

# Electronica Medicală

Filtrarea analogică a semnalelor biomedicale

Iavorschi Anatolie



Tempus

BIOMEDICAL ENGINEERING EDUCATION TEMPUS  
INITIATIVE IN EASTERN NEIGHBOURING AREA



# Conținutul prezentării

- Reprezentarea frecvențială a semnalului
- Filtrele analogice pasive
- Filtrele analogice active



# Reprezentarea frecvențială a semnalului

- Există două moduri de reprezentare a semnalelor electrice:

- Reprezentare TEMPORALĂ

$$\text{Ampl} = f(\text{timp})$$

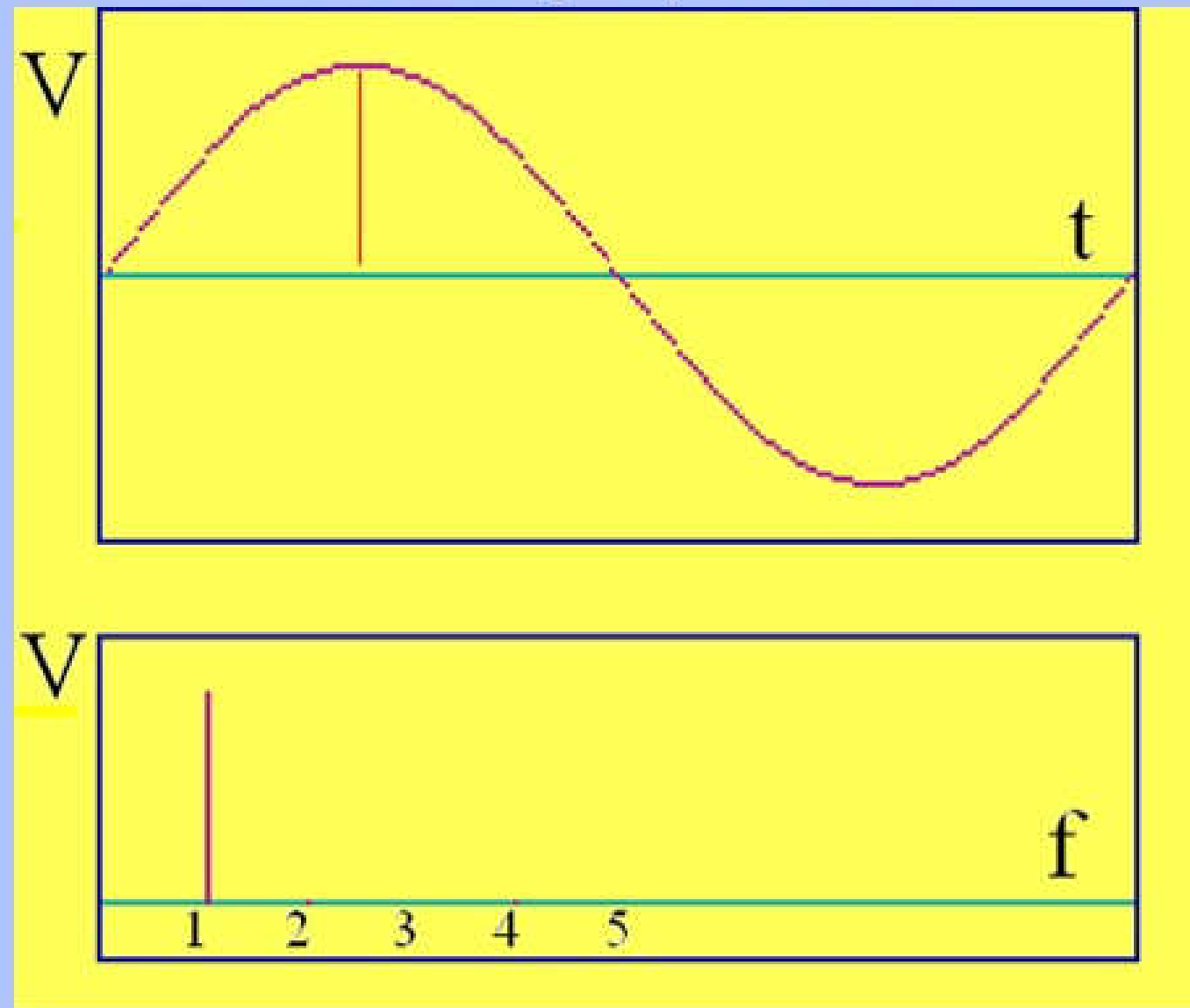
- Reprezentare FRECVENȚIALĂ (spectrul de frecvență)

$$\text{Ampl} = f(\text{frecvență})$$



- Exemplu:

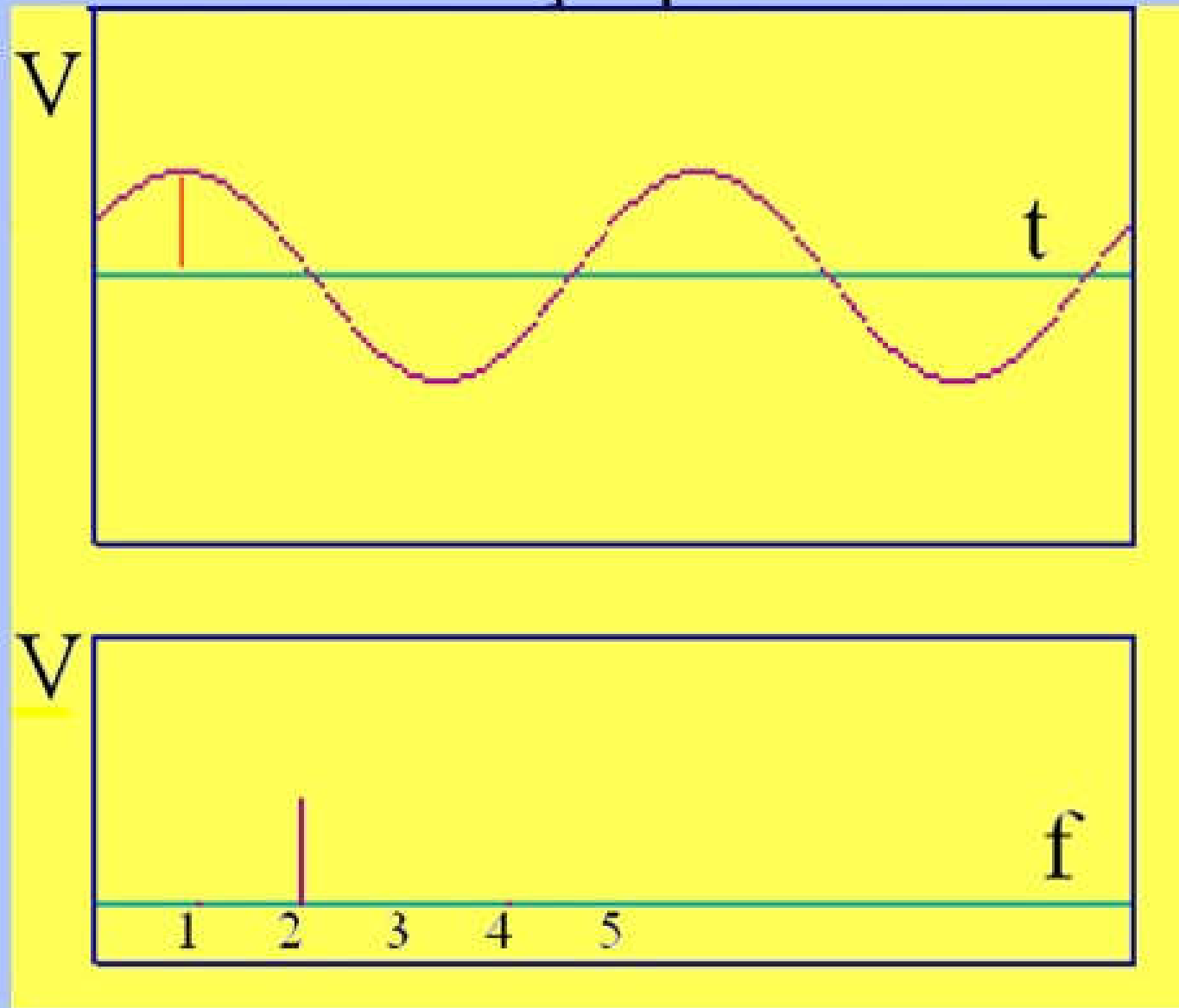
Semnal sinusoidal de 1 Hz și spectrul său:



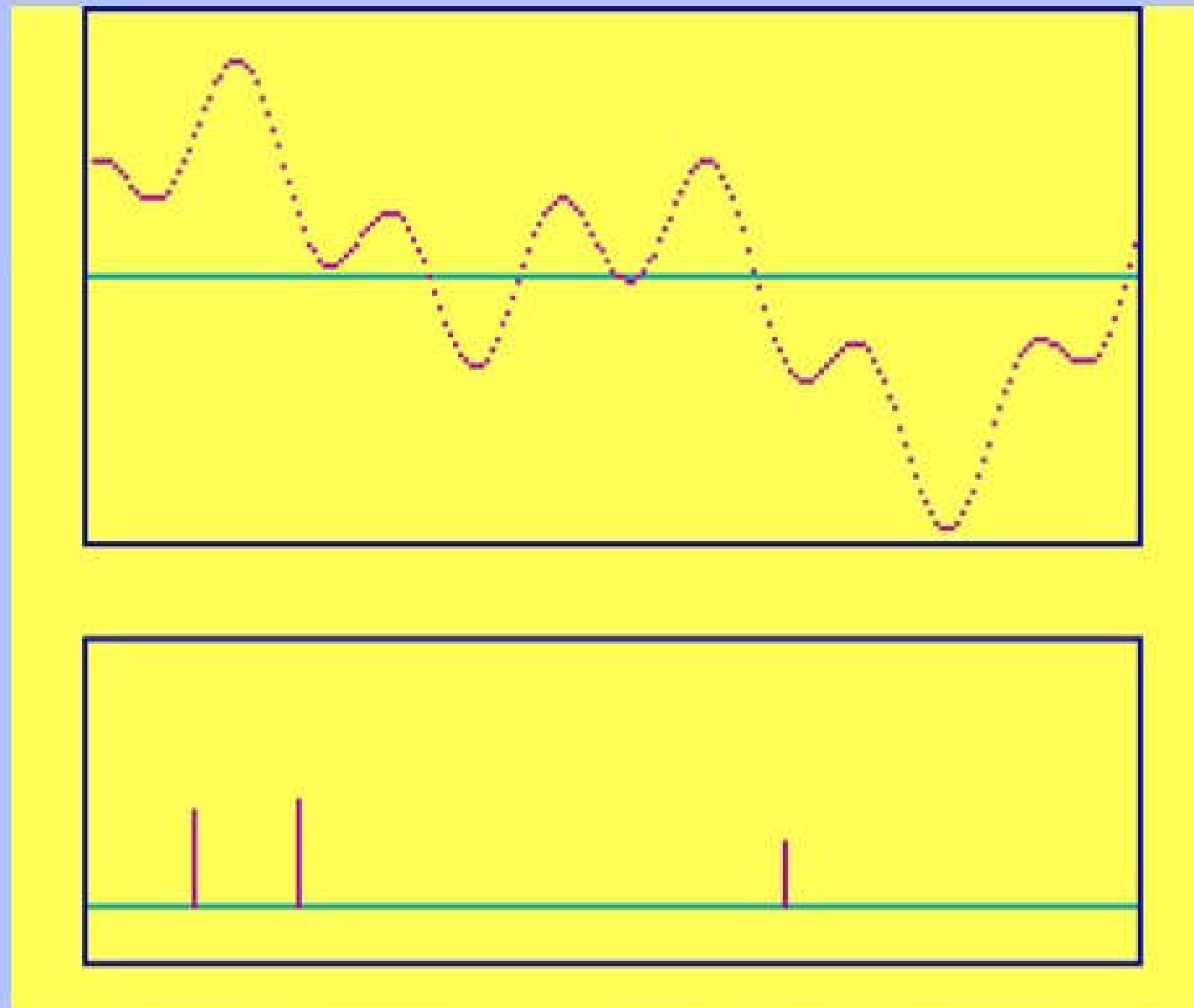
# Reprezentarea frecvențială a semnalului

- Exemplu:

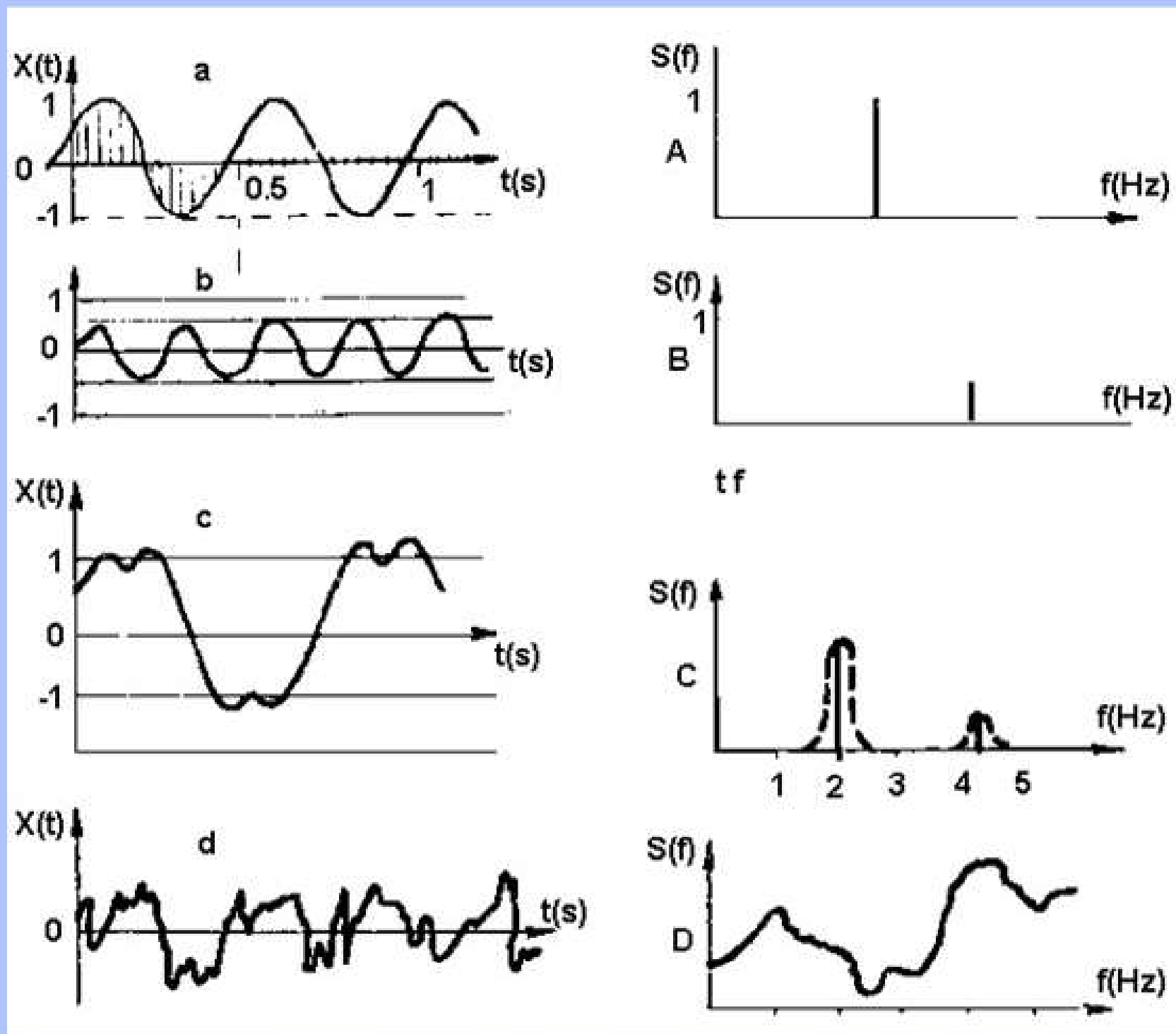
Semnal sinusoidal de 2 Hz și spectrul său:



- Exemplu:
- Semnal mixt (suprapunerea mai multor semnale cu diferite frecvențe)



# Spectrele diferitor semnale





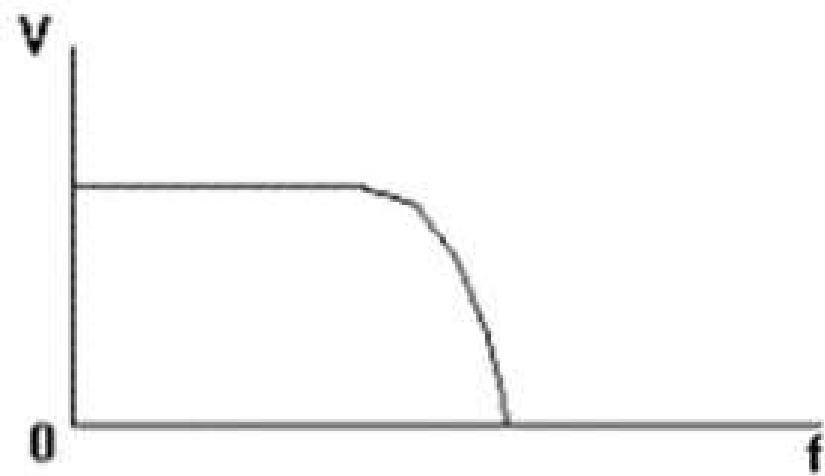
- Filtrele analogice
- Un filtru analogic poate fi privit ca un cuadrupol (două borne de intrare și două de ieșire) alcătuit din diferite elemente de circuit, care are un comportament diferit față de semnalele cu diferite frecvențe.
- Când spunem comportament diferit, ne referim la modul în care filtrul acționează asupra mărimii (amplitudinii) semnalelor cu diferite frecvențe, sau asupra mărimii (amplitudinii) componentelor din spectrul de frecvențe al semnalului de la intrare.



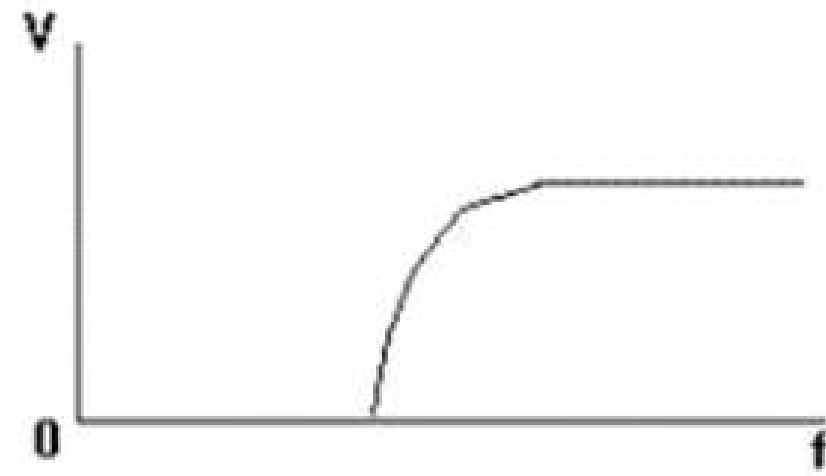
- În funcție de modul în care filtrele acționează asupra semnalelor aplicate la intrare, ele pot fi clasificate în:
- **filtre „trece-jos”** (*Low-Pass* sau **„taie-sus”**), care lasă semnalele cu frecvențe până la o anumită valoare (frecvența de tăiere) să treacă neatenuate, sau atenuate foarte puțin, iar pe cele cu frecvențe superioare frecvenței de tăiere le atenuează foarte puternic.
- **filtre „trece-sus”** (*High-Pass* sau **„taie jos”**), care sunt complementare filtrelor „trece-jos”. Ele atenuează puternic semnalele cu frecvențe mai mici decât frecvența de tăiere și lasă să treacă neatenuate, sau atenuate foarte puțin, semnalele cu frecvențe superioare frecvenței de tăiere.

- **filtre „trece-bandă”** (*Band-Pass*) care lasă să treacă neatenuate, sau atenuate foarte puțin, semnalele cu frecvențe cuprinse într-un anumit domeniu de frecvențe, numit bandă de trecere, și atenuează drastic semnalele cu frecvențe aflate în afara benzii de trecere.
- **filtre „oprește-bandă”** (*Band-Rejection*), care sunt complementarele filtrelor „trece bandă”. Ele atenuează drastic semnalele cu frecvențe cuprinse într-un anumit domeniu de frecvențe, numit bandă de tăiere și lasă să treacă neatenuate, sau atenuate foarte puțin, semnalele cu frecvențe aflate în afara benzii de tăiere.

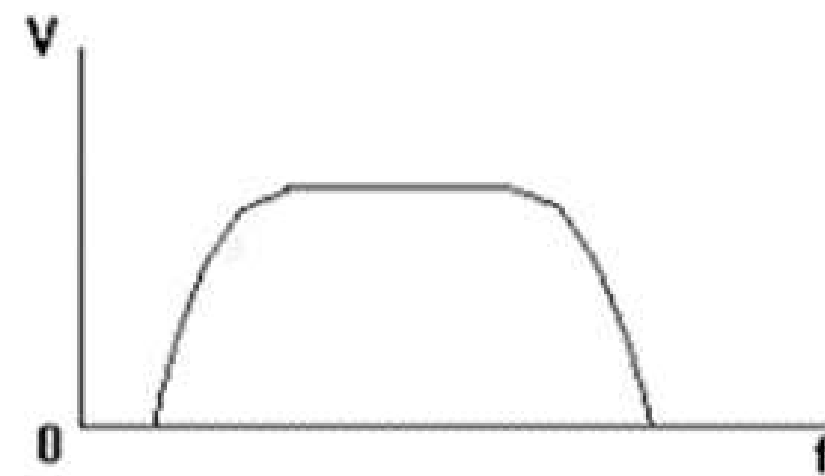
# Clasificarea filtrelor analogice



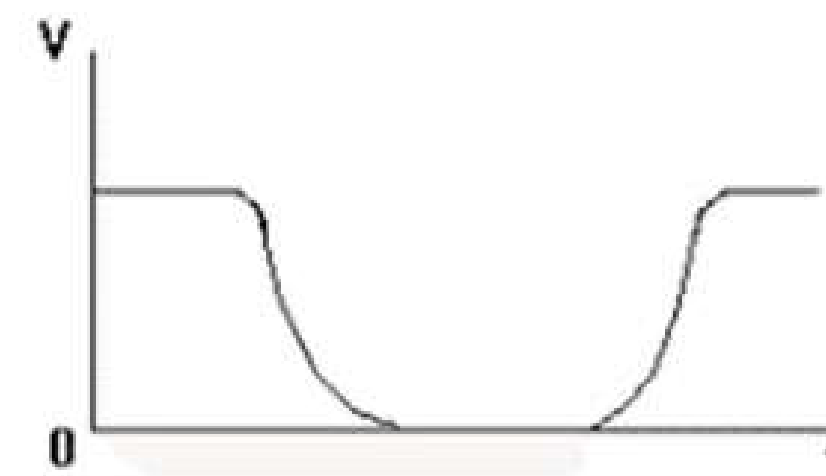
Low Pass



High Pass



Band Pass



Band Stop

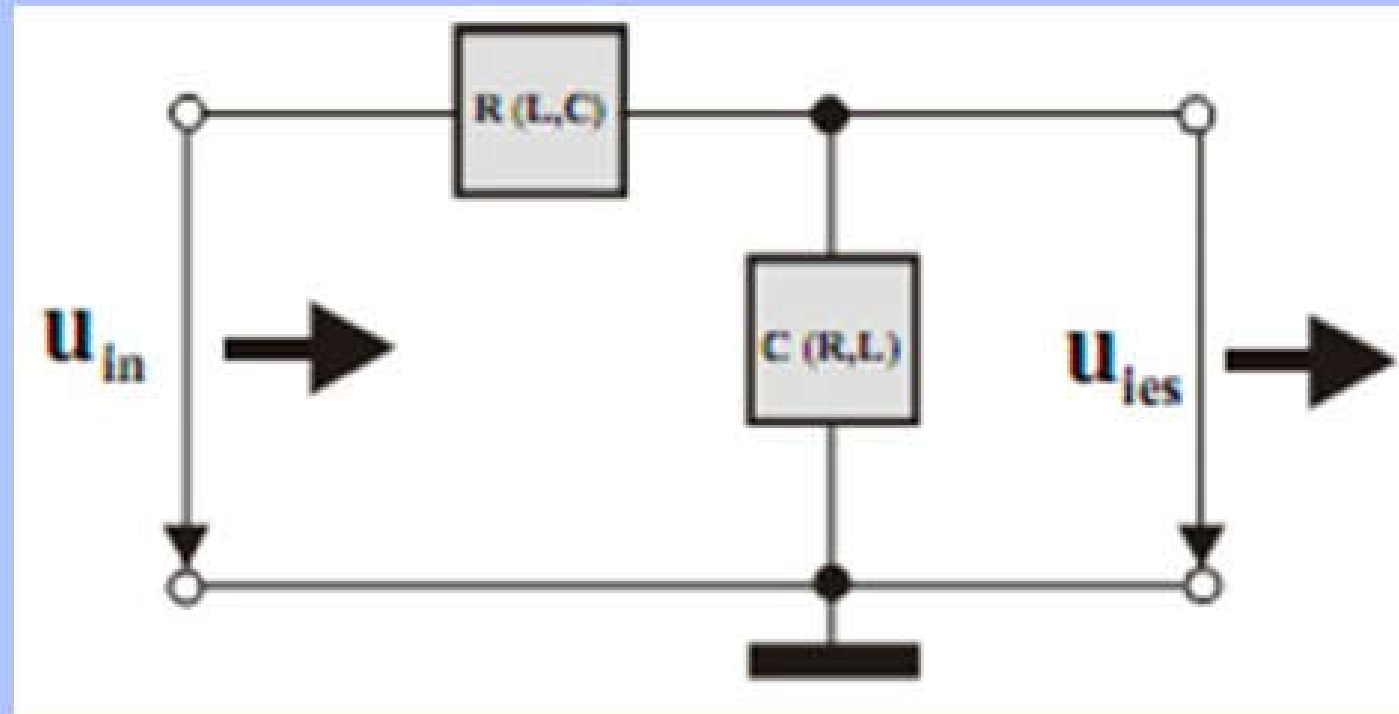
# Clasificarea filtrelor analogice

- În funcție de componența constructivă a filtrelor analogice ele pot fi clasificate în:
  - **filtre pasive**, alcătuite numai din elemente pasive de circuit (rezistori, bobine, condensatori). Consecința unei astfel de structuri este aceea că amplitudinea semnalului de la ieșirea filtrului nu poate fi mai mare decât amplitudinea semnalului de la intrarea lui. Cu alte cuvinte, valoarea maximă a funcției de transfer nu poate fi supraunitară.
  - **filtre active**, care reprezintă o combinație de filtre pasive și elemente active de circuit (de cele mai multe ori, amplificatoare operaționale). Prezența elementelor active (și a eventualelor circuite de reacție) asigură, pe de o parte o amplificare a semnalelor cu frecvențe aflate în banda de trecere și pe de alta, o îmbunătățire a caracteristicilor filtrului.



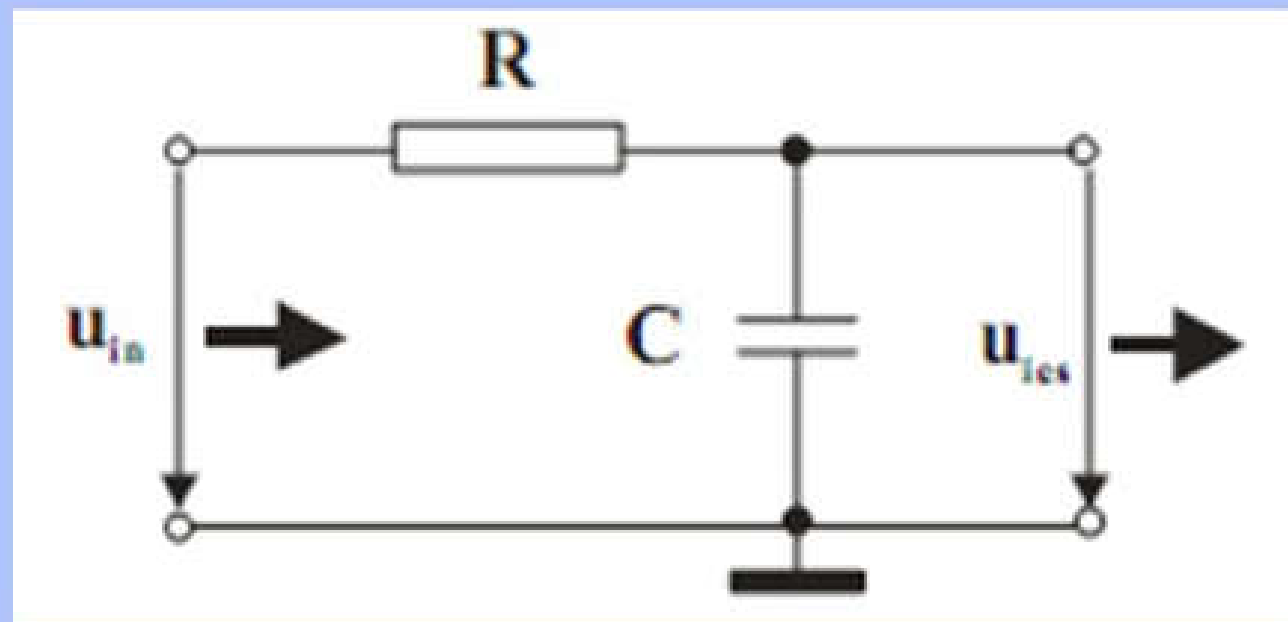
# Filtrele analogice pasive

- Cele mai simple filtre pasive sunt cele construite doar din două elemente: **rezistor + condensator** sau **rezistor + bobină**
- Ele se mai numesc și celule elementare de filtrare sau filtre de ordinul 1 (**1<sup>st</sup> order filter**), putând fi doar de tipul „trece-jos” sau „trece-sus”, în funcție de poziția celor două elemente în circuitul care reprezintă filtrul.



# Filtrele analogice pasive

- Să observăm că rezistorul este prezent în toate cele patru combinații posibile de filtre. Filtrele în care bobina, respectiv condensatorul, ocupă aceeași poziție în circuit sunt complementare: dacă unul este de tip „trece-jos”, celălalt este de tip „trece-sus”.
- Modalitatea de calcul a parametrilor caracteristici ai unui filtru elementar este foarte simplă, mai ales atunci când elementele de circuit se consideră ca fiind ideale.
- Vom exemplifica pe un filtru RC:



# Filtrele analogice pasive

- Vom considera că filtrul lucrează în condițiile cele mai bune: în domeniul util de frecvențe, impedanța filtrului este mult mai mare decât impedanța de ieșire a sursei de semnal și mult mai mică decât impedanța sarcinii pe care el debitează energie.
- Aplicând metoda de calcul cu mărimi complexe, funcția de transfer în tensiune va avea expresia:

$$\frac{u_{ies}}{u_{in}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi RC \cdot f}$$

- Iar modulul acestei funcții:

$$\left| \frac{u_{ies}}{u_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC)^2 \cdot f^2}}$$



# Filtrele analogice pasive

- Din expresia de mai sus observăm că dacă frecvența semnalului este

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

- atunci funcția de transfer va fi egală cu:

$$\left| \frac{u_{ies}}{u_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- ceea ce înseamnă o atenuare cu 3 dB a semnalului de ieșire față de semnalul de intrare.
- Această frecvență se numește frecvență de tăiere și se notează cu  $f_T$  adică frecvența la care semnalul este atenuat cu 3 dB.

# Ce sunt decibelii?

- O mărime de exprimare a rapoartelor, a amplificării sau atenuării semnalului.

$$A_{dB} = 10 \lg \frac{A}{A_0}$$

$$10 \lg \frac{P_i}{P_0} = 10 \lg \left( \frac{U_i}{U_0} \right)^2 = 20 \lg \frac{U_i}{U_0}$$

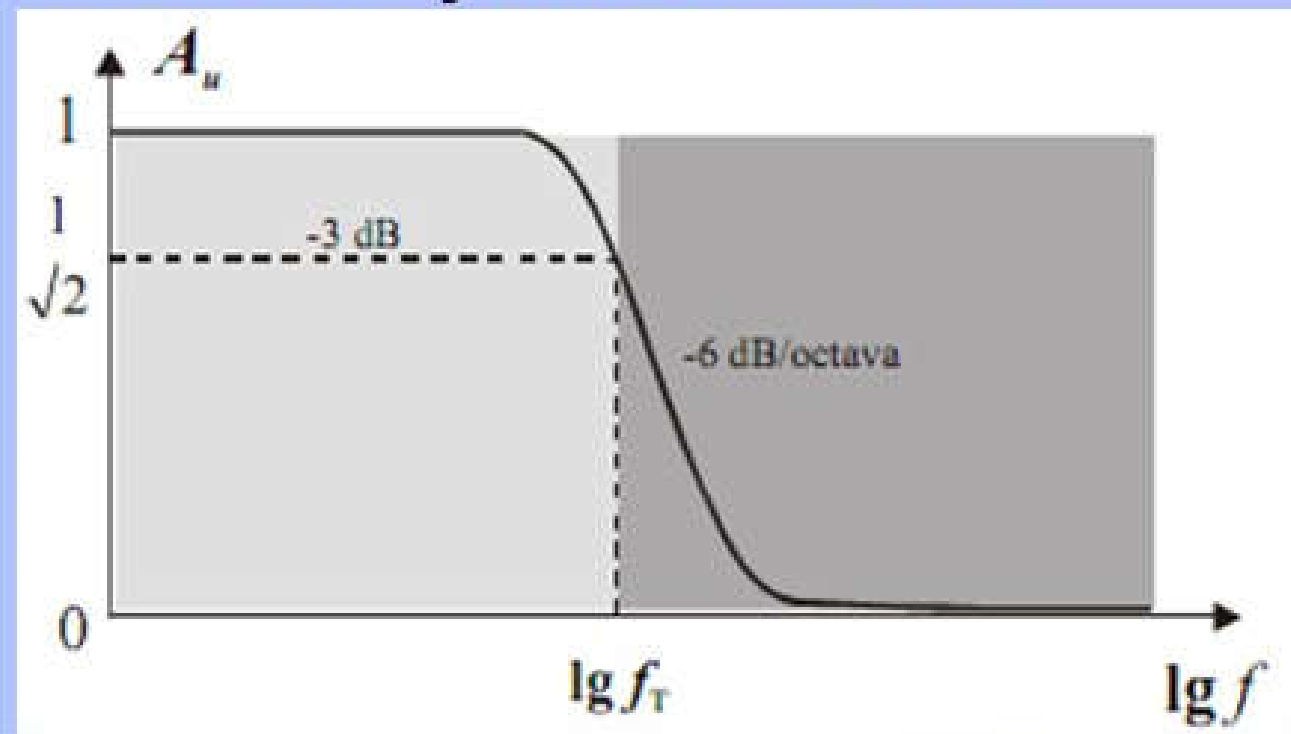
dB	power ratio	amplitude ratio
100	10 000 000 000	100 000
90	1 000 000 000	31 620
80	100 000 000	10 000
70	10 000 000	3 162
60	1 000 000	1 000
50	100 000	316.2
40	10 000	100
30	1 000	31.62
20	100	10
10	10	3.162
0	1	1
-10	0.1	0.316 2
-20	0.01	0.1
-30	0.001	0.031 62
-40	0.000 1	0.01
-50	0.000 01	0.003 162
-60	0.000 001	0.001
-70	0.000 000 1	0.000 316 2
-80	0.000 000 01	0.000 1
-90	0.000 000 001	0.000 031 62
-100	0.000 000 000 1	0.000 01

# Filtrele analogice pasive

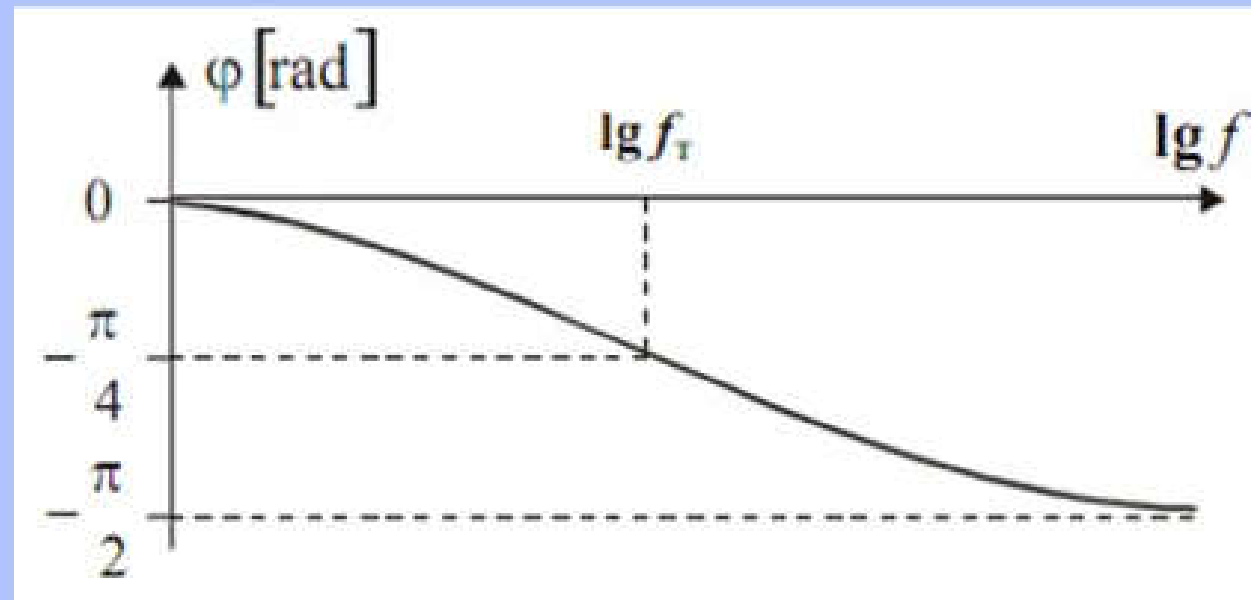
- Modulul funcției de transfer poate fi scris în felul următor:

$$|A_u| = \left| \frac{u_{ies}}{u_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_T^2}}}$$

- Reprezentarea grafică a funcției de transfer:



- Caracteristica de fază:



$$\frac{u_{ies}}{u_{in}} = \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_T^2}} - j \frac{\frac{f}{f_T}}{1 + \frac{f^2}{f_T^2}}$$

$$\varphi = -\text{arctg} \frac{f}{f_T}$$

- Comportarea filtrului la limitele domeniului de frecvențe poate fi analizată și fără cunoașterea formei analitice a funcției de transfer, cunoscând comportarea elementelor reactive de circuit (în cazul de față un condensator) în curent continuu și la frecvențe foarte mari.

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \Big|_{f=0} \rightarrow \infty$$

în curent continuu condensatorul poate fi înlocuit cu o întrerupere

$$X_C = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi f C} = 0$$

la frecvențe foarte mari condensatorul poate fi înlocuit cu un scurtcircuit

- În cazul utilizării inductanței în componența filtrelor, comportarea acestuia la limitele domeniului de frecvențe poate fi analizată cunoscând comportarea inductanței în curent continuu și la frecvențe foarte mari.

$$X_L = 2\pi fL \Big|_{f=0} = 0$$

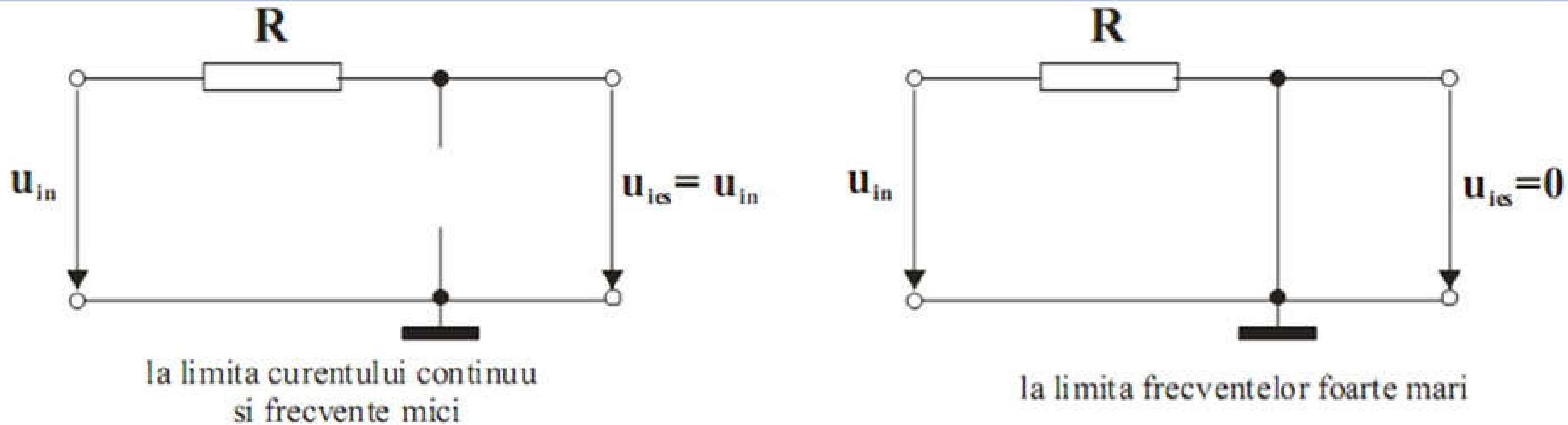
în curent continuu inductanța poate fi înlocuită cu un scurtcircuit

$$X_L = \lim_{f \rightarrow \infty} 2\pi fL \rightarrow \infty$$

la frecvențe foarte mari inductanța poate fi înlocuită cu o întrerupere



# Filtrele analogice pasive



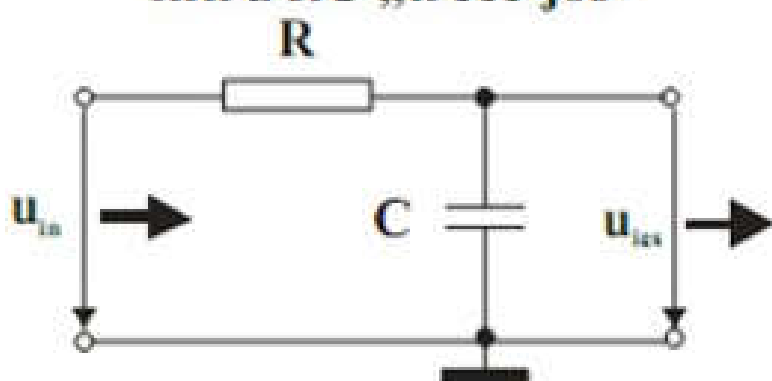
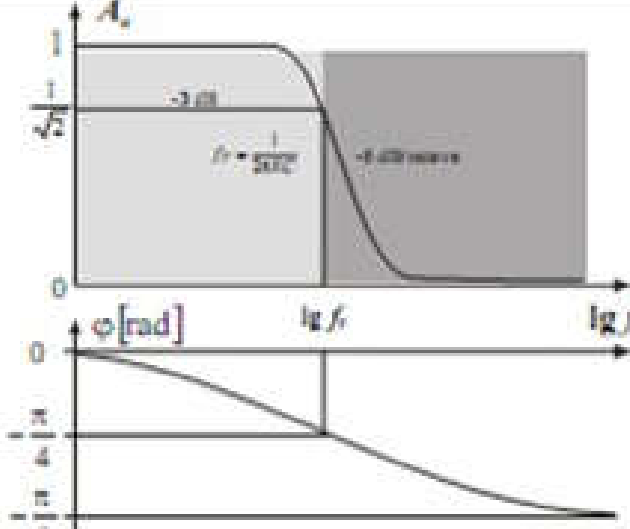
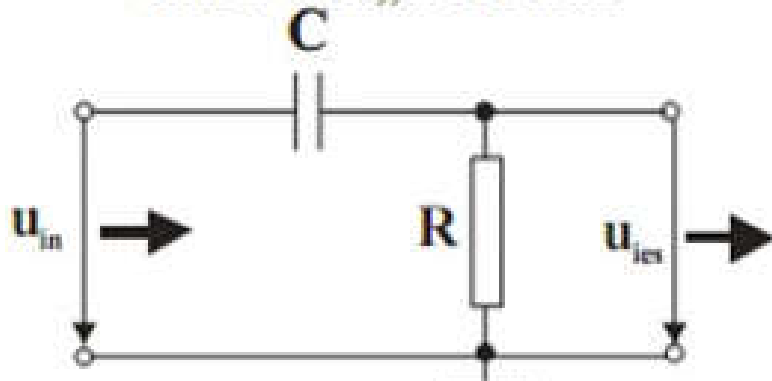
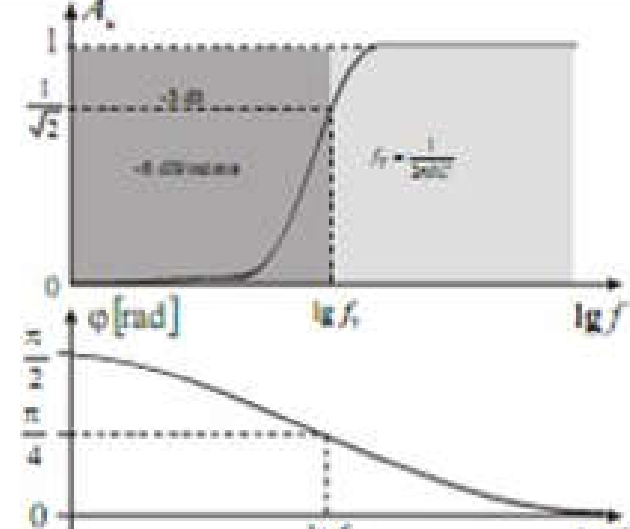
Se vede imediat că la limita curentului continuu și la frecvențe mici (probabil pînă la o anumită valoare) semnalul trece spre ieșire, pentru ca la frecvențe mari să fie puternic atenuat (chiar pînă la 0).



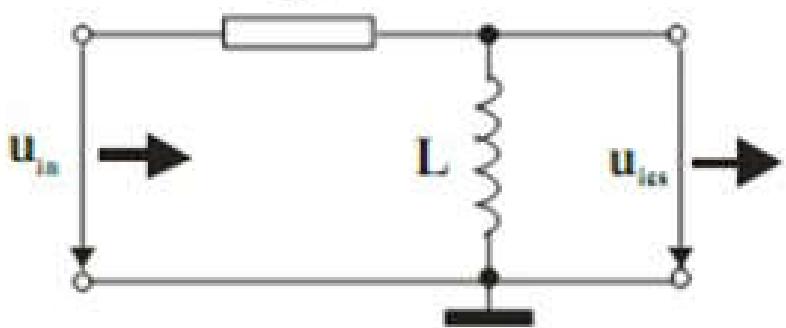
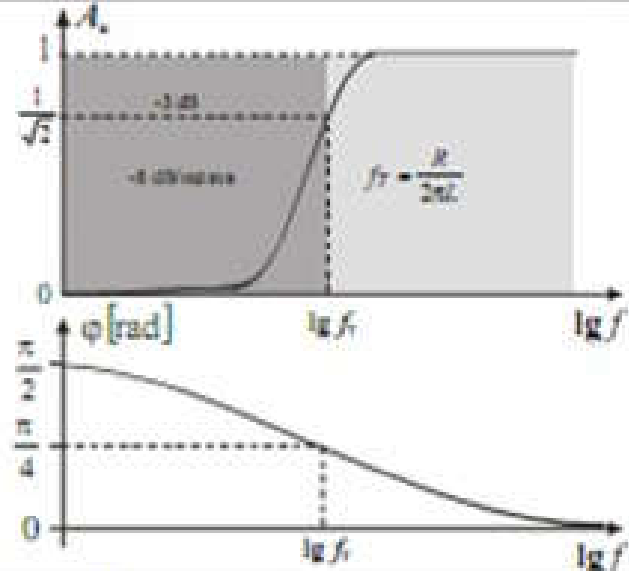
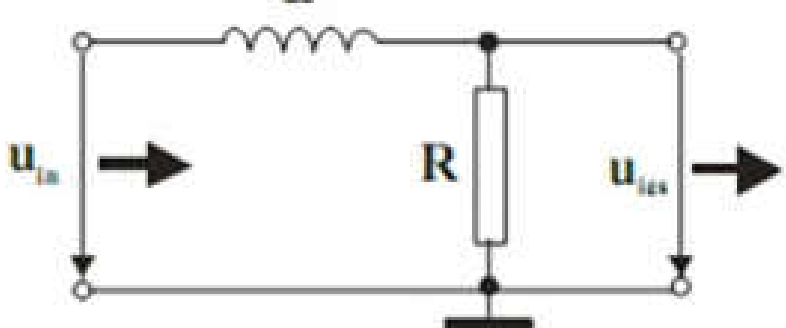
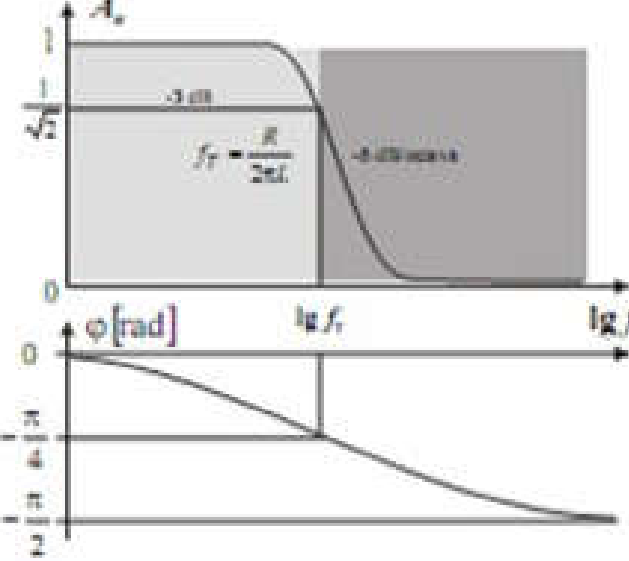
$f$	$\left  \frac{u_{ies}}{u_{in}} \right _{dB} = 20 \cdot \lg \left  \frac{u_{ies}}{u_{in}} \right $
$f_T$	-3,01
$2f_T$	-6,99
$4f_T$	-12,30
$8f_T$	-18,13
$10f_T$	-20,04
$100f_T$	-40,00

- Aceste valori ale atenuării introduse de filtru la diferite frecvențe ne oferă măsura pantei funcției de transfer în vecinătatea frecvenței de tăiere. Alături de tipul de filtru și de frecvența de tăiere, panta filtrului este o altă caracteristică a lui. Astfel, despre filtrul elementar RC analizat anterior se spune că are o pantă de – 6 dB/octavă sau – 20 dB/decadă

# Filtrele analogice pasive

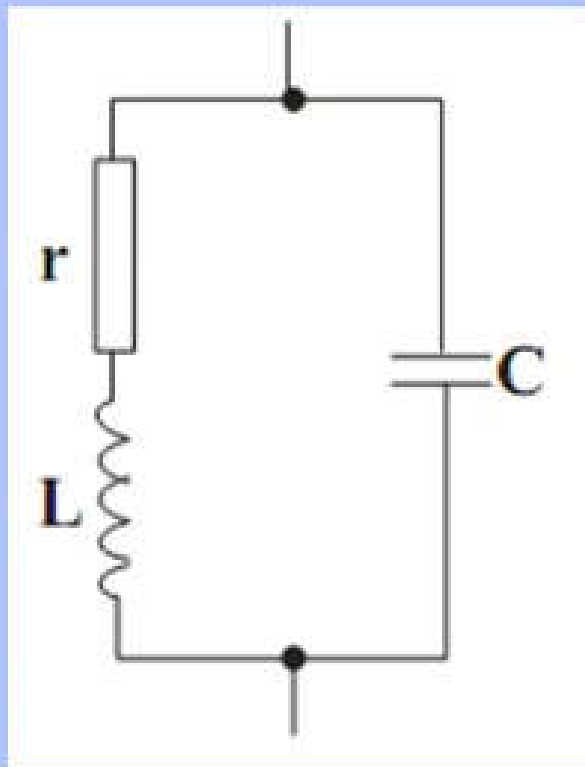
SCHEMA	$A_u$	$\varphi$ [rad]	DIAGRAME BODE
<p>filtru RC „trece-jos”</p> 	$\frac{1}{1 + j \frac{f}{f_T}}$	$-\arctg \frac{f}{f_T}$	
<p>filtru CR „trece-sus”</p> 	$\frac{1}{1 - j \frac{f_T}{f}}$	$\arctg \frac{f_T}{f}$	

# Filtrele analogice pasive

<p><b>filtru <math>RL</math> „trece-sus”</b></p> 	$\frac{1}{1 - j \frac{f_T}{f}}$	$\arctg \frac{f_T}{f}$	
<p><b>filtru <math>LR</math> „trece-jos”</b></p> 	$\frac{1}{1 + j \frac{f}{f_T}}$	$-\arctg \frac{f}{f_T}$	

# Filtrele analogice pasive

- Combinația LC (bobină + condensator) trebuie tratat separat, deoarece, fiind vorba de două elemente de circuit reactive și complementare, orice combinație a lor (serie sau paralel) reprezintă un circuit rezonant, cu un comportament particular la frecvența de rezonanță.
- Există conexiunea LC – Paralelă și LC – Serie

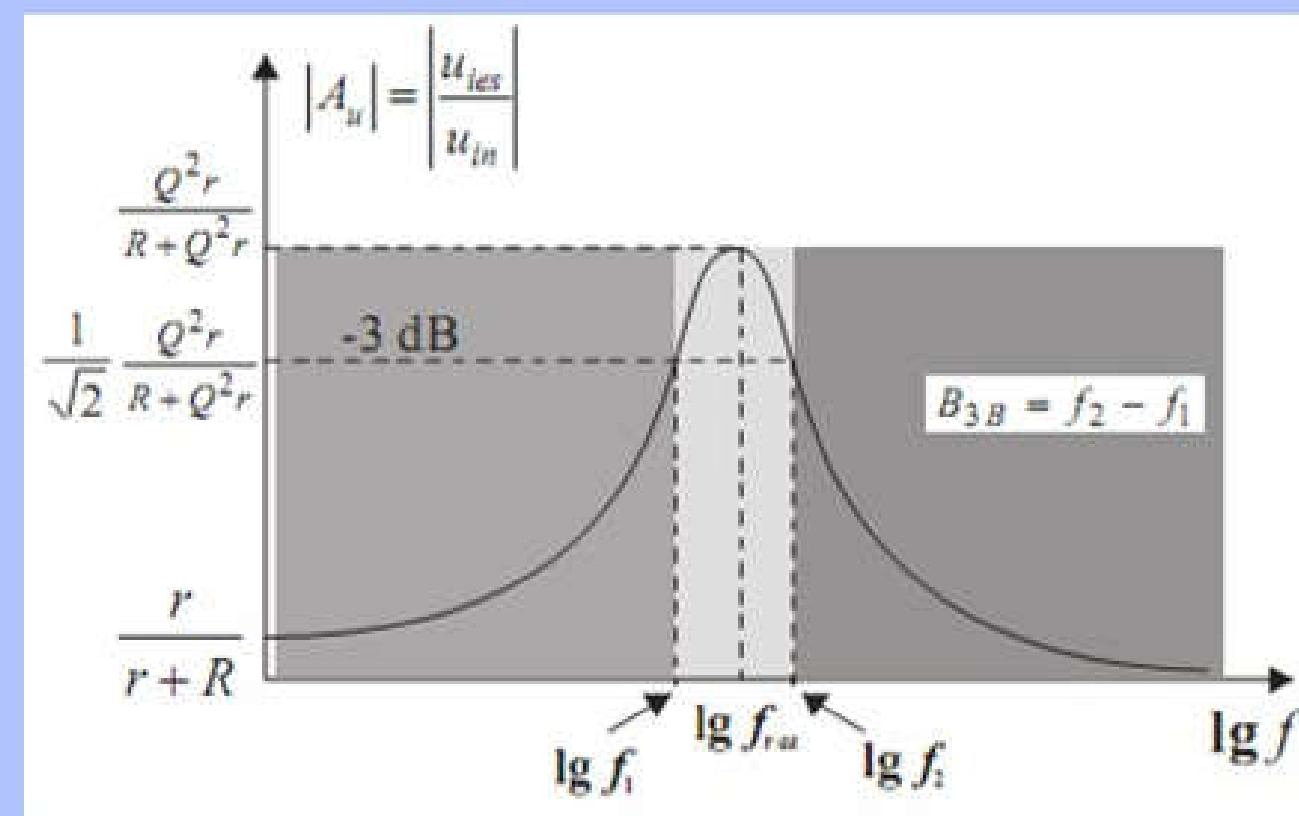
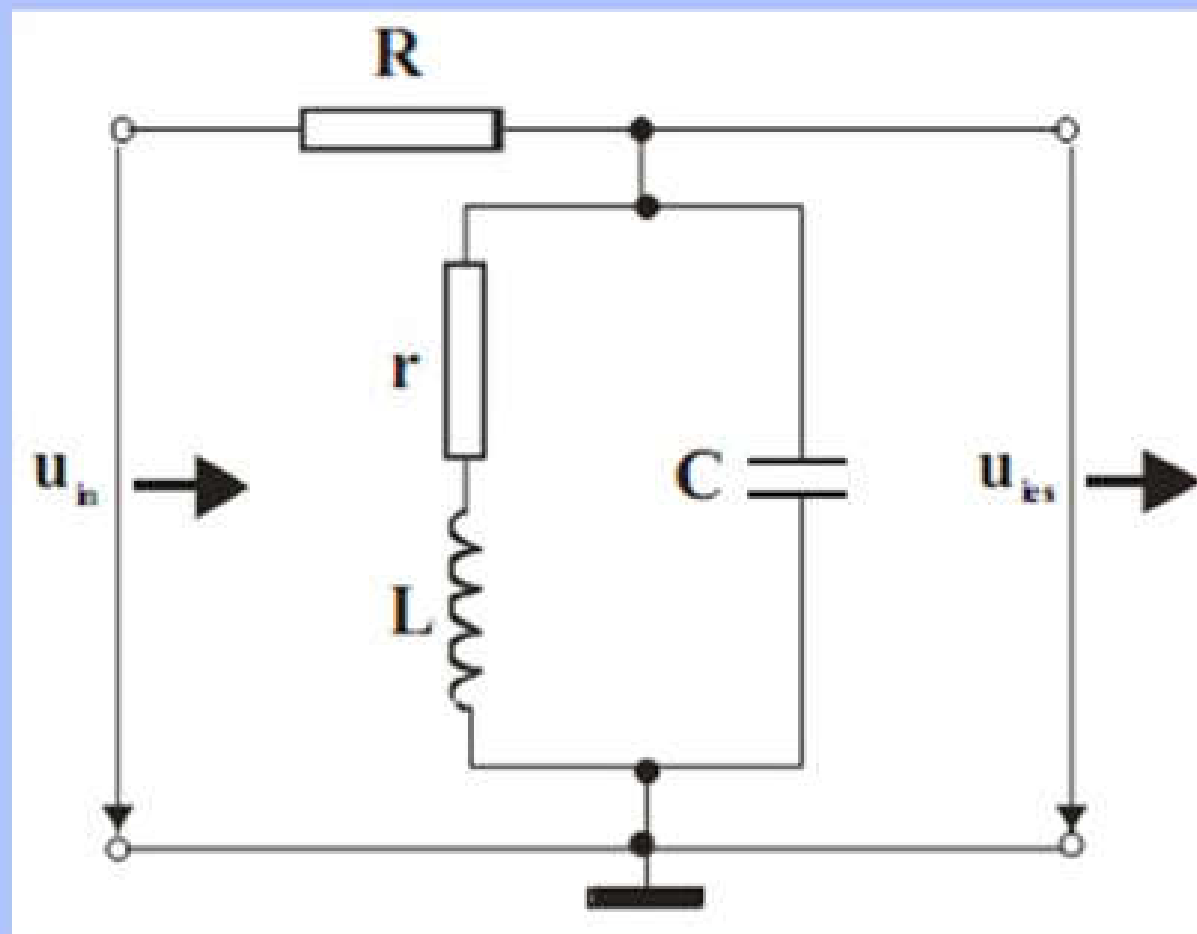


$$f_{rez} = f_0 \sqrt{1 - \frac{Cr^2}{L}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

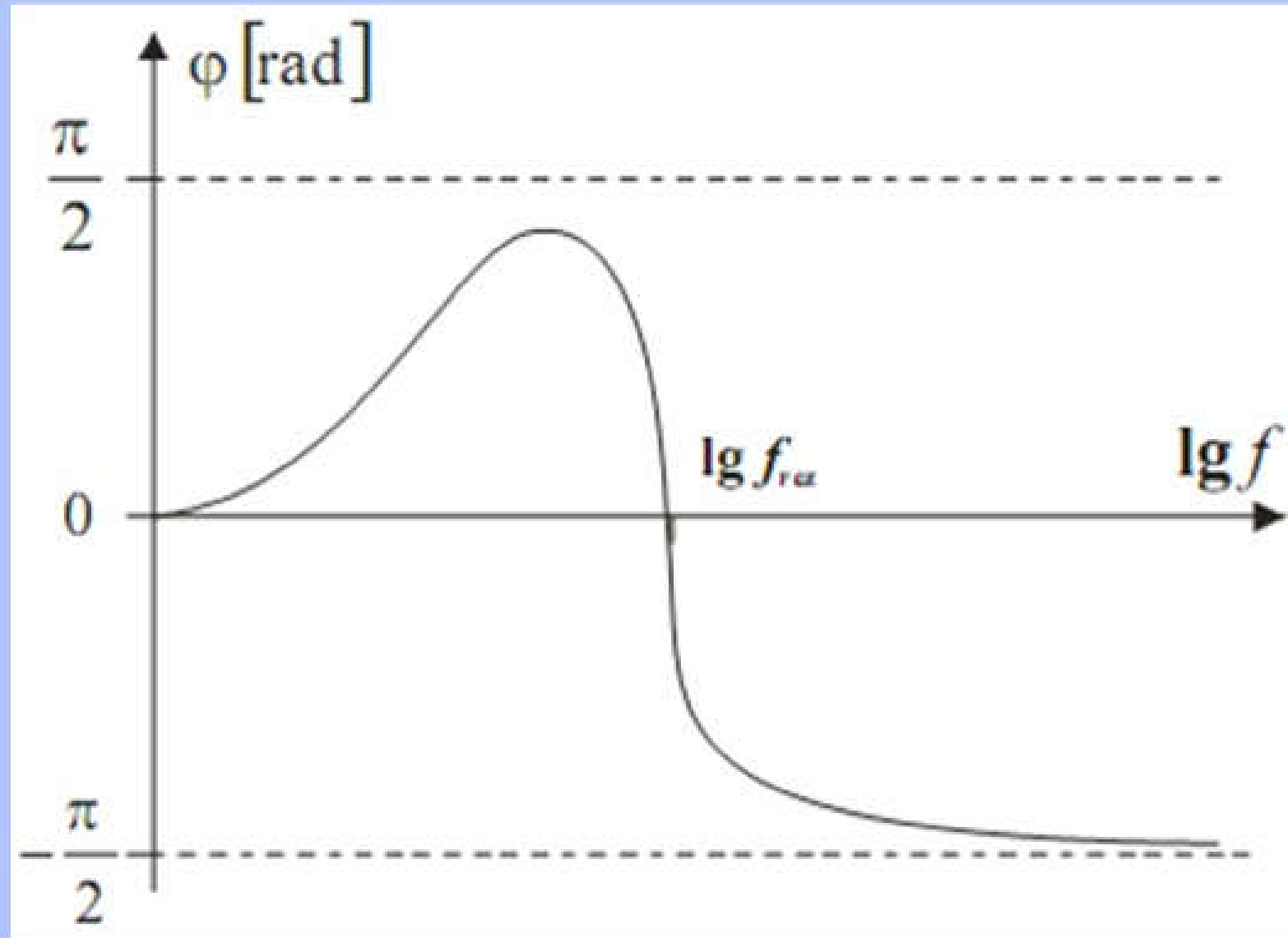
# Filtrele analogice pasive

- Combinat cu un rezistor, așa cum este arătat mai jos, circuitul rezonant paralel LC va acționa ca un **filtru „trece-bandă”**.



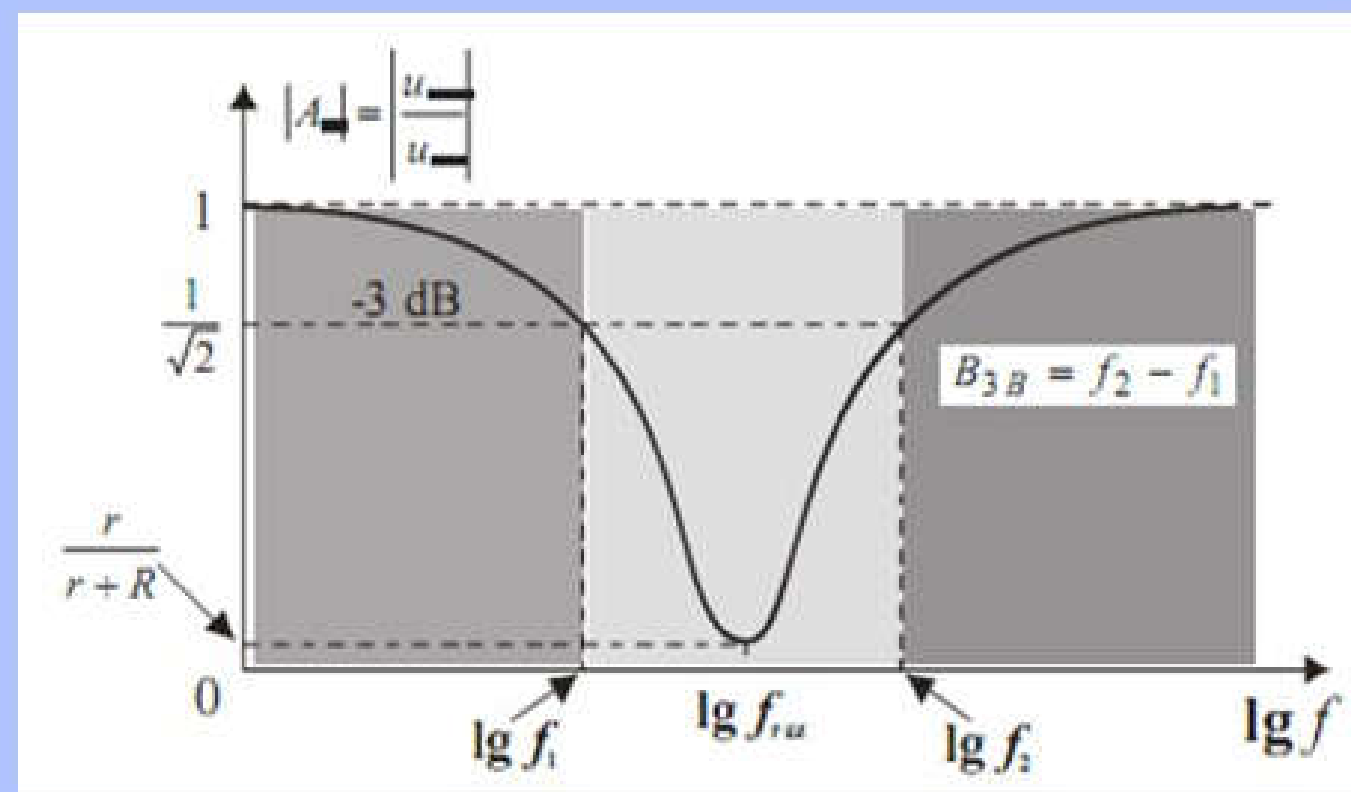
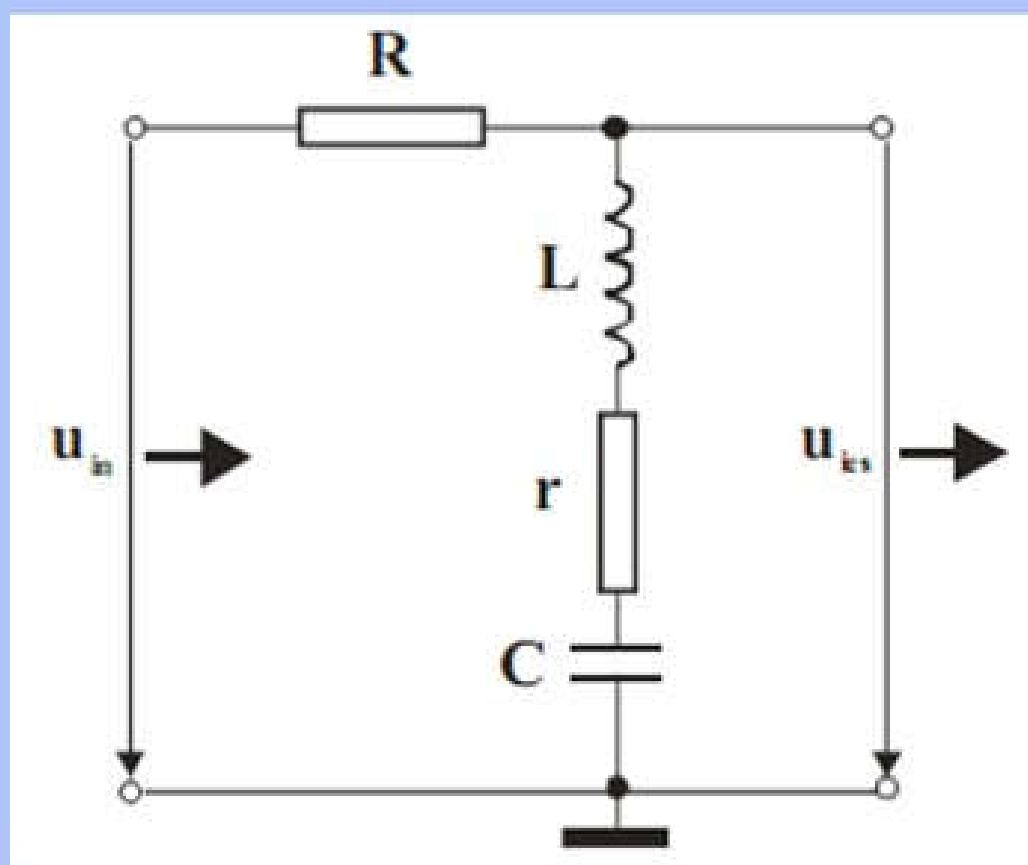
Semnalele cu frecvențe aflate între  $f_1$  și  $f_2$  sunt atenuate cu mai puțin de 3 dB față de semnalul cu frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitului LC. Frecvențele  $f_1$  și  $f_2$  delimitează ceea ce se numește banda de trecere de 3 dB a filtrului.

- Caracteristica de fază



# Filtrele analogice pasive

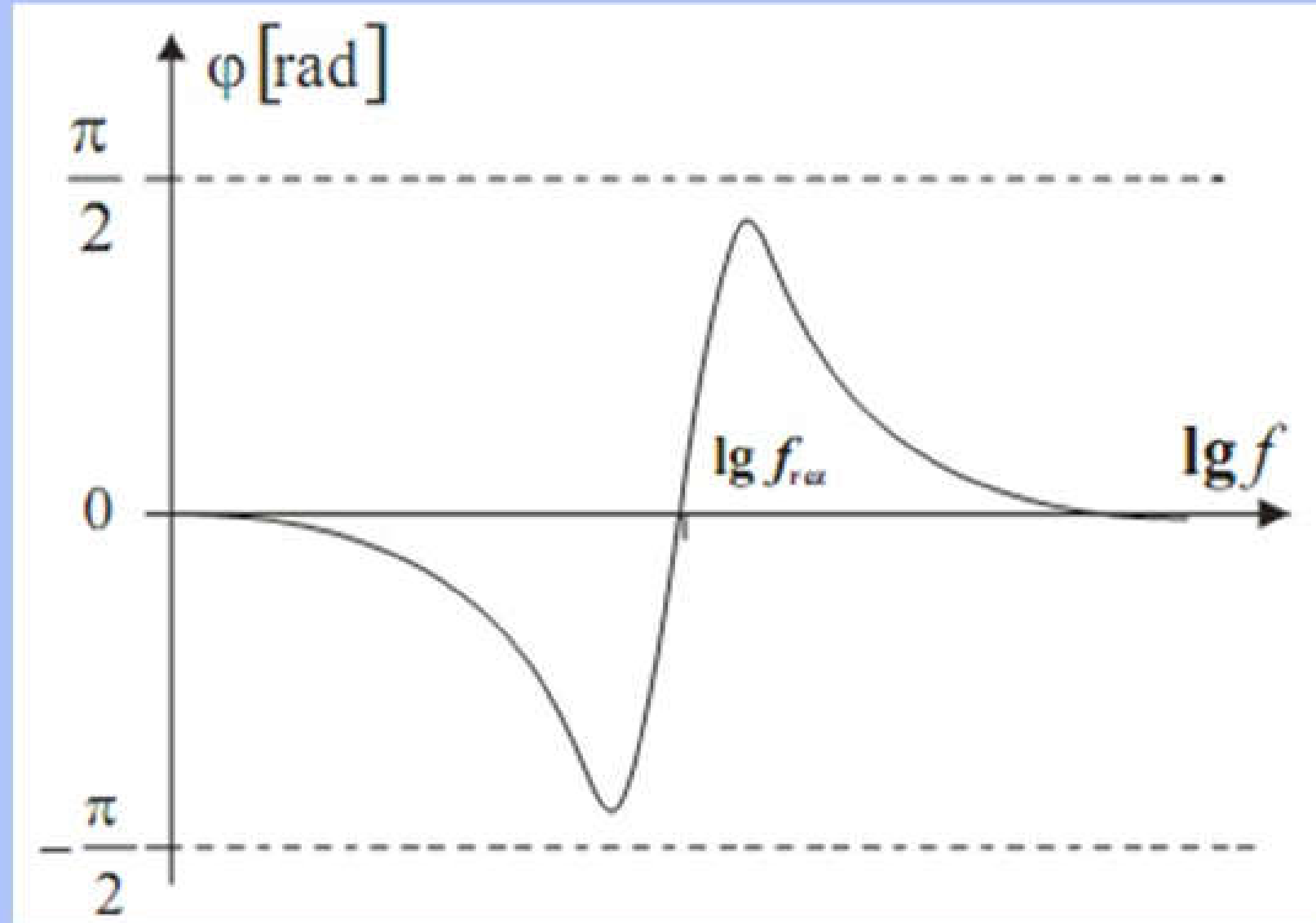
- Combinat cu un rezistor, circuitul rezonant serie LC va acționa ca un **filtru „oprește-bandă”**.



Semnalele cu frecvențe aflate între  $f_1$  și  $f_2$  sunt atenuate cu mai mult de 3 dB față de semnalul cu frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitului LC. Frecvențele  $f_1$  și  $f_2$  delimitează ceea ce se numește banda de tăiere de 3 dB a filtrului.

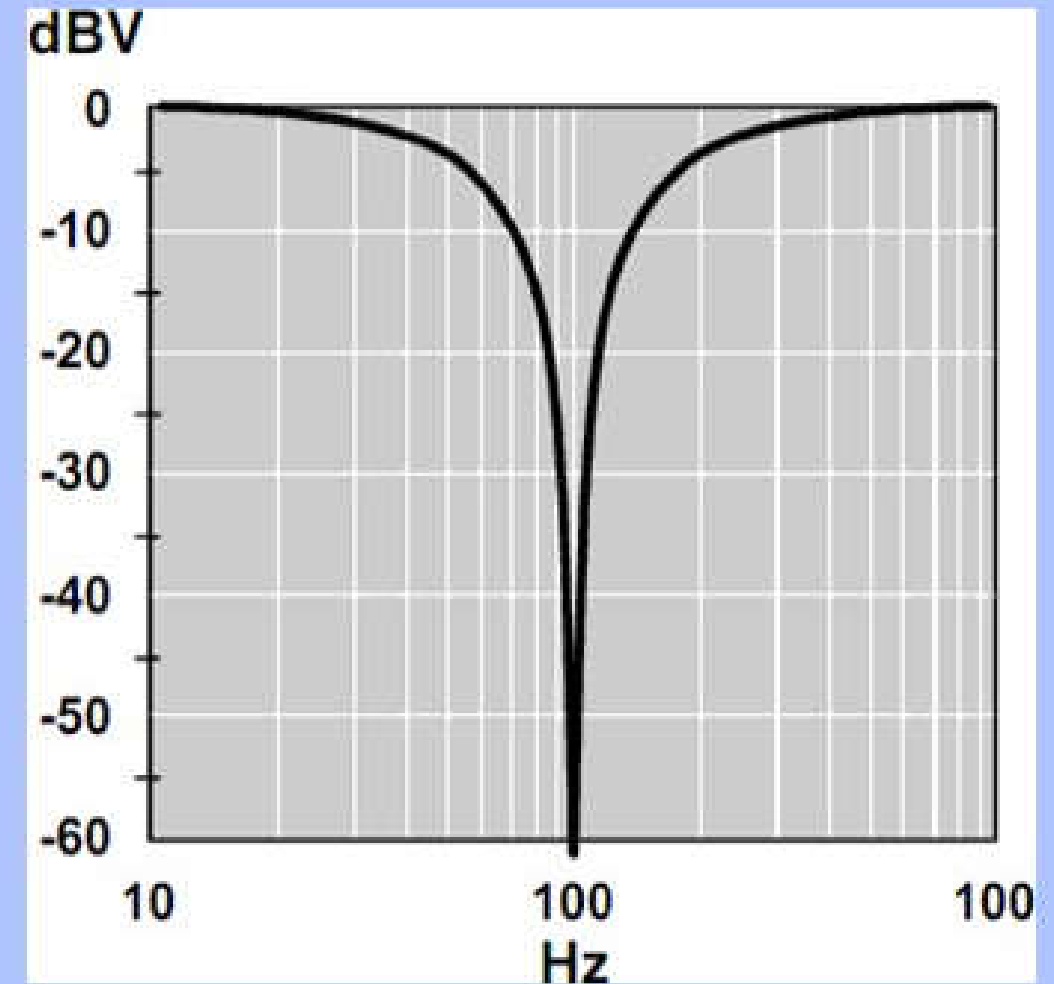
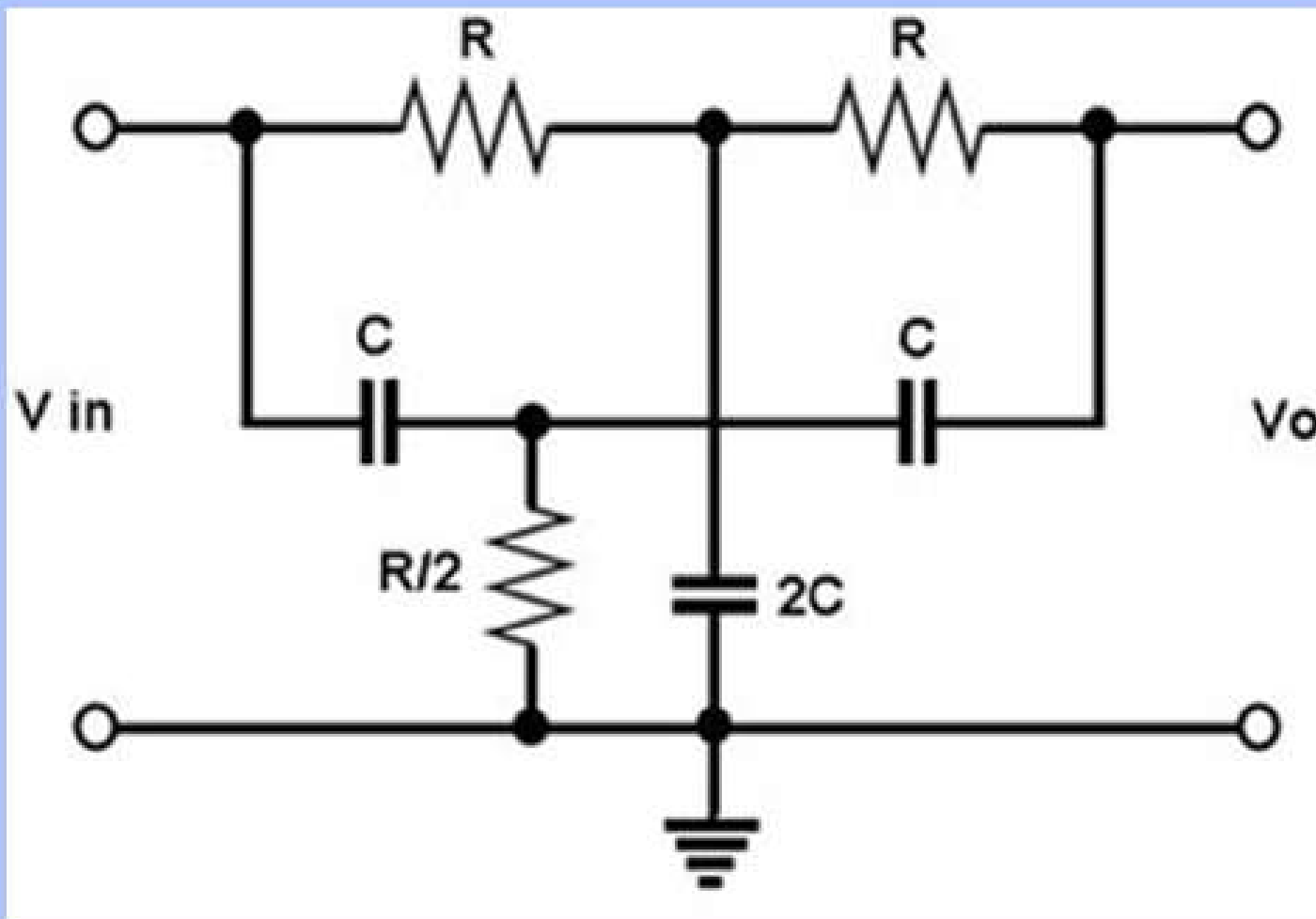


- Caracteristica de fază



# Filtrele analogice pasive

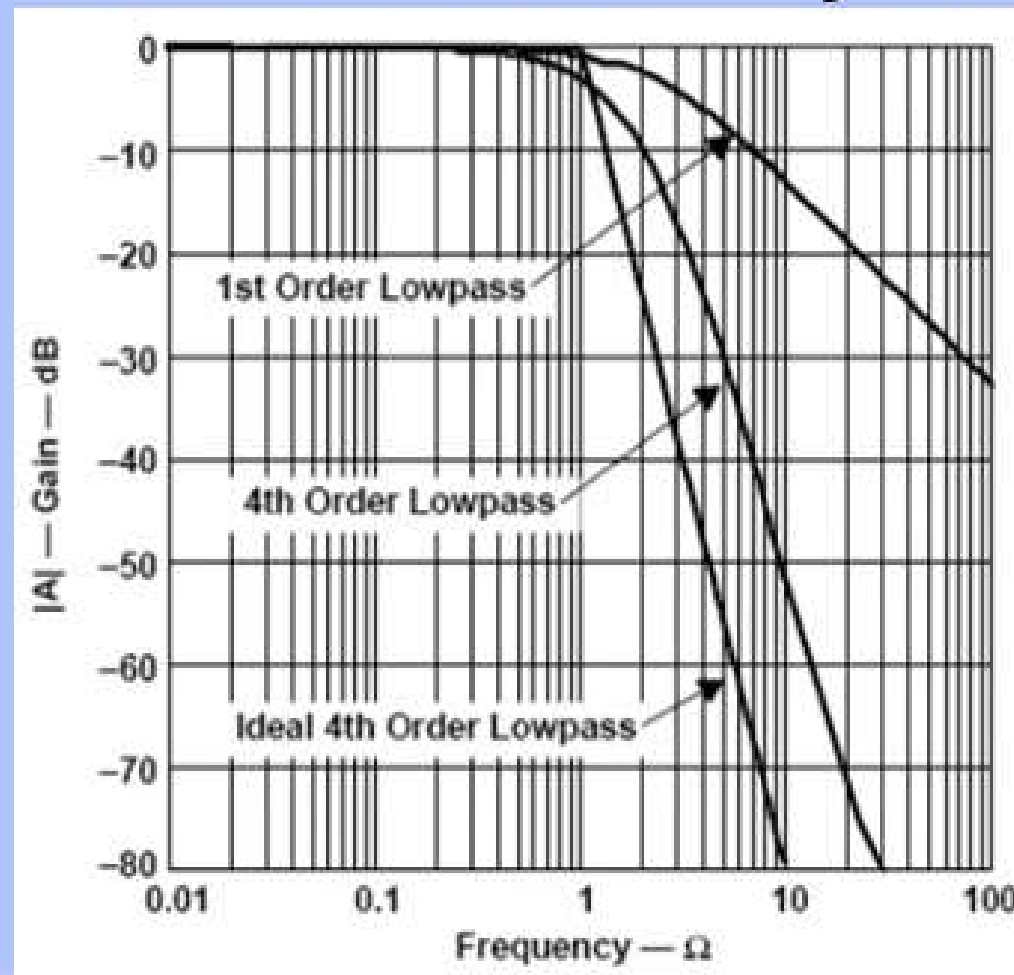
- Există și alte filtre analogice pasive.
- Exemplu: filtru Notch de rejecție a unei frecvențe.



# Filtrele analogice pasive

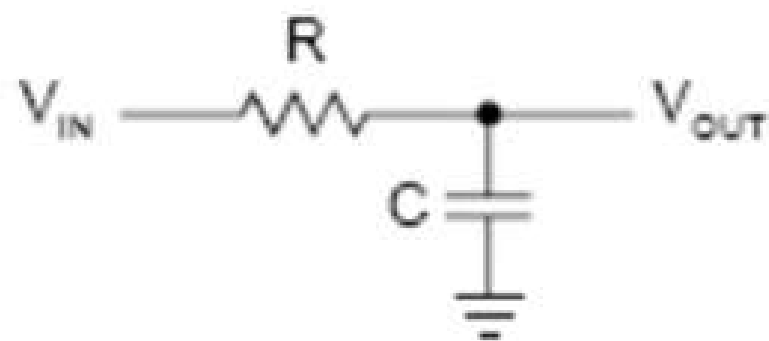
- Atunci când sunt necesare filtre cu parametri îmbunătățiți, mai multe filtre pasive de ordinul 1 pot fi conectate în cascadă, construindu-se un filtru de ordinul  $n$  ( $n$  – numărul filtrelor de ordinul 1). În acest caz, parametrul care se îmbunătățește semnificativ este panta filtrului:

***Panta filtrului de ordinul  $n = n \times$  Panta filtrului de ordinul 1***

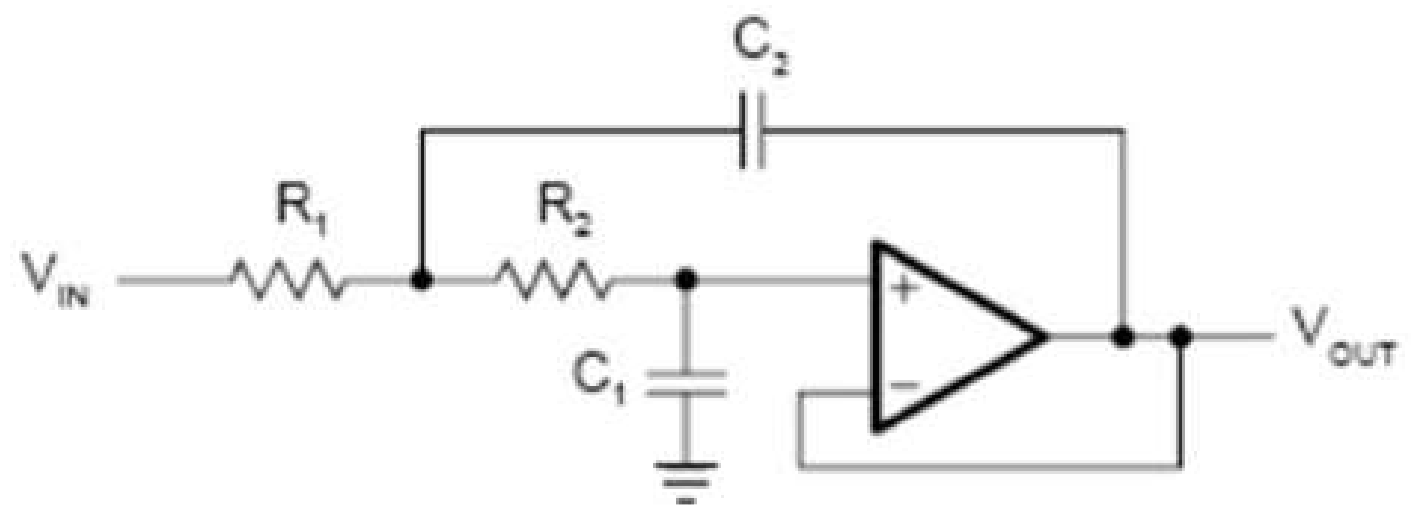


# Filtrele analogice active

- Dacă dorim ca semnalul util, filtrat de zgomote, să fie și amplificat și să reducem influențele sursei de semnal și a sarcinii asupra performanțelor filtrului, atunci vom apela la filtrele active.
- Filtrele active sunt combinații de filtre pasive și elemente active de circuit, în special amplificatoare operaționale.

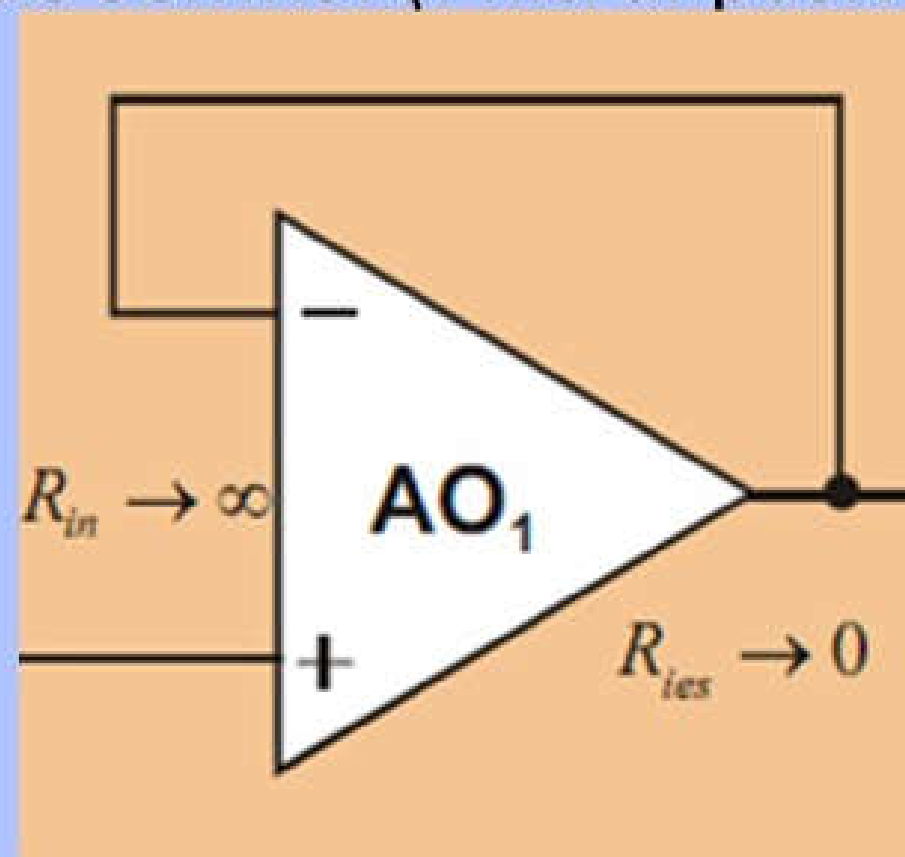


*Filtru Pasiv*

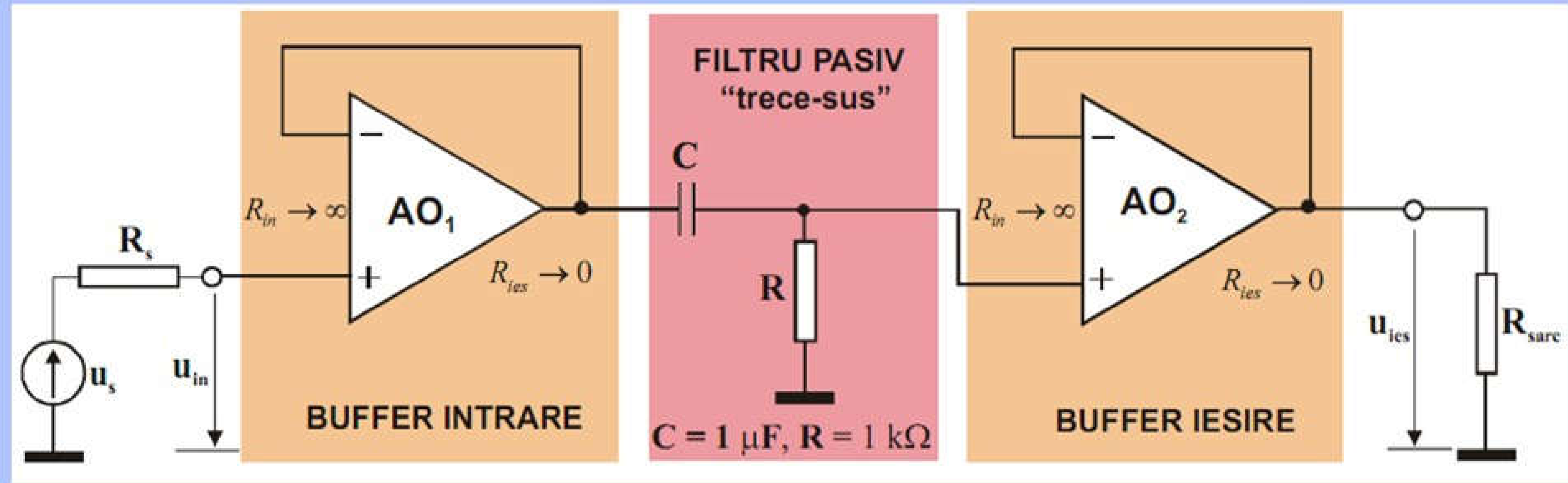


*Filtru Activ*

- Să ne reamintim că amplificatorul operațional are impedanța de intrare foarte mare și impedanța de ieșire foarte mică.
- Datorită acestor caracteristici, el poate fi folosit ca etaj tampon („buffer”) între sursa de semnal și filtrul pasiv și între filtrul pasiv și sarcină.

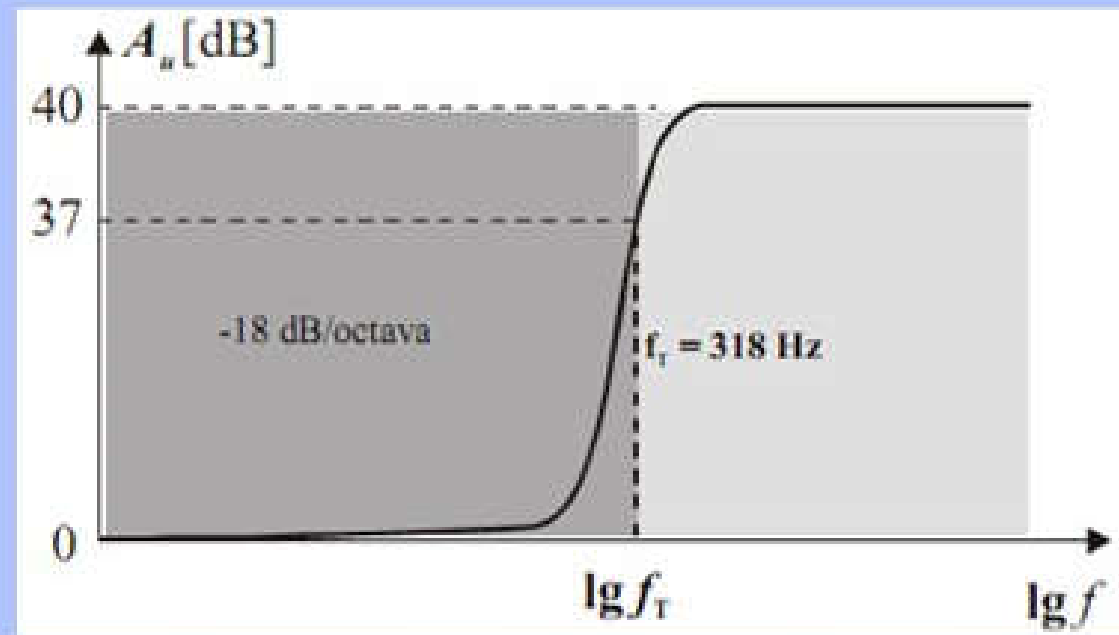
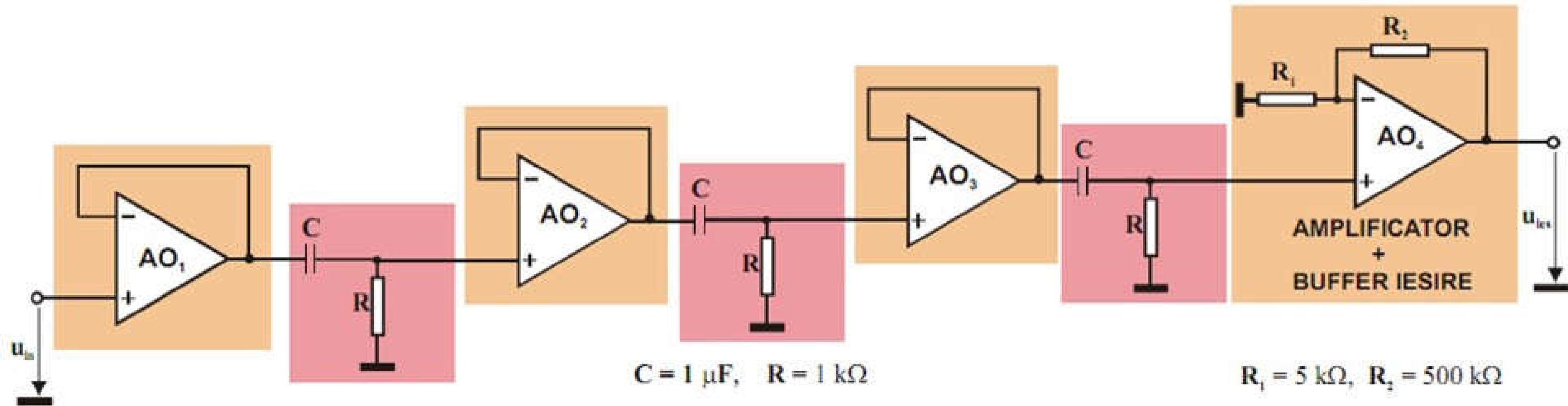


# Filtrele analogice active



Dacă bufferul de ieșire este conectat ca amplificator neinversor, atunci semnalul de la ieșire va fi și amplificat.

# Filtrele analogice active



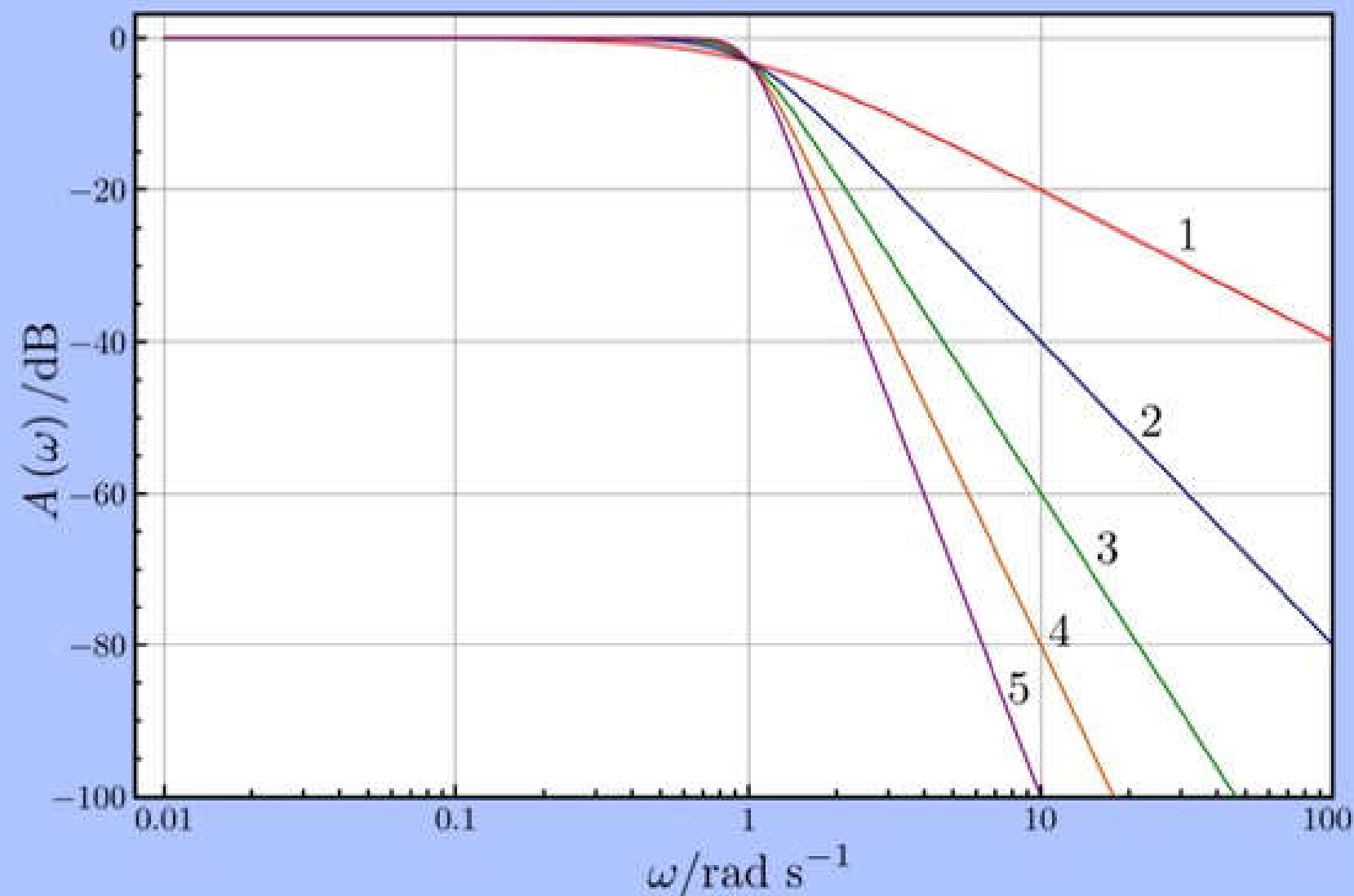


# Filtrele analogice active

- Există câteva tipuri constructive de filtre active.
- Cele mai răspândite sunt următoarele:
  - Filtre Butterworth
  - Filtre Cebâșev
  - Filtre Eliptice
  - Filtre Bussel



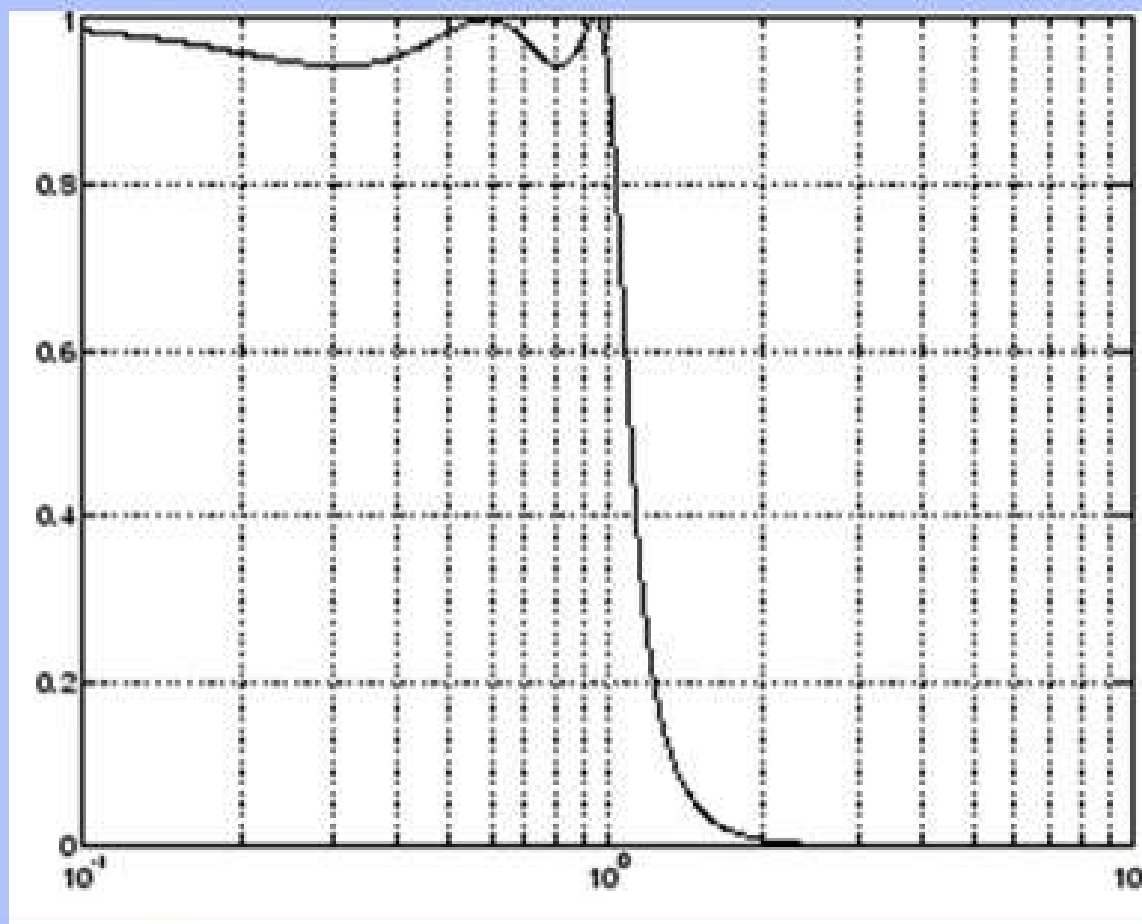
- Se optimizează banda de trecere pentru a obține o caracteristică de transfer mai dreaptă.



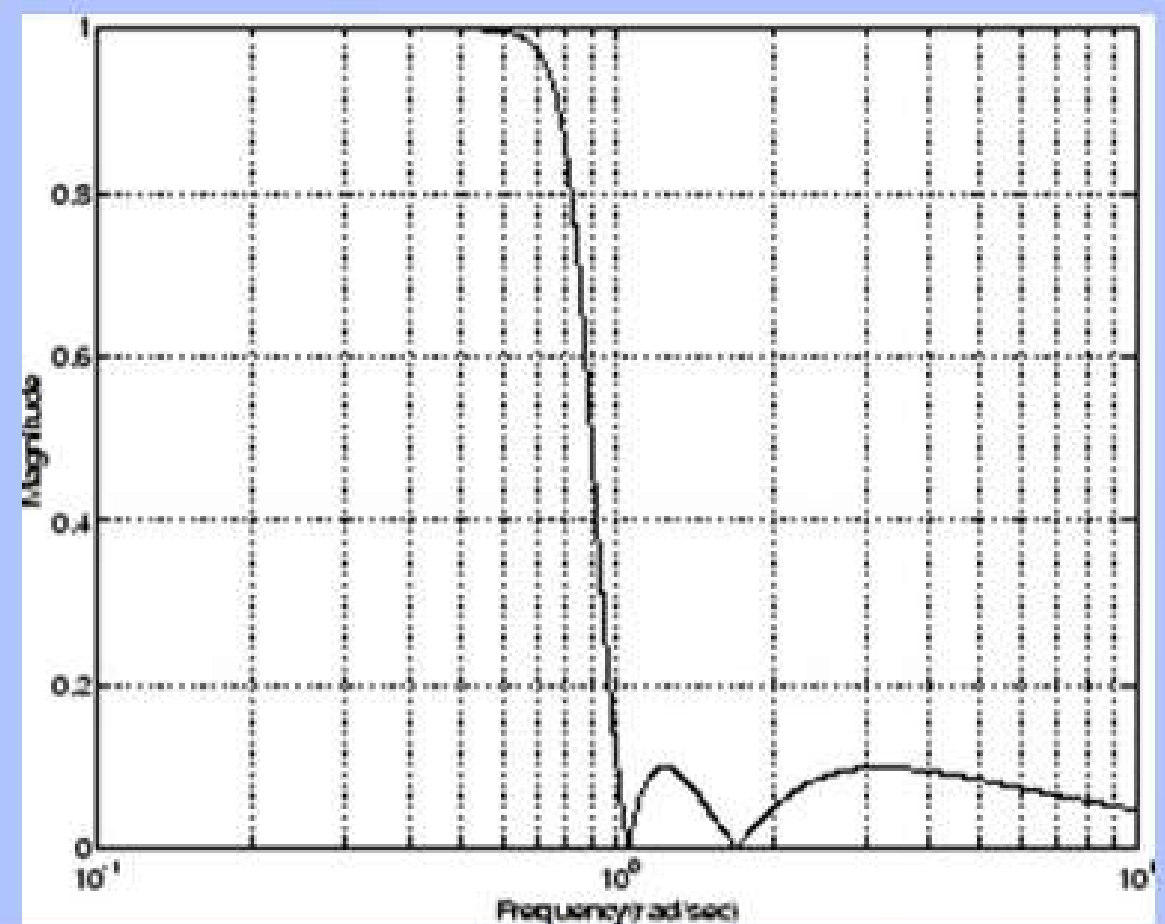
# Caracteristica Filtrelor Cebățev

- Se optimizează trecerea de la banda de trecere spre banda de oprire a semnalului.

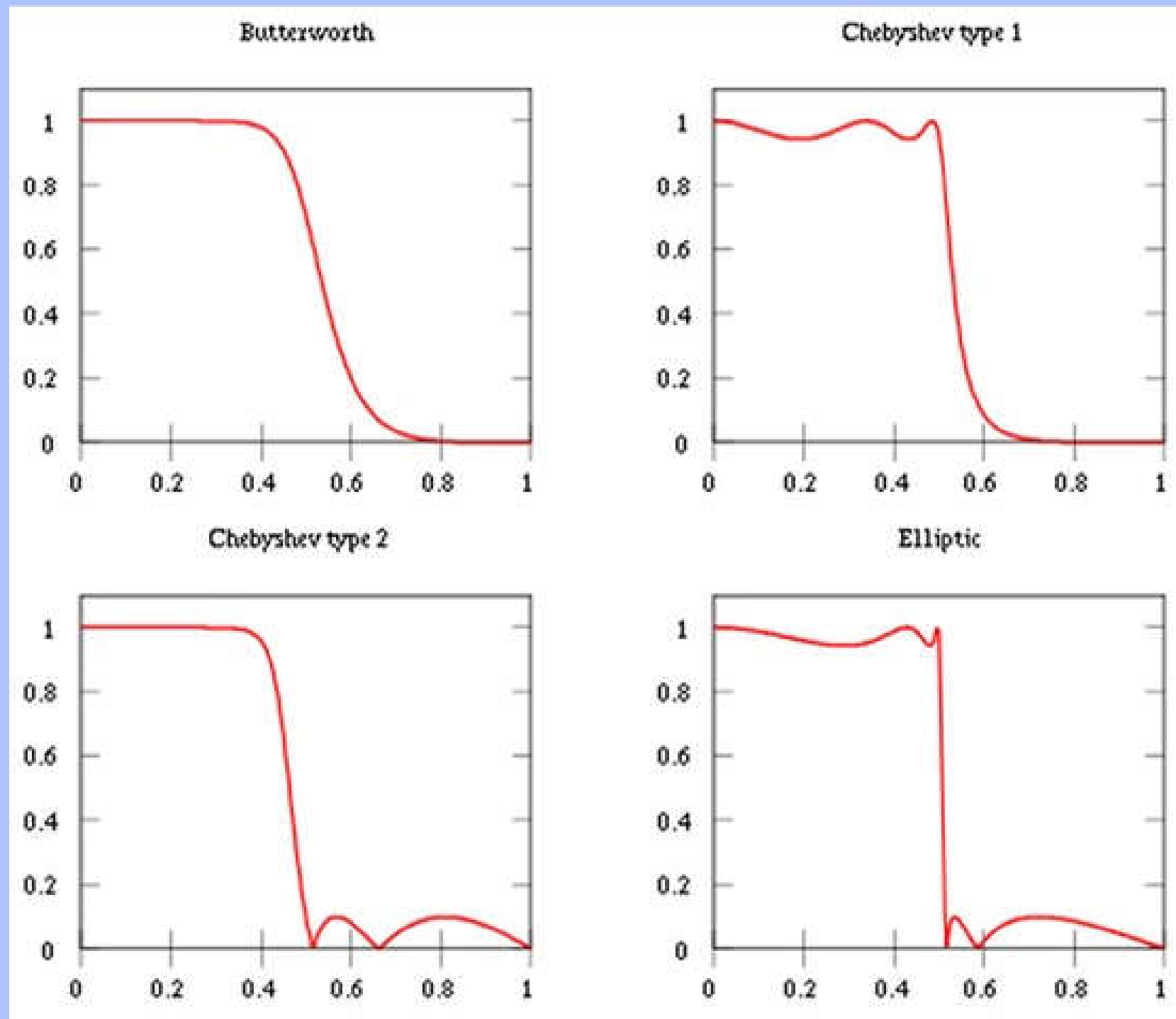
Tip 1



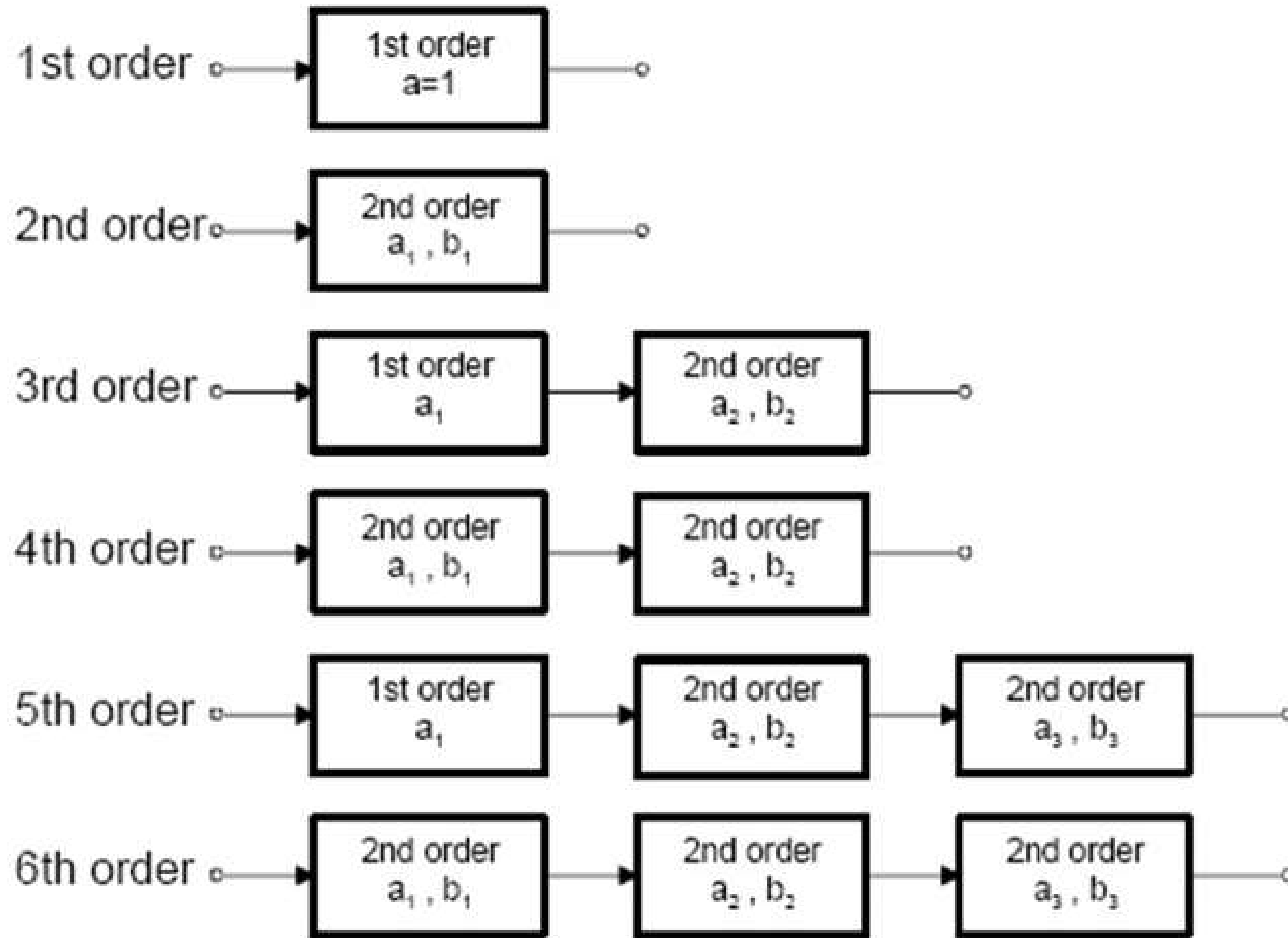
Tip 2



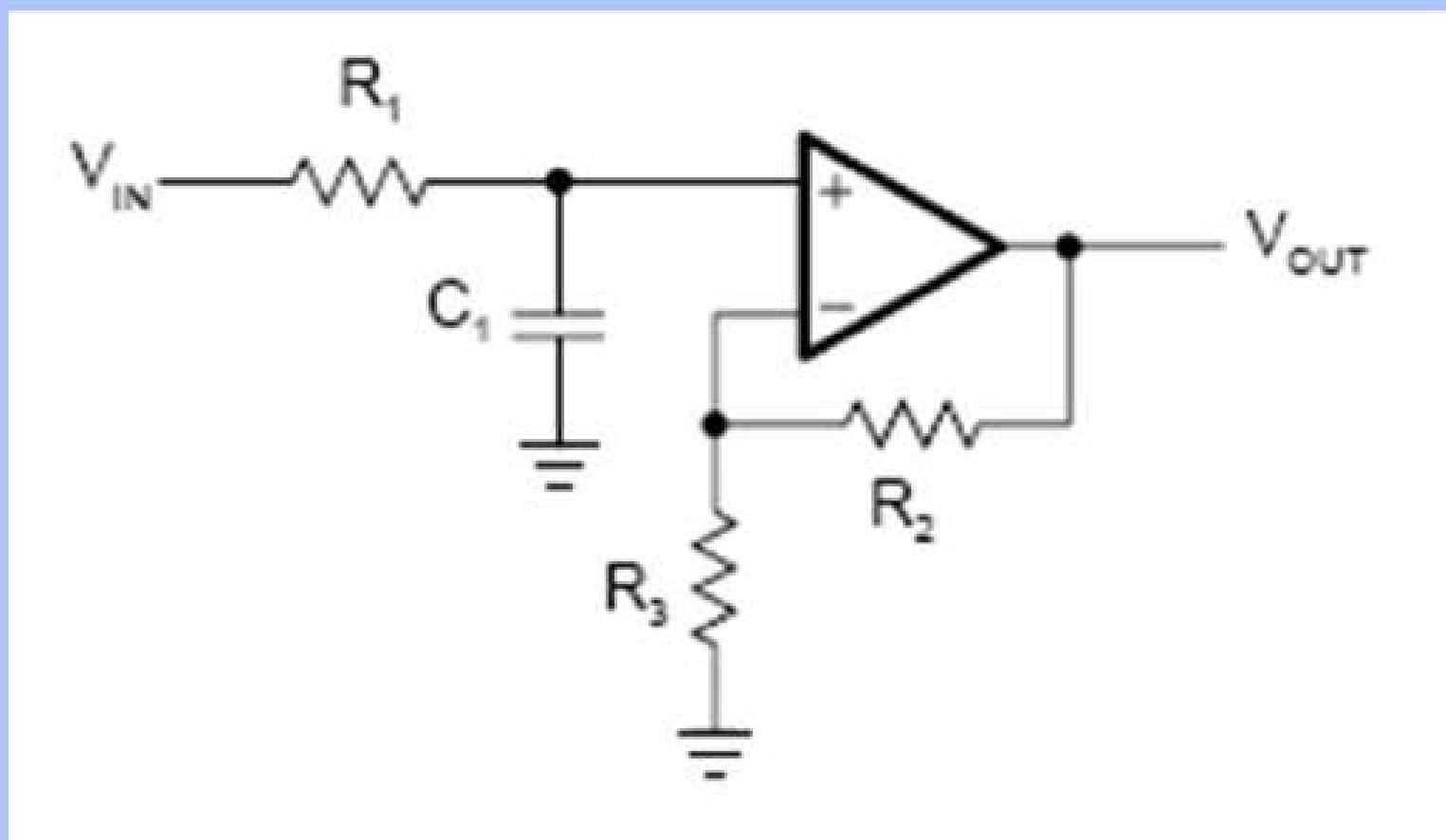
# Filtrele analogice active



# Crearea filtrelor de ordin superior prin conectarea în cascadă a mai multor filtre



- Filtru trece jos fără inversarea semnalului:

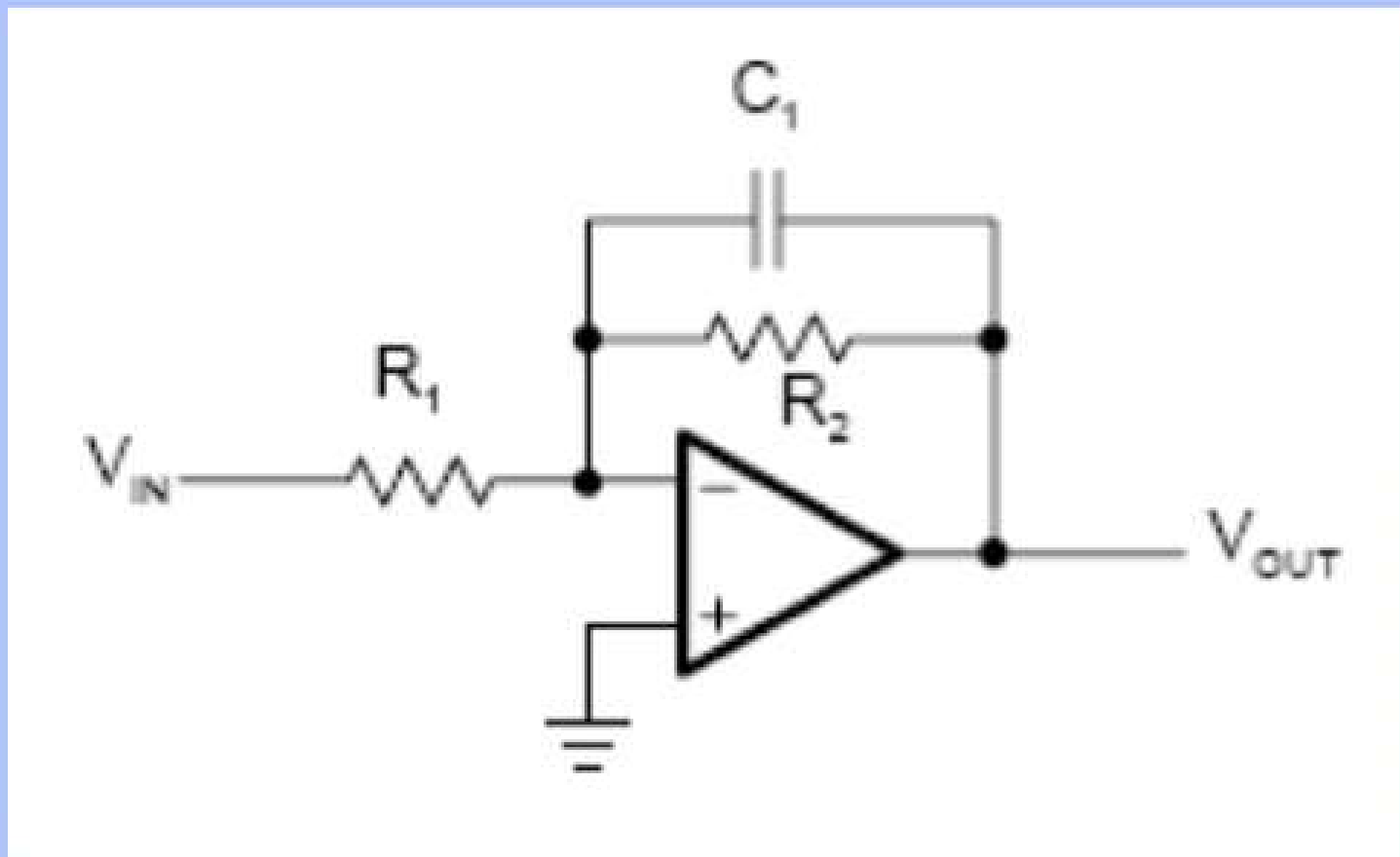


$$A(s) = \frac{A_0}{1 + a_1 s}$$

$$A(s) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_3}}{1 + \omega_c R_1 C_1 s}$$



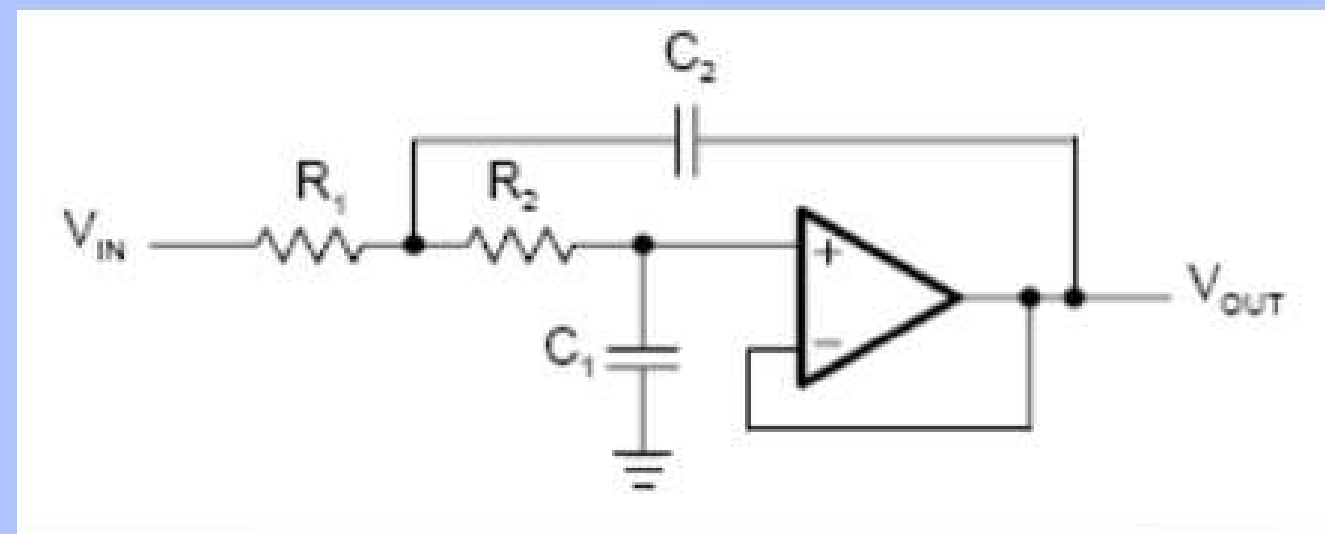
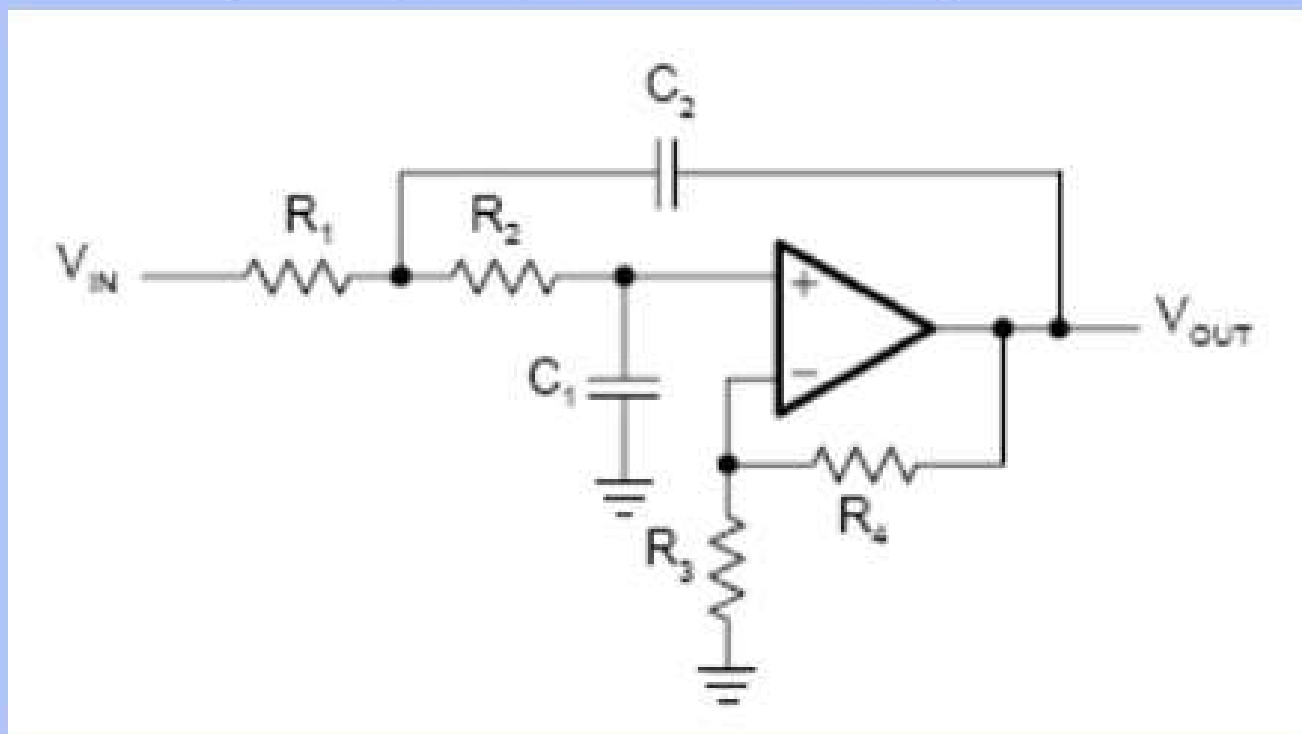
- Filtru trece jos cu inversarea semnalului:



$$A(s) = \frac{A_0}{1 + a_1 s}$$

$$A(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \omega_c R_2 C_1 s}$$

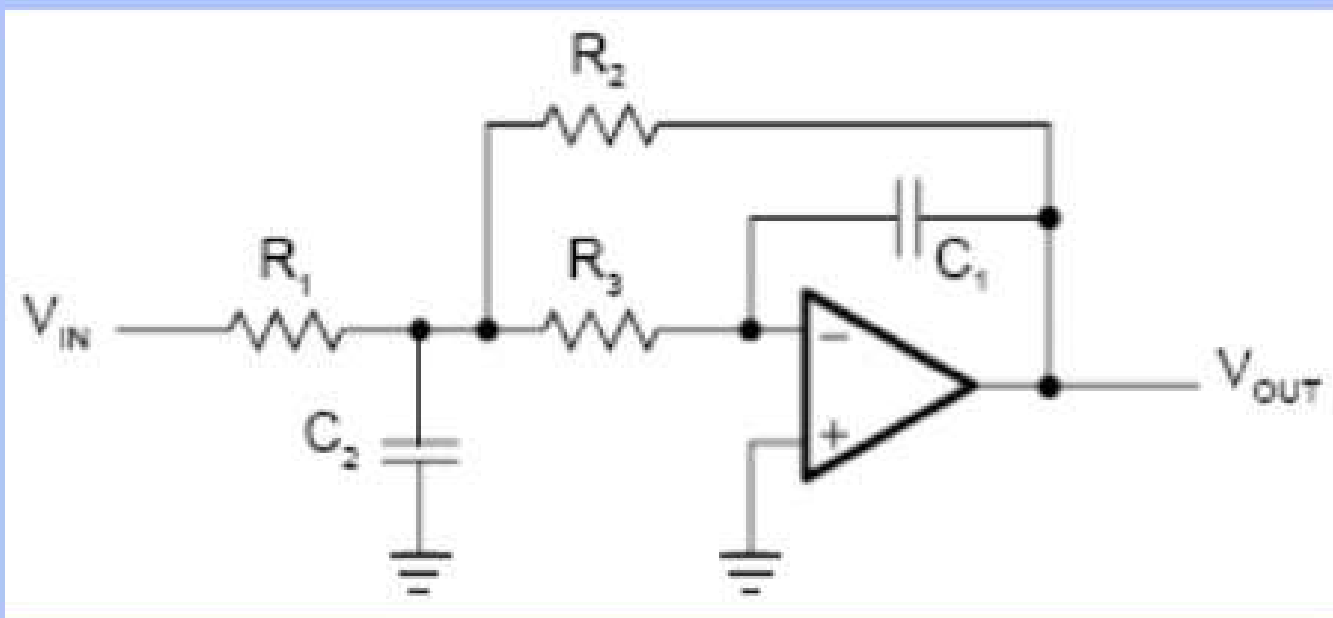
- Filtru trece jos de ordinul 2
  - Topologia **Sallen-Key**:



$$A_i(s) = \frac{A_0}{(1 + a_i s + b_i s^2)}$$

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + \omega_c [C_1(R_1 + R_2) + (1 - A_0) R_1 C_2] s + \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

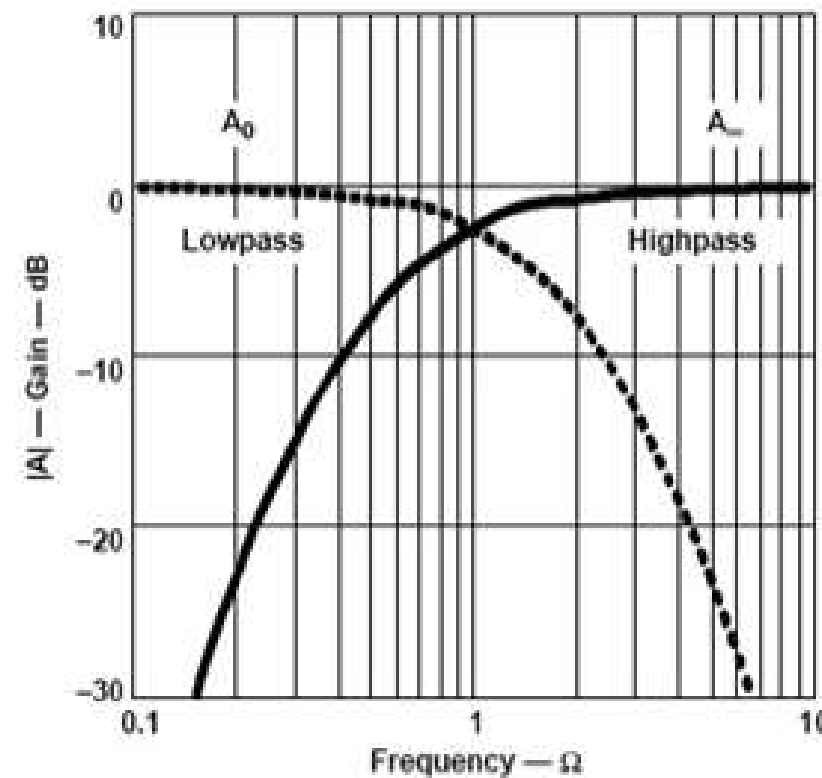
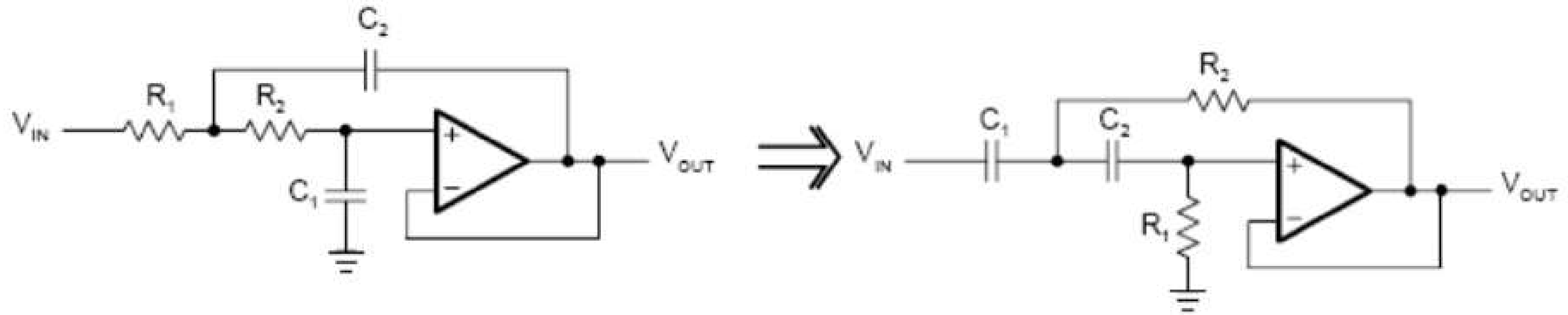
- Filtru trece jos de ordinul 2
  - Topologia **Multi Feedback**:



$$A_i(s) = \frac{A_0}{(1 + a_i s + b_i s^2)}$$

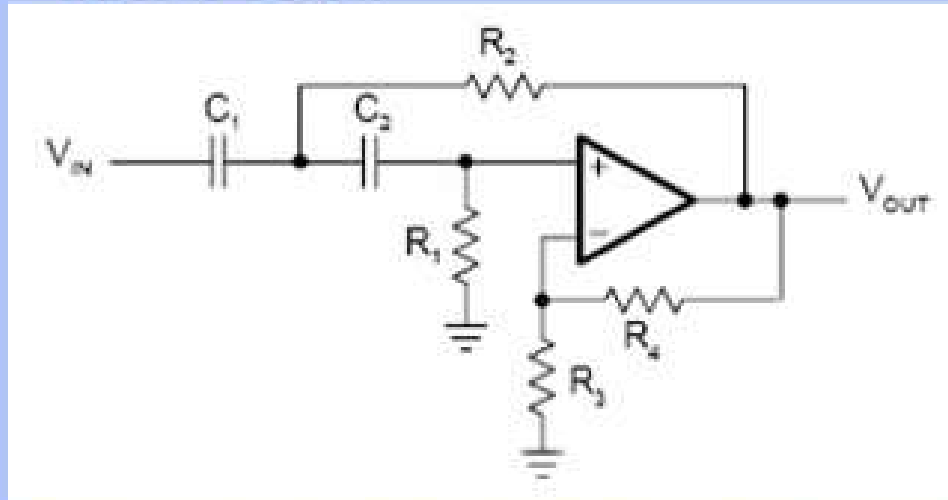
$$A(s) = - \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \omega_c C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) s + \omega_c^2 C_1 C_2 R_2 R_3 s^2}$$

# Filtre Trece-Sus de ordinul 2

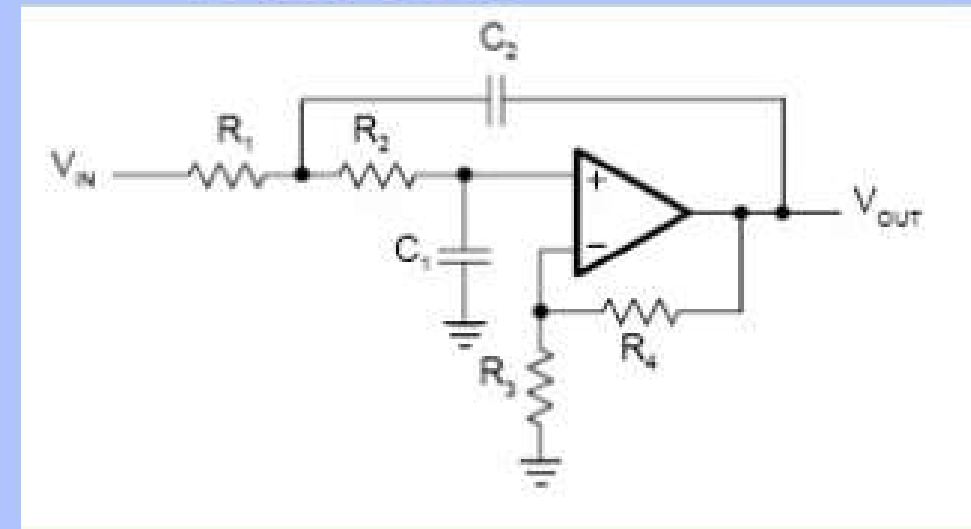


- Topologia **Sallen-Key**:

- *Trece-Sus*:

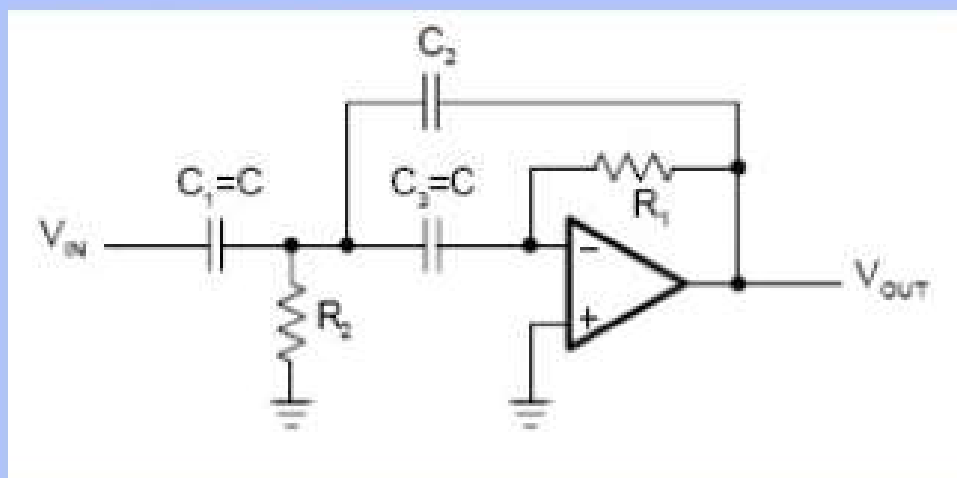


- *Trece-Jos*:

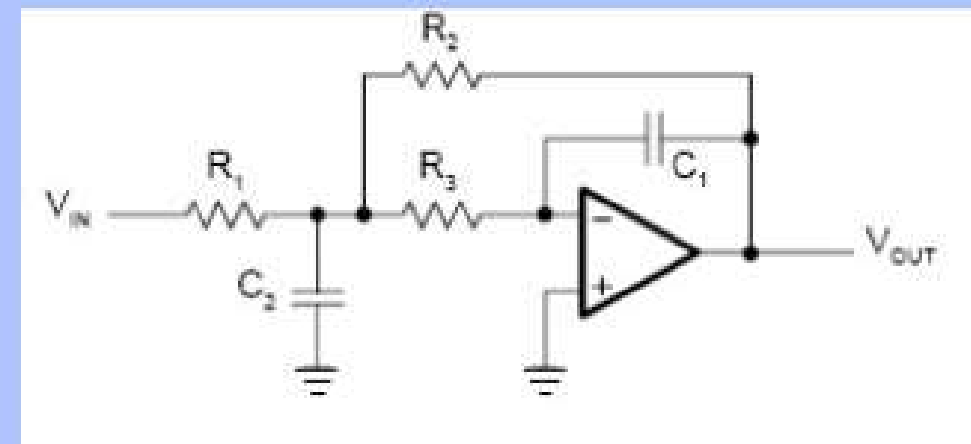


- Topologia **Multi-Feedback**:

- *Trece-Sus*:

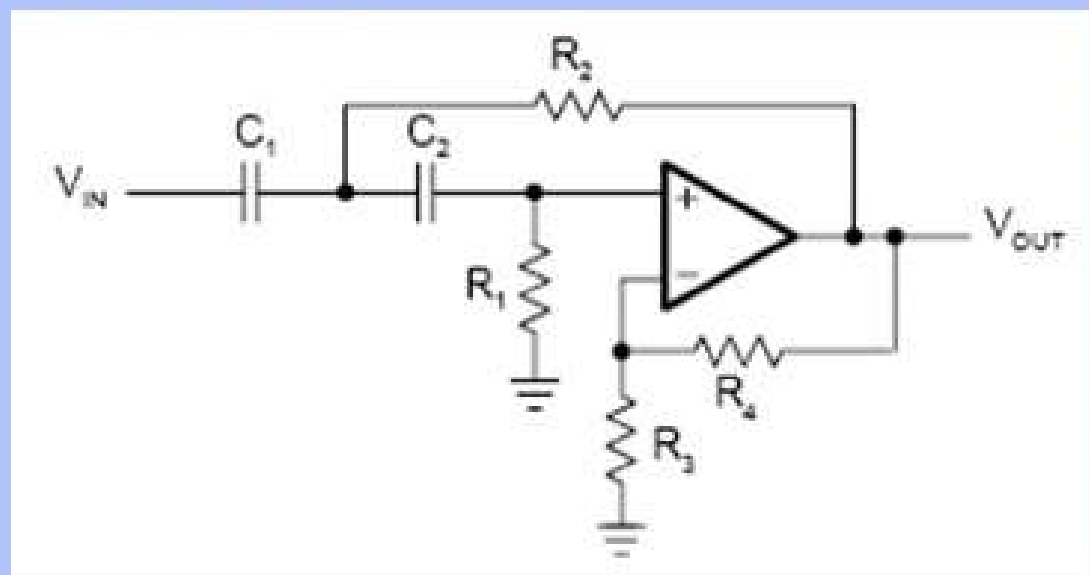


- *Trece-Jos*:

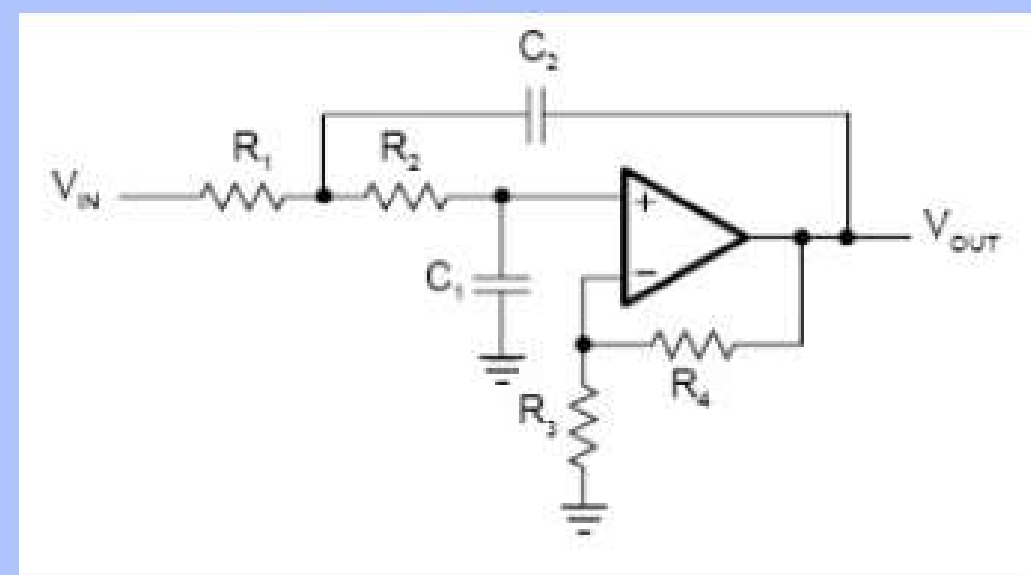


# Filtru Sallen-Key Trece-Bandă de ordinul 2

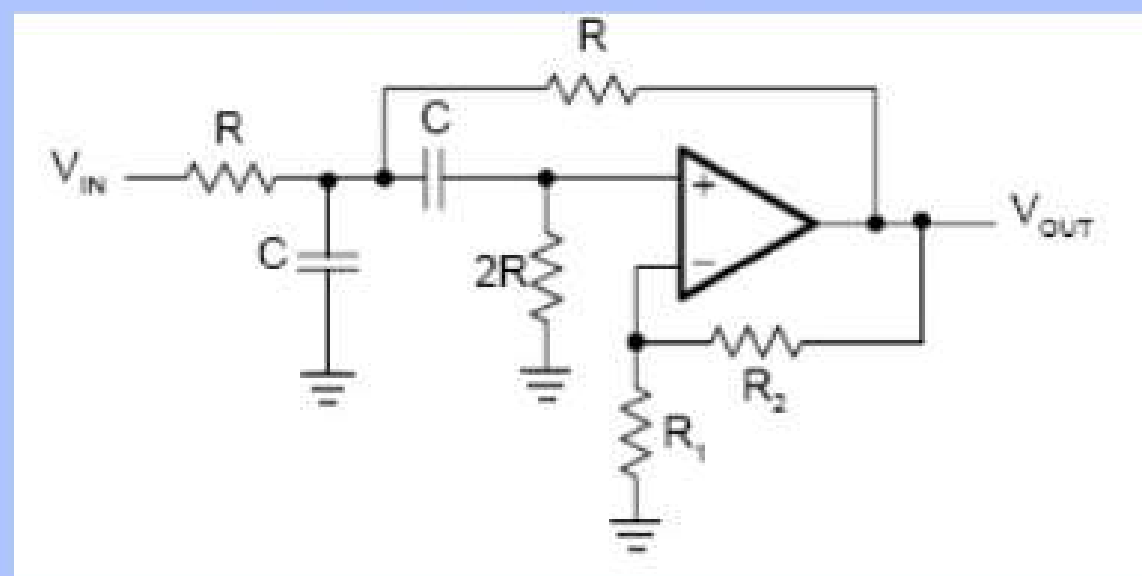
- Trece-Sus:



- Trece-Jos:



- Trece-Bandă





- Funcția de transfer:

$$A(s) = \frac{G \cdot RC \omega_m \cdot s}{1 + RC \omega_m (3 - G) \cdot s + R^2 C^2 \omega_m^2 \cdot s^2}$$

- Unde:

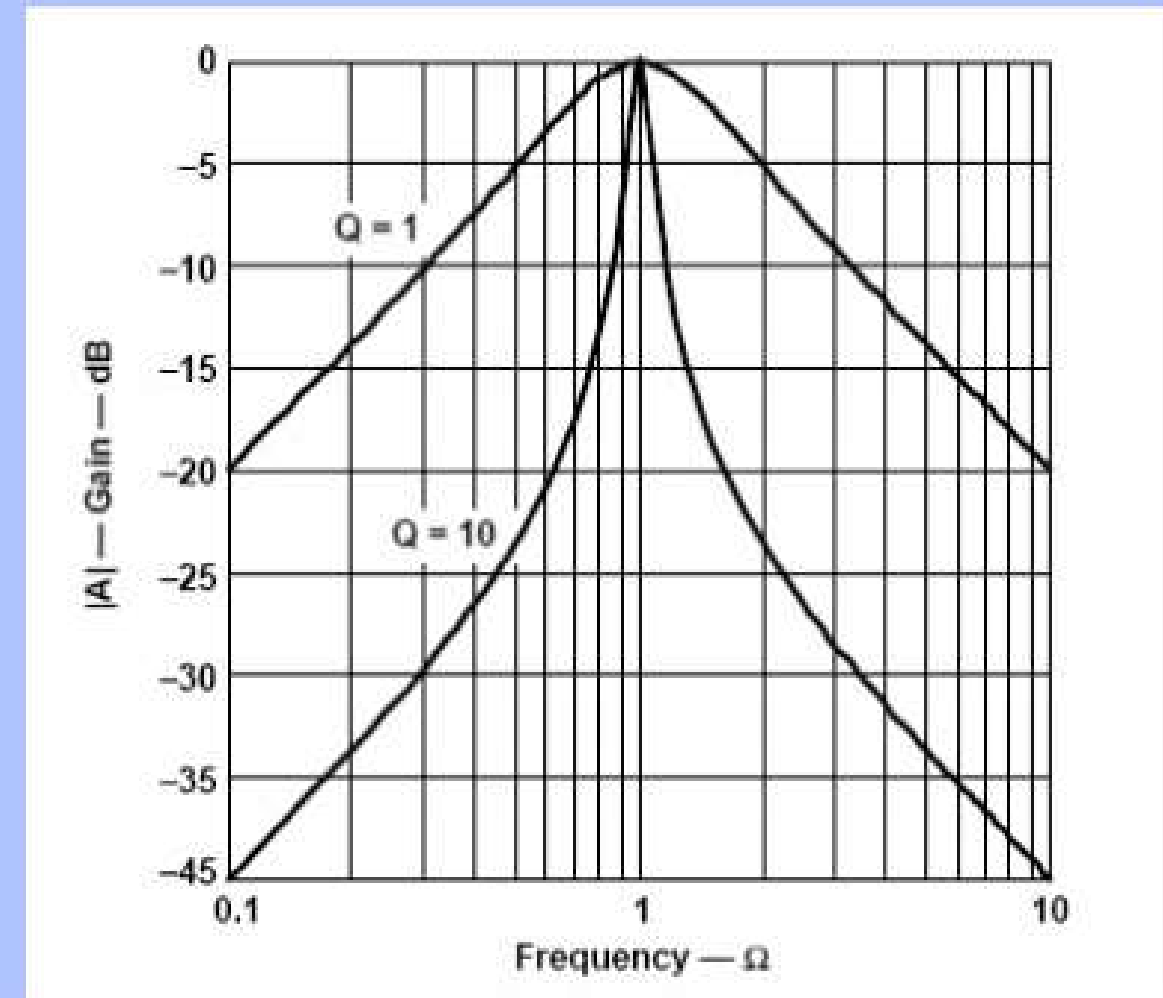
- Frecvența de tăiere:

$$f_m = \frac{1}{2\pi RC}$$

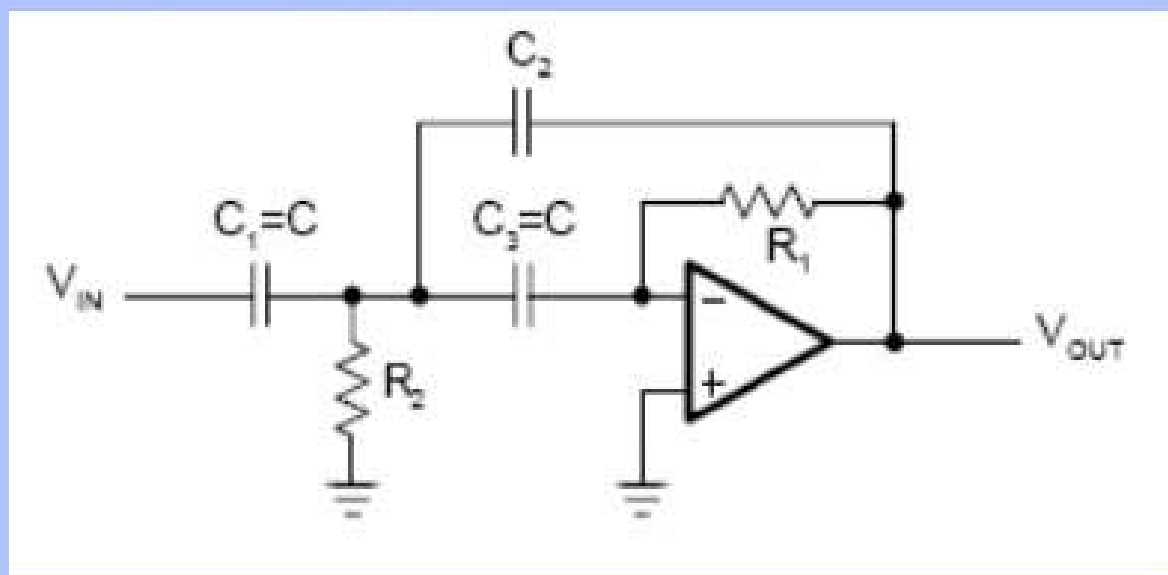
inner gain:  $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

gain at  $f_m$ :  $A_m = \frac{G}{3 - G}$

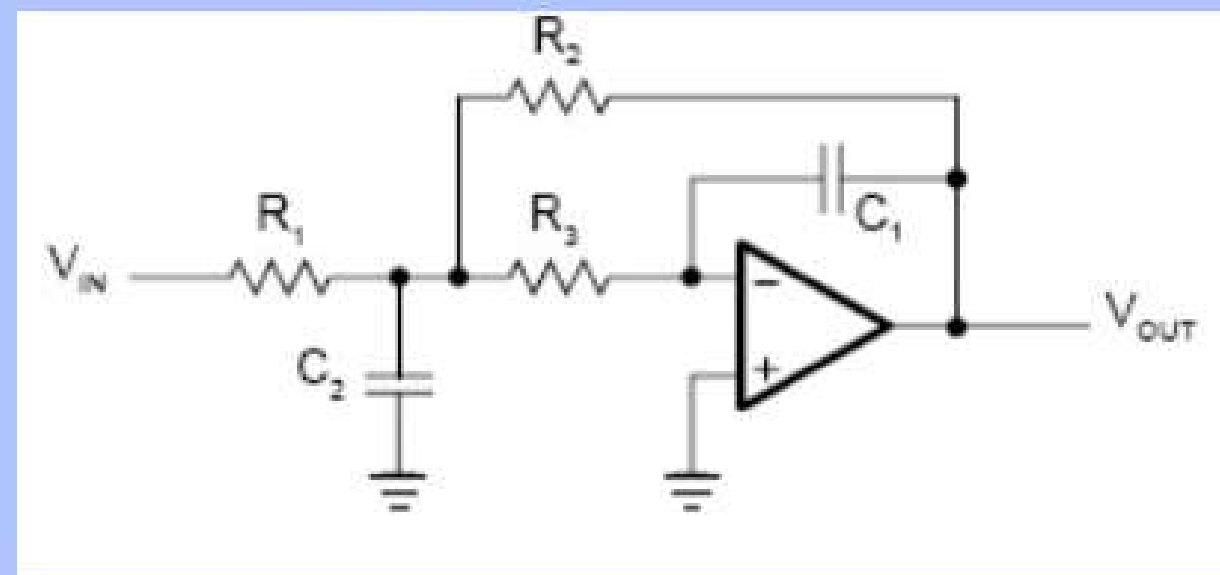
filter quality:  $Q = \frac{1}{3 - G}$



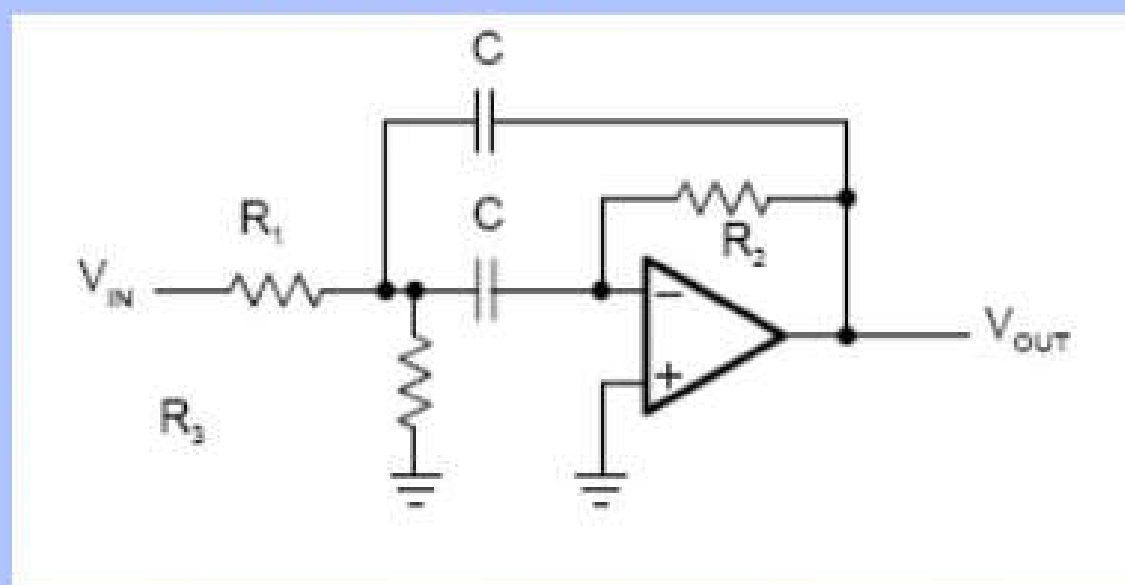
- *Trece-Sus*:



- *Trece-Jos*:



- *Trece-Bandă*



- Funcția de transfer:

$$A(s) = \frac{-\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_m \cdot s}{1 + \frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_m \cdot s + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3} C^2 \cdot \omega_m^2 \cdot s^2}$$

- Unde:

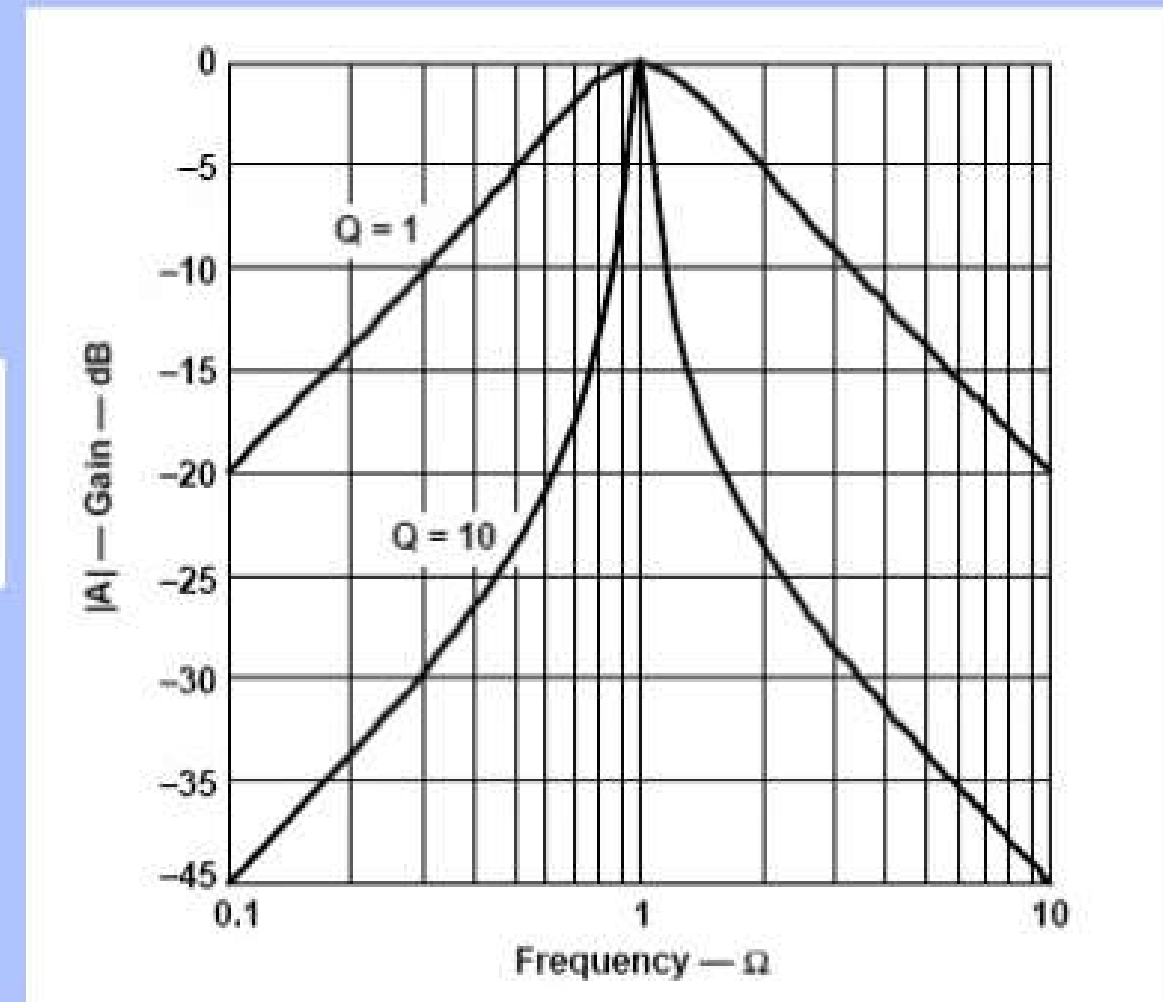
- Frecvența de tăiere:

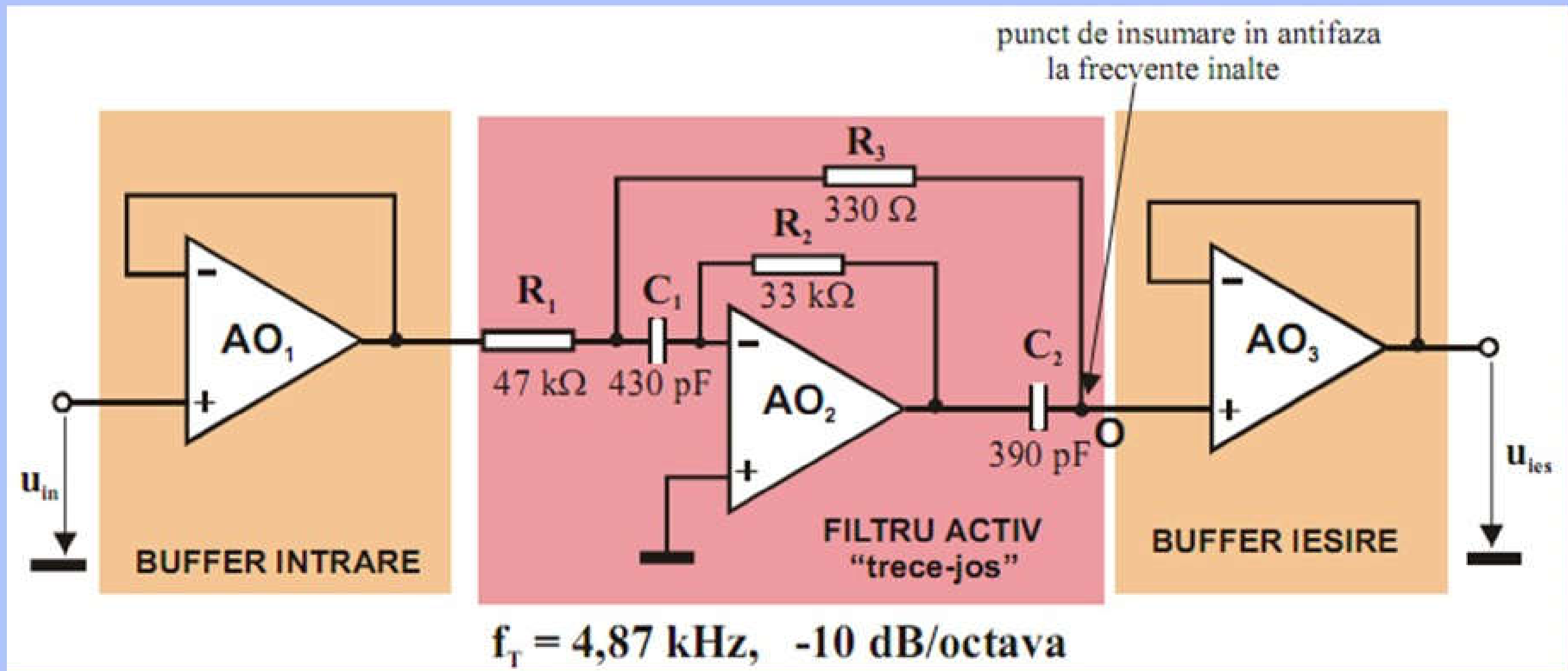
$$f_m = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}}$$

inner gain:  $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

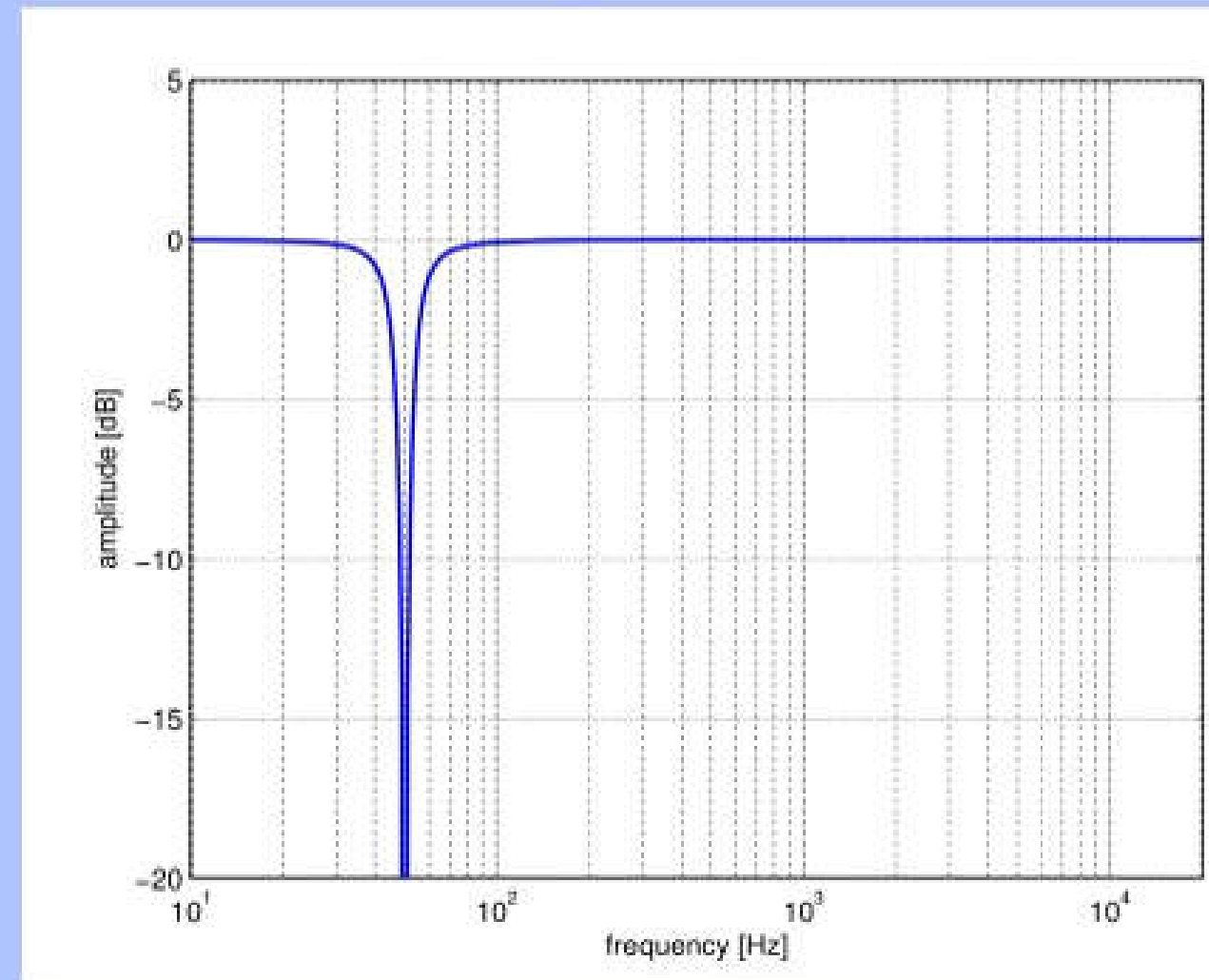
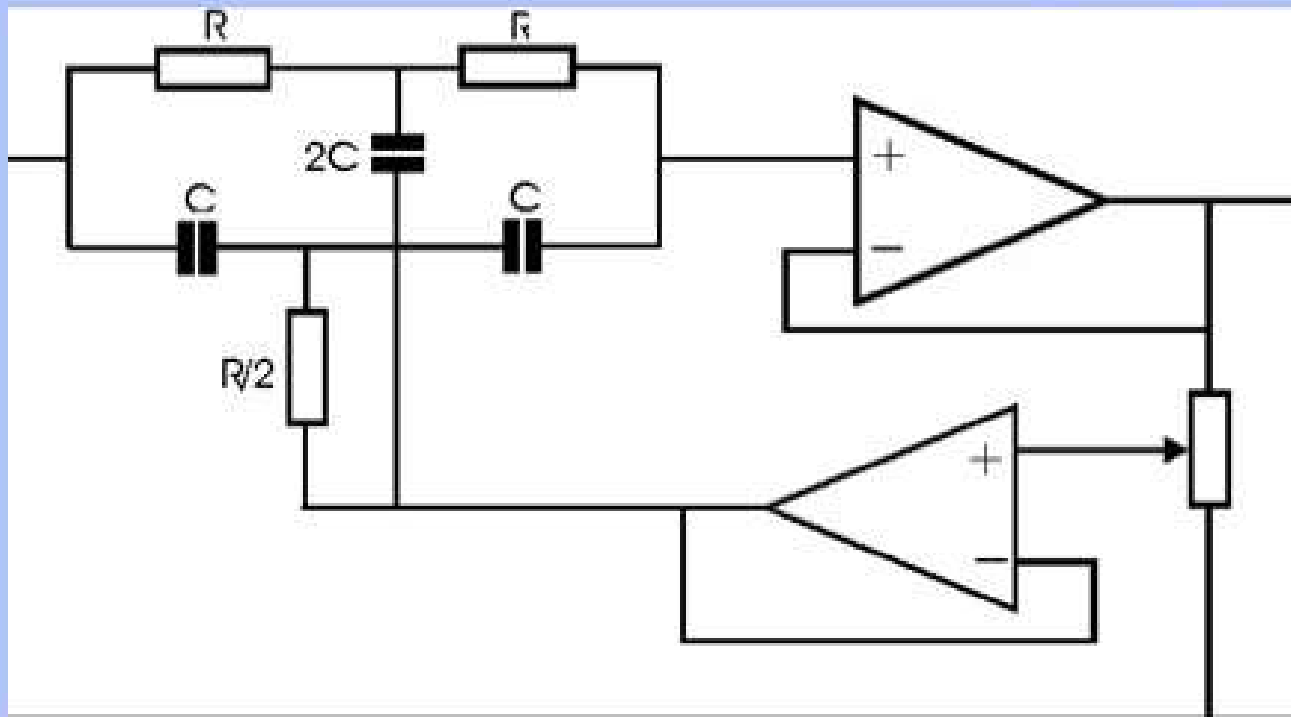
gain at  $f_m$ :  $A_m = \frac{G}{3 - G}$

filter quality:  $Q = \frac{1}{3 - G}$





- Filtru Notch activ, de rejecție a unei frecvențe:



- Frecvența de tăiere:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Vă mulțumim pentru atenție!!!



Tempus

BIOMEDICAL ENGINEERING EDUCATION TEMPUS  
INITIATIVE IN EASTERN NEIGHBOURING AREA

