui η. Astfel creând liniile matricei **pxipyj**.

Scriem liniile matricei **pxipyj** în forma matricealŁ

Scriem alături şi matricea **pxy** alcătuită din probabilităţile sistemului (ξ, η):

Observăm că elementele acestor matrice nu coincid. Facem concluzia că v.a. ξ şi η di sistemul (ξ, η) dat în exemplul 2 sunt dependente.

Rezolvarea exemplului 3 s-a terminat.

4.3.6. Repartiţii condiţionate

Definiţie. Prin *repartiţie condiţionată* a unei variabile aleatoare discrete din sistemul (ξ, η) se înţelege repartiţia acestei variabile cu condiţia că cealaltă variabilă ia o valoare concretă.

Fie (ξ, η) un sistem de variabile aleatoare discrete cu matricea de repartiţie (9). Vom stabili o regulă de determinare a repartiţiilor condiţionate ale variabilelor ξ şi η.

Din formula de înmulţire a probabilităţilor avem:

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\eta = y_j)P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = p_{y_j} \cdot P(\xi = x_i \mid \eta = y_j).$$

Notînd cu $p_{x_i|y_j}$ probabilitatea că $\xi = x_i$ cu condiţia că $\eta = y_j$:

$$p_{x_i|y_j} = P(\xi = x_i \mid \eta = y_j),$$

din egalitatea precedentă obţinem:

$$p_{x_i|y_j} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (33)$$

Deci *repartiţia variabilei aleatoare* ξ *condiţionată de* $\eta = y_j$ este

$$\xi \mid y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_{x_1|y_j} & p_{x_2|y_j} & \ldots & p_{x_m|y_j} \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (34)$$

Asemănător se arată că repartiţia variabilei aleatoare η condiţionată de evenimentul $\xi = x_i$ este:

$$\eta \mid x_i : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ p_{y_1|x_i} & p_{y_2|x_i} & \ldots & p_{y_n|x_i} \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (35)$$

unde

$$p_{y_j|x_i} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}, \ i = 1, 2,é\ , m; j = 1, 2,é\ , n. \tag{36}$$

4.3.7. Caracteristice numerice ale v.a. condiţionate.

Caracteristicele numerice ale variabilelor ξ кi η calculate pe baza repartiŞilor condiŞonate (34) кi (35) se numesc *caracteristici numerice ale v.a. condiţionate*.

Definiţie. Se numeкte *valoare medie condiţionată* a unei v.a. din sistemul (ξ, η) valoarea medie a uneia din v.a. calculatŁ cu condiŞa cŁ cealaltŁ variabilŁ aleatoare ia o valoare concretŁ.

Valoarea medie a variabilei ξ condiŞonatŁ de evenimentul $\eta = y_j$ se noteazŁ cu $M[\xi \mid y_j]$, $j = 1, 2,é\ , n$, iar valoarea medie a variabilei η condiŞonatŁ de evenimentul $\xi = x_i$ se noteazŁ cu $M[\eta \mid x_i]$, $i = 1, 2,é\ , m$. Din definiŞa precedentŁ, (34), (35) кi formula de calcul a valorii medii rezultŁ cŁ:

$$M[\xi \mid y_j] = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{x_i|y_j}, \ j = 1, 2,é\ , n; \tag{37}$$

$$M[\eta \mid x_i] = \sum_{j=1}^{n} y_j p_{y_j|x_i}, \ i = 1, 2,é\ , m. \tag{38}$$

Cum în definiŞile momentelor iniŞale кi a momentelor centrate ale unui sistem de variabile aleatoare se conŞne noŞunea valoare medie, pot fi definite кi momentele respective condiŞonate.

4.3.8. Noţiune de regresie

Definiţie. Se numeкte *regresie a variabilei aleatoare* ξ *în raport cu* η funcŞa $x = M[\xi \mid y]$ definitŁ pe mulŞmea valorilor posibile ale lui η. Se numeкte *regresie a variabilei aleatoare* η *în raport cu* ξ funcŞa $y = M[\eta \mid x]$ definitŁ pe mulŞmea valorilor posibile ale lui ξ.

Exemplul 4. Fiind dat s.v.a.d. (ξ,η) definit în exemplul 2 prin matricea (30), sŁ se determine : 1) repartiŞa v.a.d. ξ condiŞonatŁ de evenimentul (η=10) ; 2) repartiŞa v.a.d. η condiŞonatŁ de evenimentul (ξ=15) ; 3) valoarea medie condiŞonata a v.a.d. ξ ; 4) valoarea medie condiŞonata a v.a.d. η ; 5) sŁ se determine în formŁ de matrice funcŞa de regresie a v.a.d. ξ ; 6) sŁ se determine în formŁ de matrice funcŞa de regresie a v.a.d. ξ ; 7) linia de regresie a v.a.d. ξ în raport cu η; 8) linia de regresie a v.a.d. η în raport cu ξ.

Rezolvare. Sistemul de v.a.d. a fost introdus în Sistemul Mathematica cu ajutorul matricei **p**. Vom folosi кi vectorii **x** кi **y** care au fost definiŞ în exemplul 3.

1) DeterminŁm repartiŞa v.a.d. ξ condiŞonatŁ de evenimentul (η=10). NotŁm lista probabilitŁŞlor din aceastŁ repartiŞe cu ξ**10**. Scriem repartiŞa condiŞonatŁ obŞnutŁ în formŁ de matrice.

2) DeterminŁm repartiŞa v.a.d. η condiŞonatŁ de evenimentul (ξ=15). NotŁm lista probabilitŁŞlor din aceastŁ repartiŞe cu η**15**. Scriem repartiŞa condiŞonatŁ obŞnutŁ în formŁ de matrice.

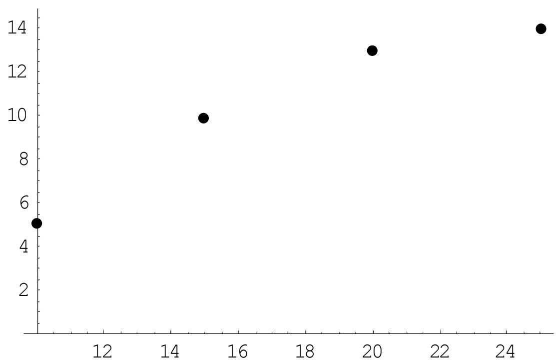
3) DeterminŁm speranŞele matematice condiŞonate ale v.a.d. ξ кi notŁm cu **m**$\xi\eta$ lista lor.

4) DeterminŁm speranŞele matematice condiŞonate ale v.a.d. η кi notŁm cu **m**$\eta\xi$ lista lor

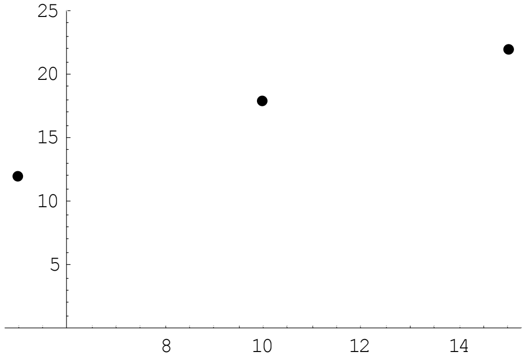
5) Scriem în formŁ de matrice funcŞa de regresie a v.a.d. ξ.

6) Scriem în formŁ de matrice funcŞa de regresie a v.a.d. η.

7) Construim linia de regresie a v.a.d. ξ în raport cu η.



8) Construim linia de regresie a v.a.d. η în raport cu ξ.



Rezolvarea exemplului s-a terminat. Scoatem valorile atribuite notaŞilor în exemplele 2, 3 кi 4. Aceasta trebuie efectuat, deoarece în careva din exemplele urmŁtoare aceste notaŞi se vor folosi iarŁкi, dar vor reprezenta alte entitŁŞ.

4.4. Vectori aleatoari continui (v.a.c.)

4.4.1. Noţiuni generale

DacŁ v.a. ξ кi η, care formeazŁ sistemul (ξ, η), sunt v.a. de tip (absolut) continue, atunci se spune cŁ (ξ, η) este un *sistem de variabile aleatoare de tip (absolut)continue,* prescurtat*, s.v.a.c.*

Unele noŞuni referitoare la un s.v.a.d. sunt comune кi pentru un s.v.a.c. Aкa sunt noŞunile de f.r., funcŞi de repartiŞe marginale, funcŞi de repartiŞe condiŞonate, momentele iniŞale, momentele centrate, regresia. Aceste noŞuni au fost definite în punctele precedente. De aceea nu vom repeta aici aceste definiŞi, dar vom defini valoarea medie, vom face unele precizŁri, care rezultŁ din faptul cŁ (ξ, η) este un s.v.a.c. кi vom scrie formulele de calcul ale momentelor.

În cele ce urmeazŁ vom considera cŁ (ξ, η) este un s.v.a.c. κi funcŞa de repartiŞe $F(x, y)$ a acestui sistem este continuŁ împreunŁ cu derivatele parŞale

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \quad \text{κi} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x}.$$

4.4.2. Densitatea de repartiţie (d.r.) şi proprietăţile ei

Prin definitie, *Densitatea de repartiţie* (*in ansamblu)* a unui sistem de variabile aleatoare continue (ξ, η) cu funcŞa de repartiŞe $F(x, y)$ este funcŞa $f(x,y)$ definitŁ prin formula

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}. \tag{39}$$

Densitatea de repartiŞe are proprietŁŞle ce urmeazŁ.

1) $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$;

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \tag{40}$$

4.4.3. Probabilitatea ca un punct aleator (ξ, η) să aparţină unui domeniu mărginit şi închis *D*

Se calculeazŁ conform formulei

$$P[(\xi, \eta) \in D] = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \tag{41}$$

4.4.4. Funcţia de repartiţie exprimată prin densitatea de repartiţie

FuncŞa de repartiŞe a unui sistem de variabile aleatoare continue se exprimŁ prin densitatea de repartiŞe conform formulei

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) \, dx \, dy. \tag{42}$$

4.4.5. Exprimarea funcţiilor de repartiţie marginale prin densitatea de repartiţie a sistemului

Cum $F_\xi(x) = F(x, \infty)$ κi $F_\eta(y) = F(\infty, y)$, din (8.3.4.1) rezultŁ:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad ,$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dy \quad .$$

(43)

Formulele (43) sunt *formulele de exprimare a funcţiilor de repartiţie marginale prin densitatea de repartiţie a sistemului.*

4.4.6. Exprimarea densităţilor de repartiţie marginale prin densitatea de repartiţie a sistemului

DensitŁŞle de repartiŞe marginale $f_\xi(x)$ кi $f_\eta(y)$ se obŞn, prin derivare, din funcŞile de repartiŞe marginale:

$$f_\xi(x) = \frac{\partial F_\xi}{\partial x}(x)\ , \quad f_\eta(y) = \frac{\partial F_\eta}{\partial y}(y)\ . \tag{44}$$

Din (43) кi (44), Şnând cont de regula de derivare a integralei în raport cu limita superioarŁ de integrare, obŞnem:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad , \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \quad . \tag{45}$$

4.4.7. Formule de calcul pentru caracteristicelor numerice ale unui s.v.a.c

Din formula de calcul a valorii medii a unei variabile aleatoare continue rezultŁ cŁ

$$M\xi = \int x\ f_\xi(x)\, dx\ ,\ M\eta = \int y\ f_\eta(y)\, dy\ . \tag{46}$$

Formulele de calcul ale valorilor medii exprimate prin densitatea de repartiţie a sistemului sunt:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy \ ,\ M\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy$$

(47) Momentelor iniŞale кi momentele centrate pot fi calculate cu ajutorul formulelor

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)\,dx\ dy \quad , \tag{48}$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^k (y - m_\eta)^s f(x,y)\,dx\ dy \quad , \tag{49}$$

În particular, dispersiile кi covarianŞa se calculeazŁ conform formulelor:

$$D\xi = \int\int (x - m_\xi)^2 f(x,y)\,dx\,dy\ , \tag{50}$$

$$D\eta = \int\int (y - m_\eta)^2 f(x,y)\,dx\,dy\ , \tag{51}$$

$$C_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{52}$$

Formulele da calcul al abaterilor medii pŁtratice кi al coeficientului de corelaŞe sunt cele din paragraful 4.2.

Dispersiile pot fi calculate кi pe baza densitŁŞlor de repartiŞe marginale. În acest caz avem:

$$D\xi = \int (x - m_\xi)^2 f_\xi(x)\,dx\ ,\ D\eta = \int (y - m_\eta)^2 f_\eta(y)\,dy\ . \tag{53}$$

4.4.8. Variabile aleatoare independente

Variabilele ξ кi η din sistemul (ξ, η) sunt independente atunci кi numai atunci, când d.r.

$f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$ sau f.r. $F(x,y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$ (54)

4.4.9. Densitate de repartiţie condiţionată

NotŁm cu $f_\xi(x \mid y)$ densitatea de repartiŞe a variabilei aleatoare ξ cu condiŞa cŁ η ia valoarea y кi cu $f_\eta(y \mid x)$ densitatea de repartiŞe a variabilei aleatoare η cu condiŞa cŁ ξ ia valoarea x. Au loc egalitŁŞle :

$$f_\xi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}\ ,\quad f_\eta(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}\ , \tag{55}$$

кi deci, Şnând cont de (45), obŞnem

$$f_\xi(x|y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}, \quad f_\eta(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}.$$

(56)

4.4.10. Caracteristici numerice condiţionate. Regresia

Din definiŞa d.r. condiŞonate definite mai sus кi formula de calcul a valorii medii a unei v.a. continue rezultŁ cŁ:

$$M[\xi|y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x|y)\,dx,$$

$$M[\eta|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_\eta(y|x)\,dy. \qquad (57)$$

Graficul funcŞei $M[\xi\,|\,y]$, ca functie de argumentul y, se numeкte *linie de regresie* a variabilei ξ în η, iar graficul funcŞei $M[\eta\,|\,x]$, ca functie de argumentul x, se numeкte *linie de regresie* a variabilei η în ξ. Evident, cŁ dacŁ variabilele ξ кi η sunt independente, atunci liniile de regresie reprezinta doua functii constante, egale, respectiv, cu $M\xi$, $M\eta$.

4.4.11. Exemple

Exemplul 5. Se dŁ d.r. in ansamblu a s.v.a.c. (ξ, η) :

$$f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2 - 2xy - 5y^2}, \ (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Se cere : 1) sŁ se determine constanta a ; 2) sŁ se introducŁ (defineascŁ) d.r. in ansamblu în Sistemul Mathematica ; 3) sŁ se construiascŁ graficul d.r. in ansamblu; 4) sŁ se calculeze probabilitatea ca s.v.a. sŁ ia valori din dreptunghiul

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1 \,;\, 0 \le y \le 1{,}5\} \,;$$

5) sŁ se determine d.r. marginale ale variabilelor ξ кi η ; 6) sŁ se determine dacŁ v.a. ξ кi η sunt dependente sau independente.

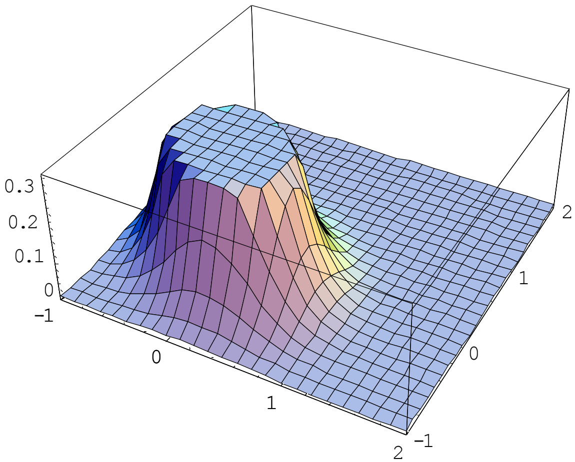
Rezolvare. 1) DeterminŁm constanta a din condiŞa (40).

Am obŞnut a = $\frac{\sqrt{19}}{\pi}$. Deci densitatea d.r. in ansamblu a sistemului (ξ, η) este

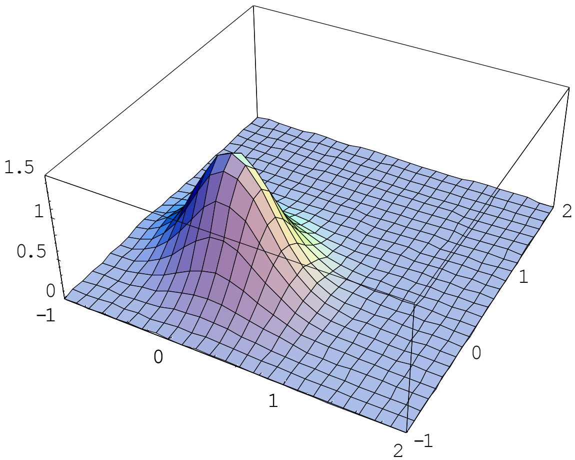
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{19}}{\pi} e^{-4x^2 - 2xy - 5y^2}, \ (x,y) \in \mathbf{R}^2. \qquad (58)$$

2) Introducem d.r. in ansamblu (58) în Sistemul Mathematica.

3) Construim graficul funcŞei $f(x,y)$ folosind funcŞa **Plot3D.**



ObservŁm cŁ o parte din graficul funcŞei $f(x,y)$, кi anume punctele care au a treia coordonatŁ mai mare ca 0,3, nu este reprezentatŁ pe desen. De aceea vom folosi o opŞune specialŁ a funcŞei **Plot3D**, care impune valori dorite pe axa *Oz*. Având în vedere cŁ valoarea maximŁ a funcŞei $f(x,y)$ nu depŁкeкte $\sqrt{19}/\pi < 1.5$, vom cere ca pe axa Oz sŁ fie indicare valorile de la 0 pânŁ la 1,5. Aceasta se poate face cu ajutorul funcŞei **PlotRange.**



4) Calculeze probabilitatea ca s.v.a. sŁ primeascŁ valori din dreptunghiul *R* cu ajutorul formulei (41).

Am obŞnut $P((\xi,\eta)\in R)$ = 0,213882.

5) DeterminŁm d.r. marginale cu ajutorul formulelor (45).

Am obŞnut repartiŞile marginale

$$f_{\xi}(x)=\sqrt{\frac{19}{5\pi}}\,e^{-19x^2/5}\quad,\quad f_{\eta}(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{\pi}}\,e^{-19x^2/4}\,.$$

6) Pentru a determina dependenŞa sau independenŞa v.a. ξ ki η folosim egalitatea (54) pentru d.r. CalculŁm produsul densitŁŞilor de repartiŞe marginale.

Cum produsul obŞnut nu coincide cu d.r. in ansamblu $f(x,y)$, rezultŁ cŁ v.a. ξ ki η sunt dependente.

Rezolvarea exemplului 5 s-a terminat.Δ

Exemplul 6. Fiind dat s.v.a.c (ξ, η) definit în exemplul 5 prin d.r. in ansamblu (58), sŁ se determine : 1) valorile medii m_{ξ} ki m_{η} ; 2) dispersiile D_ξ кi D_ξ ; 3) abaterile medii pŁtratice σ_ξ кi σ_ξ ; 4) covarianŞa $C_{\xi\eta}$; 5) coeficientul de corelaŞe $r_{\xi\eta}$; 6) matricea covarianŞelor Cov[ξ,η] ; 7) matricea corelaŞilor *K*.

Rezolvare. 1) Pentru calculul speranŞelor matematice folosim densitŁŞle de repartiŞi marginale, determinate în exemplul precedent, кi formulele (46).

Am obŞnut valorile medii m_ξ = 0 кi m_η = 0.

2) Pentru calculul dispersiilor folosim repartiŞile marginale кi formulele (53).

Am obŞnut dispersiile D_ξ = 5/38 кi D_ξ =2/19.

3) DeterminŁm abaterile medii pŁtratice ca rŁdŁcinile pŁtratice din dispersii.

Am obŞnut abaterile medii pŁtratice $\sigma_\xi = \sqrt{5/38}$ кi $\sigma_\eta = \sqrt{2/19}$.

4) DeterminŁm covarianŞa folosind d.r. in ansamblu *f*(*x*,*y*) datŁ prin formula (58) кi formula (52).

Am obŞnut valoarea covarianŞei $C_{\xi\eta}$ = –1/38.

5) CalculŁm coeficientul de corelaŞe conform formulei (8.3.28).

Am obŞnut coeficientul de corelaŞe $r_{\xi\eta} = -1/2\sqrt{5}$.

6) DeterminŁm matricea covarianŞelor conform formulei (27).

7) DeterminŁm matricea corelaŞilor prin formula (29).

Rezolvarea exemplului 6 s-a terminat.

Exemplul 7. Fiind dat s.v.a.c. (ξ, η) din exemplul 5, sŁ se determine : 1) d.r. a v.a. ξ condiŞonatŁ de evenimentul η = *y*; 2) d.r. a v.a. η condiŞonatŁ de evenimentul ξ = *x*; 3) funcŞa de regresie a v.a.

ξ în raport cu η ; 4) funcŞa de regresie a v.a. η în raport cu ξ; 5) liniile de regresie.

Rezolvare. Datele кi rezultatele intermediare ale exemplului au fost introduse în Sistemul Mathematica în exemplele 5 кi 6. Folosim unele din ele la rezolvarea exemplului dat.

1) Pentru determinarea d.r. a v.a. ξ condiŞonatŁ de evenimentul η = *y* folosim prima din formulele (55).

Am obŞnut densitatea de repartiŞe a v.a. ξ condiŞonatŁ de evenimentul η=*y*:

$$f_{\xi}(x \mid y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2 - 2xy - y^2/4}.$$

2) Pentru determinarea densitŁŞi de repartiŞe a v.a. η condiŞonatŁ de evenimentul ξ = *x* folosim a doua din formulele (55).

Am obŞnut densitatea de repartiŞe a v.a. η condiŞonatŁ de evenimentul ξ=*x*:

$$f_{\eta}(y \mid x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} e^{-x^2/5 - 2xy - 5y^2}.$$

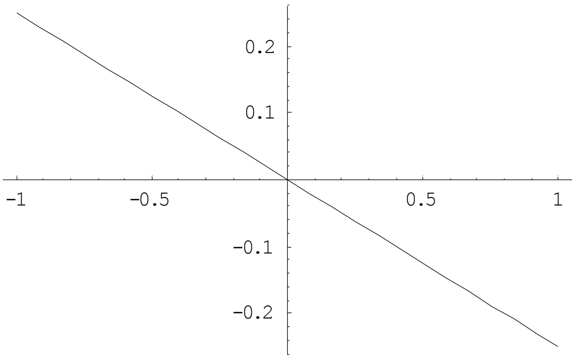
3) Pentru a determina funcŞa de regresie a v.a. ξ în raport cu η, pe care o notŁm cu **Mξ[y]**, aplicŁm prima din formulele (57).

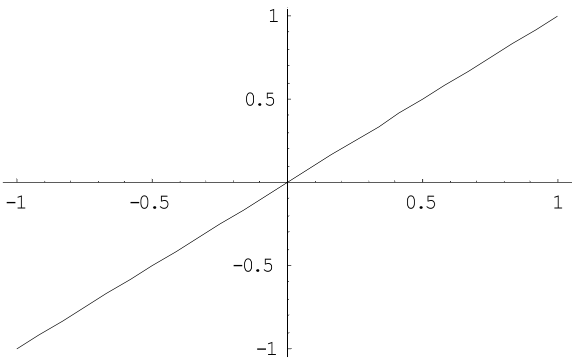
Am obŞnut funcŞa de regresie a v.a. ξ în raport cu η: *x* = *y*/4.

4) Pentru a determina funcŞa de regresie a v.a. η în raport cu ξ aplicŁm a doua din formulele (57).

Am obŞnut funcŞa de regresie a v.a. η în raport cu ξ: *y* = *x*.

5) Construim liniile de regresie ca grafice ale funcŞilor de regresie.





Rezolvarea exemplului 7 s-a terminat.

4.4.12. Teorema Limită Centrală şi Legea Numerelor Mari pentru variabile aleatoare independente, identic repartizate (v.a.i.i.r)

Teorema LimitŁ CentralŁ (TLC) кi Legea Numerelor Mari (LNM) reprezintŁ rezultatele de vŽArf din Teoria ProbabilitŁŞilor. Astfel, TLC vine sŁ generalizeze Teorema LimitŁ CentralŁ (forma Moivre-Laplace, sec.XIX)), privind calculul valorilor aproximative ale probabilitŁŞi din schema (repartiŞia) BinomialŁ, extinzŽAnd-o si asupra asupra unor repartiˇŦiI diferite de cea BinomialŁ. LNM, care este , de fapt, consecinta a TLC, serveste in calitate de model matematic pentru aplicarea Principiului Regularitatii Statistice.

Teorema Limită Centrală ***(pentru v.a.i.i.r.).*** *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *un şir de v.a.i.i.r. cu media* $M\xi_i=a$ *şi dispersia* $D\xi_i=\sigma^2$, $i=1,2,\ldots$, *atunci, pentru* $n\to\infty$, *probabilitatea*

$$P[(\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n -n\cdot a)/\sigma\sqrt{n} <x]\to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt .$$

Consecința 1. *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când n este suficient de mare are loc aproximarea următoare:*

$$P(\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n <a) \approx \Phi(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}).$$

Consecința 2 ***(LNM pentru v.a.i.i.r.).*** *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când* $n\to\infty$ *are loc convergența următoare*

$$P(\left| (\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n)/n - a \right| <\varepsilon) \to 1$$

pentru orice $\varepsilon>0$, *oricât de mic ar fi acesta.*

Consecința 3. *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când n este suficient de mare, are loc aproximarea următoare:*

$$P(\left| (\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n)/n - a \right| <\varepsilon) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}})-1.$$

pentru orice $\varepsilon>0$, *oricât de mic ar fi acesta.*

Consecința 4. ***(LNM în forma Bernoulli, sec. XVII).*** *Fie un experiment aleator* $\mathcal{E}$, *iar A un eveniment aleator pentru care p=P(A)>., Atunci, când* $n\to\infty$, *pentru frecvenţa relativă* $f_n(A)$ *are loc urmatoarea convergenţă:*

$$P(\left| f_n -p \right| <\varepsilon)\to 1,$$

pentru orice $\varepsilon>0$, *oricât de mic ar fi acesta.*

Remarcă. *Consecinta 2 arata, de fapt, ca media aritmetica a n valori observate a uneia si aceleiasi v.a. tinde, atunci cand n tinde la infinit, la o constanta egala cu valoarea medie a acestei v.a. Consecinta 3 arata cum poate evaluata viteza de convergenta mentionata anterior. Consecinta 4 justifica,de fapt, din punct de vedere matematic Principiul Regularitatii Statistice.*

4.4.13. Exerciţii pentru lucrul individual şi lucrări de laborator

1. Se dŁ f.r. a unui s.v.a. (ξ,η) definit prin f.r.

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\ x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\ x+\frac{1}{2}\right),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

кi un domeniu

$$D_1=\{(x,y):0\le x<1+n/5;\ \ 0\le y<1+n/6\},$$

unde n este numŁrul variantei. SŁ se determine: 1) graficul funcŞei $F(x,y)$ pe domeniul D_1; 2) probabilitatea $P((\xi,\eta)\in D_1)$.

2. Fiind datŁ matricea (legea) de repartiŞe a unui s.v.a.d. (ξ,η):

$\xi\backslash\eta$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}

sŁ se determine: 1) constanta a; 2) valorile medii m_ξ кi m_η; 3) dispersiile D_ξ кi D_η; 4) abaterile pŁtratice medii σ_ξ, σ_η; 5) covarianŞa $C_{\xi\eta}$; 6) coeficientul de corelaŞe $r_{\xi\eta}$; 7) matricea covarianŞelor; 8) matricea corelaŞilor. Valorile parametrilor sunt date pe variante.

1) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, $p_{11}=a$, p_{12}=0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,04, p_{22}=0,2, p_{23}=0,3, p_{24}=0,05, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,15, p_{34}=0,1 ;

2) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,16, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,15, p_{23}=0,2, p_{24}=0,1, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,1, p_{34}=0,15 ;

3) x_1=15, x_2=20, x_3=25, y_1=5, y_2=10, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,1, p_{22}=0,15, p_{23}=0,1, p_{24}=0,06, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,16, p_{34}=0,15 ;

4) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=15, y_2=20, y_3=25, y_4=30, $p_{11}=a$, p_{12}=0,0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,16, p_{23}=0,15, p_{24}=0,08, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,12, p_{34}=0,2 ;

5) x_1=15, x_2=20, x_3=25, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,2, p_{23}=0,16, p_{24}=0, p_{31}=0, p_{32}=0,06, p_{33}=0,1, p_{34}=0,1 ;
6) x_1=10, x_2=15, x_3=20, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, $p_{11}=a$, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,16, p_{22}=0,15, p_{23}=0,25, p_{24}=0,06, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,08, p_{34}=0,2 ;
7) x_1=5, x_2=10, x_3=15, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,15, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,09, p_{22}=0,1, p_{23}=0,08, p_{24}=0,11, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,12, p_{34}=0,15 ;
8) x_1=25, x_2=30, x_3=35, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, $p_{11}=a$, p_{12}=0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,1, p_{22}=0,2, p_{23}=0,08, p_{24}=0,1, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,15, p_{34}=0,16 ;
9) x_1=25, x_2=30, x_3=35, y_1=15, y_2=20, y_3=25, y_4=30, $p_{11}=a$, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,06, p_{22}=0,15, p_{23}=0,15, p_{24}=0,04, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,14, p_{34}=0,16 ;
10) x_1=10, x_2=15, x_3=20, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,05, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,06, p_{22}=0,15, p_{23}=0,15, p_{24}=0,04 p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,14, p_{34}=0,16.
În variantele 10+i se adunŁ 2 la toate valorile posibile ale lui ξ кi ale lui η din variante i.

3. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ,η) din exerciŞul 8.3.2., se cere : 1) sa se afle repartiŞile marginale ale lui ξ кi η; 2) sŁ se determine dacŁ sunt sau nu independente v.a. ξ кi η.

4. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ,η) din exerciŞul 8.3.2., sŁ se determine : 1) repartiŞa condiŞonatŁ $\xi|(\eta=y_2)$; 2) repartiŞa condiŞonatŁ $\eta|(\xi=x_3)$; 3) valorile medii condiŞonate ale v.a.d. ξ ; 4) valorile medii condiŞonate ale v.a.d. η ; 5) funcŞa de regresie a variabilei ξ în raport cu η ; 6) funcŞa de regresie a variabilei η în raport cu ξ; 7) linia de regresie a variabilei η în raport cu ξ; 8) linia de regresie a variabilei ξ în raport cu η.

5. Se dŁ d.r. in ansamblu $f(x,y)$ a sistemului de variabile aleatoare (ξ, η) . Se cere : 1) sŁ se determine constanta a ; 2) sŁ se introducŁ (defineascŁ) d.r. in ansamblu în Sistemul Mathematica ; 3) sŁ se construiascŁ graficul d.r. in ansamblu ; 4) sŁ se calculeze probabilitatea ca s.v.a. va lua valori din dreptunghiul

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1 \; ; 0 \le y \le 2\} \; ;$$

5) sŁ se determine d.r. ale v.a. ξ кi η ; 6) sŁ se determine dacŁ v.a. ξ кi η sunt dependente sau independente. FuncŞile $f(x,y)$ sunt date pe variante.

1) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

2) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

3) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

4) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-4xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

5) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

6) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-6xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

7) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-6y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

8) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

9) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

10) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

11) $f(x, y) = a \cdot e^{-x^2-4xy-6y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

12) $f(x, y) = a \cdot e^{-3x^2-6xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

13) $f(x, y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

14) $f(x, y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

15) $f(x, y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

16) $f(x, y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

17) $f(x, y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

18) $f(x, y) = a \cdot e^{-4x^2-4xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

19) $f(x, y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

20) $f(x, y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

21) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

22) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-4xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

23) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-6xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

24) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-6xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

25) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

26) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

27) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

28) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-4xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

29) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

30) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-6xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

6. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ, η) definit în exerciŞul 8.3.5 prin d.r. in ansamblu *f*(*x*,*y*), sŁ se determine : 1) valorile medii m_ξ ki m_η ; 2) dispersiile D_ξ ki D_ξ ; 3) abaterile medii pŁtratice σ_ξ ki σ_ξ ;4) covarianŞa $C_{\xi\eta}$; 5) coeficientul de corelaŞe $r_{\xi\eta}$; 6) matricea covarianŞelor Cov[ξ,η] ; 7) matricea corelaŞilor *K*.

7. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ, η) din exerciŞul 8.3.5, sŁ se determine : 1) d.r. a v.a. ξ condiŞonatŁ de evenimentul η = *y*; 2) d.r. a v.a. η condiŞonatŁ de evenimentul ξ = *x*; 3) funcŞa de regresie a v.a. ξ în raport cu η ; 4) funcŞa de regresie a v.a. η în raport cu ξ.

5. Elemente de Teoria Informaţiei

5.1. Obiectul de studiu al Teoriei Informaţiei

Teoria Informa˜Ћei (TI) ***studiază modele matematice (preponderant statistico-probabiliste) ale fenomenelor legate de recepţionarea, stocarea şi transmiterea informației***. PŁrintele TI este Claude Shannon, anul 1948 fiind considerat anul apariŞei acestei teorii.

NoŞunea de informaŞe este o noŞune primarŁ, adicŁ imposibil de încadrat într-o definiŞe strictŁ, la fel ca noŞunea de punct in geometrie sau noŞunea de mulŞme din Teoria MulŞmilor. Încerc˜Ând, totuкi, sŁ o explicŁm, am putea spune ca ***informaţia pentru un sistem oarecare, biologic sau tehnic, este un mesaj despre evenimente care au sau au avut sau vor avea loc atât în exteriorul sistemului cât şi în interiorul lui.***

MenŞonŁm cŁ între *informaţie* кi *nedeterminare* existŁ o legŁturŁ str˜ÂnsŁ. O ***informaţie este informaţie, în sensul adevărat al cuvântului , dacă şi numai dacă ea înlătură o anumită nedeterminare.***

Într-un experiment se obŞne o informaŞe numai atunci c˜Ând nu cunoaкtem rezultatul sŁu înainte de efectuarea experimentului, adicŁ numai atunci c˜Ând rezultatul înlŁturŁ nedeterminarea care exista la început.Mai mult, cu c˜Ât nedeterminarea de la începutul experimentului este mai mare, cu at˜Ât mai mare va fi cantitatea de informaŞe pe care o obŞnem atunci c˜Ând aflŁm rezultatul experimentului.

5.2. Entropia ca masura a nedeterminarii/cantitatii de informative

În cazul unui eveniment aleator A asociat experimentului aleator $\mathcal{E}$ кi pentru care probabilitaea sa **P**(A)>0, Claude Shannon defineste cantitatea de informaŞe ce se con"Hhe în mesajul ñ*s-a produs evenimentul A*ò ca fiind numŁrul $I(A) = -log_2\mathbf{P}(A)$. Cea mai mica unitate a cantitŁ"Hl de informaŞe se numeкte *bit*, unde $I(A) = 1bit$ atunci c̃And $\mathbf{P}(A)=1/2$.

Evident, $I(A)$ poate fi interpretatŁ кi ca, mŁsura nedeterminŁrii legate de producerea evenimentului A. aceastŁ nedeterminare fiind cu at̃A mai mare cu c̃A probabilitatea $\mathbf{P}(A)$ va fi mai mica. În extremis, gradul de nedeterminare este egal cu 0 dacŁ $\mathbf{P}(A)=1$.

Ne intereseazŁ mŁsura nedeterminŁrii înlŁturate sau cantitatea de informa"He furnizatŁ de realizarea unui experiment aleator $\mathcal{E}$. Pentru aceasta presupunem cŁ în acest experiment observatorul este interest (înregistreazŁ) producerea unuia din evenimentele A_1 , A_2 ,é , A_n care alcŁtuiesc un ***grup complet de evenimente***, *adică acestea sunt disjuncte doua cate doua si suma lor coincide cu evenimentul sigur*. Realizarea efectivŁ a experimentului $\mathcal{E}$, înregistrarea unui anumit eveniment dintre evenimentele A_1 , A_2 ,é , A_n , ca rezultat a experimentului, înlŁturŁ nedeterminarea pe care am avut-o la început.

Exemplu. Fie 2 experimente aleatoare:

$\mathcal{E}_1$ſ aruncarea unei monede ñperfecteò кi grupul complet de evenimente A_1={*apariţia stemei*}={S}, A_2={*apariţia banului*}={B}

$\mathcal{E}_2$ſ aruncarea unei monede deformate, astfel înc̃At $\boldsymbol{P}\{S\}=0.9$, $\boldsymbol{P}\{B\}=0.1$.

Avem, astfel, repartiŞile corespunzŁtoare:

$$\mathcal{E}_1: \begin{pmatrix} S & B \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2: \begin{pmatrix} S & B \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Evident, $\mathcal{E}_1$ conŞne mai multŁ nedeterminare dec̃At $\mathcal{E}_2$,fapt care poate fi confirmat folosind noŞunea de **entropie** definite în continuare.

Fie un experiment aleator $\mathcal{E}$ în care putem observa, în urma efectuŁrii lui, unul din evenimentele A_1 , A_2 ,é , A_n care alcŁtuiesc un grup complet de evenimente. Presupunem cŁ $p_i=\boldsymbol{P}(A_i)>0$, $i=1,...,n$.

Cantitatea de informaŞe I furnizatŁ în urma efectuŁrii experimentului $\mathcal{E}$ depinde de evenimentul A_i care se va produce, prin urmare aceasta este o v.a. data de repartiŞa

$$I: \begin{pmatrix} I(A_1) & I(A_2) & \dots & I(A_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, p_i > 0\ ,\ i = 1, \dots, n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1)$$

Anume valoarea medie ***MI*** a acestei v.a. poate fi luatŁ în calitate de mŁsurŁtor al cantitŁŞi de informaŞe / gradului de nedeterminare furnizat de experimentul $\mathcal{E}$. Mai exact, putem da urmŁtoarea

Definiţie. Vom numi ***entropie*** sau ***măsură a nedeterminării*** sau ***cantitate de informaţie*** a experimentului $\mathcal{E}$ numŁrul

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i ,$$

considerÂnd cŁ $p \cdot \log_2 p = 0$ dacŁ $p = 0$.

Revenind la exemplul de mai sus, constatŁm ca entropiile lor sunt egale cu $H(\mathcal{E}_1) = 1 bit$, $H(\mathcal{E}_2) = -(0.9 \log_2 0.9 + 0.1 \log_2 0.1) < H(\mathcal{E}_1)$ deoarece funcŞa $H(p) = -(p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$ are valoare maximalŁ ,egala cu 1, pentru $p = 0.5$.

5.3. Proprietatile entropiei

Entropia posedŁ un кir de proprietŁŞ, cele mai importante fiind prezentate în urmŁtoarele teoreme.

Teorema 1. *Entropia* $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ *ce corespunde experimentului* $\mathcal{E}$ *cu repartiţia (1) posedă următoarele proprietăţi :*

a) $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0$;

b) $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ *dacă şi numai dacă există un indice* i_o *astfel încât* $p_{io} = 1$;

c) $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H(1/n, 1/n, \dots 1/n)$ *pentru orice* $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i \geq 0\ ,\ i = 1, \dots, n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

d) $H(p_1, p_2, \dots, p_n\ ,\ 0) = H(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

AvÃnd douŁ experimente $\mathcal{E}_1$ кi $\mathcal{E}_2$ independente putem define entropia experimentului $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ ce constŁ în efectuarea lor simultanŁ. NotŁm entropia experimentului cu $H(\mathcal{E})$. Are loc

Teorema 2. $H(\mathcal{E})=H(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)= H(\mathcal{E}_1)+ H(\mathcal{E}_2)$.

Exemplu. Consideram in calitate de experiment aleator $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ aruncarea simultanŁ a douŁ monede perfecte, $\mathcal{E}_1$ fiind aruncarea primei monede, iar $\mathcal{E}_2$ aruncarea celei de a doua monede. Evident, $H(\mathcal{E}_1) = H(\mathcal{E}_2)=1$bit, dar cantitatea de informaŞe $I(\mathcal{E})$ furnizatŁ de rezultatul efectuŁrii experimentului $\mathcal{E}$ este o v.a. cu repartiŞa

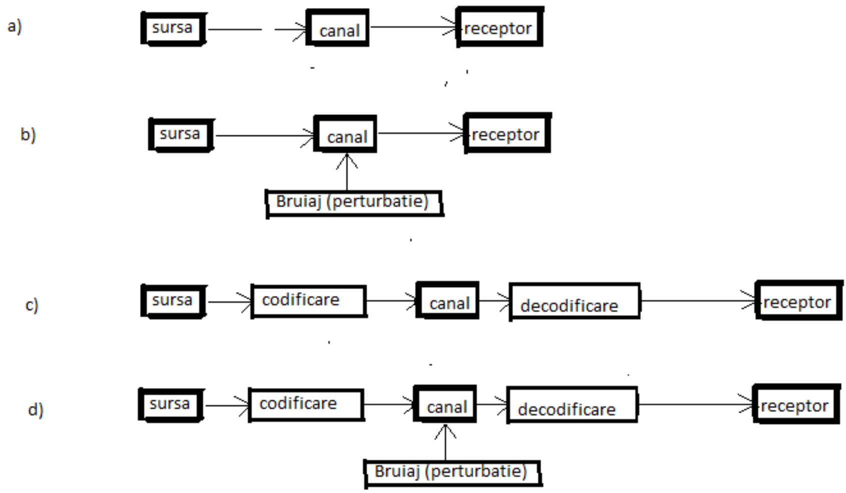
$$I: \quad \begin{pmatrix} I(SS) & I(SB) & I(BS) & I(BB) \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$H(\mathcal{E})=H(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)= = -\sum_{i=1}^{n}(1/4)\log_2(1/4) = 2bit = H(\mathcal{E}_1)+ H(\mathcal{E}_2).$$

5.4. Transmiterea informatiei. Codificarea. Teoreme de codificare.

Orice system de transmitere a informaŞei se încadreazŁ în una din urmŁtoarele scheme generale:



Pentru a înŞelege rolul noŞunii de entropie în Teoria InformaŞei ne vom referi în continuare, drept exemplu, la schema c) de transmitere a infpormaŞei cu codificare/decodificare, dar fŁrŁ bruiaj. Dar pentru început vom vedea ce reprezintŁ codificarea/decodificarea în sistemele de comunicaŞe de orice naturŁ, pornind de la urmŁtorul

Exemplu. Consideram trimiterea unui mesaj prin sistemul SMS (system de mesaje scurte) al unui telefon mobil. Pentru aceasta folosim, initial, in calitate de semnale caracterele tastaturii QWERTY, numarul lor total fiind notat cu N. Cu alte cuvinte aceste caractere formeaza o mulŞme $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,...,x_N\}$ de semnale. În momentul trimiterii lui (apasarii butonului ñsendò) fiecare semnal/character x din $\mathcal{X}$ este codificat digital, adicŁ cu ajutorul unei mulŞmi de semnale simple $\mathcal{Y}=\{y_1,y_2,...,y_Q\}=\{0,1\}$.

Definiţie. Vom numi *codificare (codare)* asocierea la un anumit system de semnale care poartŁ o informaŞe (mesaj) a unor succesi-uni/кiruri de semnale a unui alt system de semnale. Primele se numesc semnale initiale, cele de a doua se numesc semnale simple.

Este firesc ca multimea $\mathcal{Y}$ de semnale simple sŁ conŞinŁ mai puŞine semnale decÂt multimea $\mathcal{X}$ cea ce se кi întÂmplŁ în exemplul nostru, $Q<N$.

În Teoria InformaŞei se folosesc, în funcŞe de rezultatele scontate, diferiŞ algoritmi de codare/decodare.

Motivele care ne conduc la necesitatea codarii informatiei sunt multiple. Iata cÂteva dintre ele:

a) Natura sistemului concret de transmitere a informaŞei (telegraf, telefon mobil, sistemul Morse, etc.) implicŁ un anumit mod de codare;

b) PrezenŞa bruiajelor (perturbaŞilor) canalelor de transmitere a informaŞei implicŁ utilizarea codŁrii pentru a diminua efectul nociv asupra corectitudinii informaŞei recepŞonate;

c) La fel, caracterul intim, secret al informaŞei implicŁ codarea ei**.**

Observatie. Motive de tipul c) pot avea drept consecintŁ faptul cŁ, uneori, *card* $\mathcal{Y}$Ó*card* $\mathcal{X}$.

Fie $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,...,x_N\}$ mulŞmea de semnale iniŞale, iar $\mathcal{Y}=\{y_1,y_2, ...,y_Q\}$ multimea de semnale simple. În procesul alcŁtuirii/trimiterii unui mesaj (unei informaŞi), folosind semnalele din $\mathcal{X}$, fiecare x_i din $\mathcal{X}$ are o anumita probabilitate (frecventa relativŁ) $p(x_i)$ cu care se intalneste in acest mesaj,

$\sum_{i=1}^{N} p(x_i)=1$. SŁ luŁm, drept exemplu, mesajul ñ***mâine_va_ ploua***ò. Acesta are lungimea 14, incluzÂnd simbolul ñpauzŁò- ñ_ ò, iar semnalele ñ*m*ò, ñ*a*ò кi ñ*b*ò, luate ca exemplu, au frecventa relativŁ egalŁ, respectiv, cu $p(m)=1/14$, $p(a)=1/7$, $p(b)=0$. Prin urmare, transmiterii unui mesaj $\mathcal{E}$ i se poate asocia cantitatea de informaŞe $H(\mathcal{E})$. Cum în procesul codŁrii (criptarii) fiecarui semnal x_i i se asociazŁ un кir de semnale simple din $\mathcal{Y}$, кirul avÂnd lungimea n_i, $i=1,2,...,N$, atunci putem calcula lungimea medie L a unui кir de semnale simple folosite în procesul de codare: $L=\sum_{i=1}^{N} n_i p(x_i)$.

Acum putem formula, drept examplu, douŁ rezultate teoretice ce vizeazŁ procesul de codificare a semnalelor transmise prin intermediul unui system/canal de transmitere a informatiei fŁrŁ bruiaj, rezultate care arata care sunt limitele кi posibilitŁŞle codificari.

Propoziţie. *Pentru ca să fie posibilă codificarea prin intermediul şirurilor de semnale simple de lungimea n_i , $i=1,2,...,N$, care se fie ataşate semnalelor iniţiale $x_1,x_2,...,x_N$, este **necesar şi suficient** să fie îndeplinită inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{N} Q^{-n_i} < 1.$$

Teorema codificării. *Ca să putem efectua o codificare, folosind Q semnale simple, pentru a transmite o cantitate de informaţie $H(\mathcal{E})$, este* <u>necesar</u> *ca lungimea medie L a şirurilor de codificare, ataşate semnalelor inițiale din multimea $\mathcal{X}$, purtătoare de informație, să nu fie inferioară numărului $H(\mathcal{E})/\log_2 Q$, adică $L \geq H(\mathcal{E})/\log_2 Q$.*

Exemplu (***continuare***). În directŁ legaturŁ cu trimiterea mesajului ñ***mâine_va_ ploua***ò, respectiv, experimentul $\mathcal{E}$, cantitatea de informa‟Ĥe I va fi o v.a. cu repartitia

$$I: \begin{pmatrix} I(\hat{a}) & I(a) & I(e) & I(o) & I(u) & I(i) & I(m) & I(n)\dots & I(v) & I(\_) \\ 1/14 & 2/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14\dots & 1/14 & 2/14 \end{pmatrix}$$

Prin urmare $H(\mathcal{E})=2[-(2/14)\cdot\log_2(2/14)]+ 12[-(1/14)\cdot\log_2(1/14)]=$
$= \log_2 14 - 2/7 \approx 3.81-0.29=3.52.$

În cazul codificŁrii digitale $\mathcal{Y}=\{0,1\}$, $Q=2$. Prin urmare ca acest mesaj sa poata fi codificat digital este necesar ca lungimea medie a sirurilor de codificare sa fie mai mare sau egalŁ cu $H(\mathcal{E})/\log_2 Q=3.52$.

BIBLIOGRAFIE

1. Poкtaru A., Leahu A. Probabilitate, Procese aleatoare кi aplicaŞii, ChiкinŁu, ķtiinŞa, 1991.
2. P.Ciumac, V.Ciumac,.M.Ciumac. Teoria ProbabilitŁŞilor кi elemente de StatisticŁ MatematicŁ, ChiкinŁu ,2003.
3. Silviu Guiaкu, Radu Theodorescu, Matematica si Informatia, Bucuresti, Edit. Stiintifica, 1967..
4. Sbornic zadaci po teorii veroiatnostei, matematicescoi statistike i teorii slucianih protzessov. (red. A.A. Sveshnicov), l.rus., ed. NAUKA, Moscva, 1970.
5. G. A. Marin, Probability for Computer Scientists http://my.fit.edu/~gmarin/CSE5231/ProbabilityBasics.pdf