Тема 5.4. ***Двоично-десятичная арифметика***

Операции над десятичными числами реализуются как в мощных ВС, так и в электронных калькуляторах. Поэтому изучение алгоритмов выполнения двоично-десятичных арифметических операций является безусловной необходимостью.

В двоично-кодированном представлении десятичного числа каждая десятичная цифра изображается тетрадой двоичных символов

$b_i = \{ß_4ß_3ß_2ß_1\}^i$, где b_i - десятичная цифра i-го разряда; $ß_j$ - двоичная цифра i-й тетрады.

Полученный таким образом десятичный код, кодированный двоичными символами, для краткости называют Д-кодом.

Имеется некоторое множество Д-кодов. Оно обусловливается наличием всего 10 разрешенных из 16 возможных комбинаций, которые допускает тетрада.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{16}^{10} = \frac{16!}{6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{2.905.862.\ 400}{720} = 4.035.920$$

Наличие запрещенных комбинаций в Д-кодах отличает их от обычных позиционных систем счисления, в которых все комбинации - разрешенные. Из всего множества известных Д-кодов наибольшее распространение в вычислительной технике получил код BCD – Binary Coded Decimals (8421).

Правила сложения в коде 8421

Из-за запрещенных комбинаций, при сложении чисел в любом из Д-кодов возникают необходимость в коррекции результата и трудности в формировании десятичного переноса в следующую тетраду. Особенности сложения чисел в каждом из Д-кодов различны, поэтому рассмотрим их раздельно. При этом будем считать, что заданы числа

А=$a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ и

В=$b_nb_{n-1}\ldots b_1b_0$, где a_i, b_i - двоично-кодированные десятичные цифры (тетрады). Необходимо получить сумму S= A + B.

Далее выведем правила сложения. При этом через c_{i-1} будем обозначать перенос, который может возникнуть из младшей тетрады при суммировании чисел.

При сложении чисел в коде 8421 могут возникнуть следующие случаи:

1. Если $a_i+b_i+c_{i-1}<10$, то при выполнении действий над разрядами тетрады по правилам двоичной арифметики сразу получается правильный результат.

ai=5		0	1	0	1		
bi=2		0	0	1	0		
Si=7		0	1	1	1		7

2. Если $a_i+b_i+c_{i-1}\geq 10$, то возникает десятичный перенос. При этом признаком неправильного результата является в одном случае появление запрещенной комбинации, если
$15\geq a_i+b_i+c_{i-1}\geq 10$,

ai=7							0	1	1	1	
bi=6							0	1	1	0	
ci=1										1	
Si=14							1	1	1	0	
							0	1	1	0	коррекция
		0	0	0	1	←	0	1	0	0	
				1					4		

Во втором случае: a_i+b_i+c_{i-1} ≥16, признаком неправильного результата является возникновение потетрадного переноса равного 16, что превышает значение десятичного переноса на 6. В любом из этих случаев необходимо скорректировать результат в данной тетраде введением поправки $+0110_2$.

ai=9							1	0	0	1	
bi=8							1	0	0	0	
ci=0										0	
Si=17		0	0	0	1	←	0	0	0	1	
							0	1	1	0	коррекция
		0	0	0	1		0	1	1	1	
				1					7		

Таким образом, если в i-й тетраде сумма цифр с переносом из (i-1)-й тетрады меньше десяти, то сложение производится без поправок. Если же суммирование цифр с переносом приводит к появлению запрещенной комбинации или к возникновению переноса в старшую тетраду, то происходит коррекция результата тетрады введением поправки $+0110_2$. Перенос, который возникает во время коррекции i-й тетрады, прибавляется к содержимому (i+1)-й тетрады.

Пример

A=1783	A=	0	0	0	1	0	1	1	1		1	0	0	0	0	0	1	1
B=4592	B=	0	1	1	1	0	1	0	1		1	0	0	1	0	0	1	0
Z=6375		0	1	0	1	1	1	0	1	←	0	0	0	1	0	1	0	1
						0	1	1	0		0	1	1	0				
		0	1	1	0	0	0	1	1		0	1	1	1	0	1	0	1
				6				3					7				5	

При этом, если в нескольких тетрадах, начиная с (i+1)-й, разрядная сумма равна 1001_2, то перенос приведет к формированию запрещенной комбинации в (i+1)-й тетраде. В результате этого потребуется коррекция, которая приведет к запрещенной комбинации в (i+2)-й тетраде и т. д. Следовательно, из-за последовательного распространения потетрадных переносов время сложения в коде Д1 составит в худшем случае n тактов, где n - количество тетрад. Обычно схемы строят таким образом, чтобы перенос, возникающий при прибавлении тетрадной поправки, проходил сквозь тетрады, в которых предварительная сумма равна $9_{10}=1001_2$ и сбрасывал их в 0. При этом сумма всегда формируется за два такта.

A=1328	A=	0	0	0	1		0	0	1	1		0	0	1	0		1	0	0	0
B=3673	B=	0	0	1	1		0	1	1	0		0	1	1	1		0	0	1	1
Z=5001		0	1	0	0		1	0	0	1		1	0	0	1		**1**	**0**	**1**	**1**
																	0	1	1	0
		0	1	0	0		1	0	0	1		1	0	1	0	←	0	0	0	1
											←	0	1	1	0					
		0	1	0	0		1	0	1	0		0	0	0	0		0	0	0	1
							0	1	1	0										
		0	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**1**

A=1328	A=	0	0	0	1		0	0	1	1		0	0	1	0		1	0	0	0
B=3673	B=	0	0	1	1		0	1	1	0		0	1	1	1		0	0	1	1
Z=5001		0	1	0	0		1	0	0	1		1	0	0	1		**1**	**0**	**1**	**1**
						←											0	1	1	0
		0	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**1**

Сложение чисел со знаком в ДК

Для выполнения операции сложения (вычитания) чисел в Д-кодах необходимо отрицательные числа представлять в прямом, обратном и дополнительном кодах. Пусть А=-0**.** $a_1 a_2 \ldots a_m$, где a_i - тетрады десятичного числа. Тогда

$$A_{cd} = 1.\ a_1 a_2 \ldots a_m\ ;$$
$$A_{ci} = 1.\ \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ \ldots \tilde{a}_m\ ;$$
$$A_{cc} = 1.\ \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ \ldots (\tilde{a}_m + 1),$$

где $\tilde{a}_i$ есть дополнение до 10-1=9 во всех тетрадах; в младшей тетраде ($\tilde{a}_m$+1) есть дополнение до 9+1=10. Следовательно, $\tilde{a}_i + a_i = 9$.

Примеры:
Апк= - 3721
Адк= - 6279.
Апк+Адк= 10000.

В=-4500
Вдк=-5500

Полжительный знак представляется: 0000
Отрицательный знак представляется: 1001

Примеры:

A=-306	A+B																			
B=578																				
			Знак																	
Адк=-694	A=	1	0	0	1		0	1	1	0		1	0	0	1		0	1	0	0
B=578	B=	0	0	0	0		0	1	0	1		0	1	1	1		1	0	0	0
		1	0	0	1		1	1	0	0	←	0	0	0	0		1	1	0	0
							0	1	1	0		0	1	1	0		0	1	1	0
		1	0	1	0		0	0	1	0		0	1	1	1		0	0	1	0
		0	1	1	0															
		0	0	0	0		0	0	1	0		0	1	1	1		0	0	1	0

A=682	A-B																					
B=820																						
Z=-138																						
A=682		A=		0	0	0	0		0	1	1	0		1	0	0	0		0	0	1	0
-Вдк=-180		-Вдк		1	0	0	1		0	0	0	1		1	0	0	0		0	0	0	0
				1	0	0	1		1	0	0	0	←	0	0	0	0		0	0	1	0
														0	1	1	0					
		Zдк		1	0	0	1		1	0	0	0		0	1	1	0		0	0	1	0
		Zдк				Отрицат. Знак					8					6					2	
		Zпк				Отрицат. Знак					1					3					8	

A=-250																						
B=-137																						
Z=-387																						
Адк=-750		Адк=		1	0	0	1		0	1	1	1		0	1	0	1		0	0	0	0
Вдк=-863		Вдк=		1	0	0	1		1	0	0	0		0	1	1	0		0	0	1	1
			←	0	0	1	0		1	1	1	1		1	0	1	1		0	0	1	1
				0	1	1	0		0	1	1	0		0	1	1	0					
		Zдк		1	0	0	1		0	1	1	0		0	0	0	1		0	0	1	1
		Zдк			Отрицат. Знак						6					1					3	
		Zпк			Отрицат. Знак						3					8					7	